合同部分群に関する length spectrum の重複度について
On multiplicities in length spectra for congruence subgroups

橋本康史
Yasufumi Hashimoto *

Abstract. In this paper, we study the growth of multiplicities in length spectra for congruence subgroups. The main theorem describes asymptotic formulas for the power sums of the multiplicities.

1 Introduction

まず，$H := \{x + y\sqrt{-1} \mid y > 0\}$ を複素上半平面，Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群で，対応するリーマン面 $\Gamma\backslash H$ の体積が有限であるようなものとする．次に，$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ を Γ の素な双曲的共役類の集合とし，

$$\mathrm{Tr}(\Gamma) := \{\mathrm{tr}\gamma \mid \gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma)\}, \qquad m_\Gamma(t) := \#\{\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma) \mid \mathrm{tr}\gamma = t\}$$

とおく．このとき，$\mathrm{tr}\gamma$ は $\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma)$ に対応する $\Gamma\backslash H$ 上の素測地線の長さ l_γ に対して，$\mathrm{tr}\gamma = \cosh l_\gamma$ なので，$\{(t, m_\Gamma(t))\}_{t\in\mathrm{Tr}(\Gamma)}$ を $\Gamma\backslash H$ 上の length spectrum と同一視できる．これは，素測地線から長さの情報だけを取り出したものだが，リーマン面の特徴づけという点で，重要な意味をもつ．実際に，2 つの種数 2 以上のコンパクトリーマン面に対して，length spectrum が一致することと，ラプラシアンのスペクトルが一致することが同値である（[Hu]）ため，length spectrum はラプラシアンのスペクトルと同程度の情報量をもっているといえる．なお，セルバーグ跡公式（[Se]，[He] など）は，length spectrum とラプラシアンのスペクトルとの間の関係をテスト関数込みで記述した公式である．

*本研究は文科省科研費若手 (B) 20740027 の助成を受けたものである．
MSC: primary: 11M36; secondary: 11F72
Keywords: length spectrum, multiplicity, prime geodesic theorem, congruence subgroup

さて，length spectrum は Γ の元の跡のみを取り出したものなので，一見簡単そうに思えるが，その分布を初等的に記述することは，一般には非常に難しい．例えば，$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のときは,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}_{\geq 3}$$

であることがすぐにわかるが，これは非常に特殊な場合であり，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の生成元を少し変えたヘッケ三角形群

$$\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2\cos\dfrac{2\pi}{q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

の場合（とくに非数論的な Γ をあたえる $q \neq 3, 4, 6$ のとき）ですら，$\mathrm{Tr}\Gamma$ を決定することは容易ではない．漸近的な挙動については，どんな Γ に対しても $\{m_\Gamma(t)\}$ が非有界であること（[Ra]）や，$m_\Gamma(t)$ の和が

$$\sum_{t \in \mathrm{Tr}(\Gamma), t < x} m_\Gamma(t) \sim \mathrm{li}(x^2) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x^2}{2\log x} \tag{1.1}$$

と評価できること（素測地線定理，[Se]，[He] など）がわかっているが，これ以上細かいことについてはよくわかっていないし，Γ によって異なる様相を示すと思われる．実際に，Γ が数論的（arithmetic）なときは,

$$\#\{t \in \mathrm{Tr}\Gamma, t < x\} < \exists c_1 x \quad \text{as} \quad x \to \infty$$

で，重複度 $m_\Gamma(t)$ の t に対する増大度が $\exists c_2 t/\log t$ に近く，Γ が非数論的（non-arithmetic）なときは,

$$\#\{t \in \mathrm{Tr}\Gamma, t < x\} \gg x \quad \text{as} \quad x \to \infty$$

で，重複度 $m_\Gamma(t)$ の増大度は $t/\log t$ よりも本質的に小さいと考えられている．これについては，まだ厳密に証明はされていないが，[Ta]，[LS]，[Sc]，[GL] などによって，いくぶん弱い結果が得られており，また，[BS]，[Ma] によって数値実験が行われている．数論的量子カオス（arithmetic quantum chaos）とよばれる分野では，ラプラシアンのスペクトルの分布に関するある種の統計学的な関数が研究対象になっており，計算機を用いた実験が行われているが，その実験結果において，数論的な場合と非数論的な場合とで顕著な違いがあらわれている．この違いは length spectrum（の重複度）の分布の違いと，深く関わっていると指摘する研究者もいる（[BGGS], [BLS], [LS], [Ma] など）.

本稿では，Γ が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群である場合の $m_\Gamma(t)$ の増大度を調べる．このような Γ に対して，$\mathrm{Tr}\Gamma$ は $\mathbb{Z}_{\geq 3}$ の正の密度をもつ部分集合であり，$m_\Gamma(t)$ が原始的不定値二元二次形式の狭義類数を用いて記述できる（[Sa],[H1],[H2] など）ため，他の Γ と比べて，length spectrum が「よくわかっている」場合であるといえる．ただし，二次形式の類数については，古典的な研究対象であり長い歴史があるにもかかわらず，未だによくわかっていないことも少なくない．なので，$m_\Gamma(t)$ を類数で書けたからといって，すべてが明らかになるわけではない．そのような状況の中で Bogomolny-Leyvraz-Schmit [BLS] は，$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合に次のような漸近公式を導いた．

$$\sum_{t \in \mathrm{Tr}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), t<x} m_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(t)^2 \sim c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mathrm{li}_2(x^3) \quad \text{as} \quad x \to \infty.$$

ここで，$\mathrm{li}_k(x) := \int_2^x (\log t)^{-k} dt$，$c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} > 0$ は素数に関するある種のオイラー積で記述できる定数である．実は，この漸近式に関する [BLS] の証明は，数学的には全く厳密ではないが，のちに Peter [Pe] によって補完されている．この漸近式は，$m_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(t)$ の平均的な増大度が，おおよそ $t/\log t$ くらいであり，$t/\log t$ とのずれが主要項の係数 $c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ にあらわれているといえる．加えて，係数 $c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ は，Rudnick [Ru] によって与えられた，ラプラシアンのスペクトルの分布に関する公式にあらわれることから，同様の漸近公式を拡張・一般化し，その係数を明示的にあらわすことは，重要である．実際に，Lukianov [Lu] は，重複度の 2 乗和に関する漸近公式を合同部分群のひとつである $\Gamma_0(n)$ と，不定値な四元数環の極大整環の単数群によって定まる余コンパクトな Γ に対して拡張し，漸近式の主要項の係数の明示的な記述を導いている．本稿では，[BLS], [Pe], [Lu] によって得られたこのような 2 乗和に関する漸近式を，任意のモジュラー群の合同部分群に対する，length spectrum の重複度の任意のべき乗和

$$\pi^{(k)}_\Gamma(x) := \sum_{3 \le t < x} m_\Gamma(t)^k$$

に対して拡張することを目標にする．なお，2007 年度表現論シンポジウムにおいて，同様の研究成果に関する講演を行い，

$$\pi^{(k)}_\Gamma(x) \sim c^{(k)}_\Gamma \mathrm{li}_k(x^{k+1})$$

という成果を紹介したが，その際には係数 $c^{(k)}_\Gamma$ を決定するには至っておらず，また，漸近式自体の証明が必ずしも完全ではなかった．今回，主要項の係数 $c^{(k)}_\Gamma$ を [BLS],[Pe],[Lu] と同様に，素数に関するオイラー積を用いて記述することができたので，その結果（Theorem 5.1）とそれを得るためのアプローチの仕方の概要，いくつかの具体例について報告する．

2　二次形式を用いた length spectrum の表示

まず，合同部分群に関する length spectrum の重複度を二次形式の類数を用いて記述する．

2.1 $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合

原始的不定値二元二次形式の同値類と $\mathrm{Prim}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ の元との間には，次のような一対一対応がある（[G]）．

$$ax^2+bxy+cy^2 \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t_1+bu_1) & -cu_1 \\ au_1 & \frac{1}{2}(t_1-bu_1) \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \tag{2.1}$$

$$\gamma=(\gamma_{ij})_{1\le i,j\le 2} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longmapsto \frac{\gamma_{21}}{u_\gamma}x^2+\frac{\gamma_{11}-\gamma_{22}}{u_\gamma}xy-\frac{\gamma_{12}}{u_\gamma}y^2. \tag{2.2}$$

ここで，$D := b^2-4ac$ は二次形式の判別式で，$(t_j,u_j)=(t_j(D),u_j(D))_{>0}$ はペル方程式 $t^2-Du^2=4$ の j 番目の解，$u_\gamma := \gcd(\gamma_{21},\gamma_{11}-\gamma_{22},-\gamma_{12})_{(>0)}$ である．$\epsilon_j(D) := \frac{1}{2}(t_j+u_j\sqrt{D})$ とかくと，$\epsilon(D) := \epsilon_1(D)$ は基本単数で，$\epsilon_j(D)=\epsilon(D)^j$ が成り立つ．また，$\{(D,j) \mid D\in\mathfrak{D}, j\ge 1\}$ と $\{(t,u) \mid t\ge 3, u\ge 1, (t^2-4)/u^2\in\mathfrak{D}\}$ の間に一対一の対応があることがわかる．

$$(D,j) \longmapsto (t,u)=(t_j(D),u_j(D))\,, \quad (t,u) \longmapsto (D,j)=(D_{t,u},j_{t,u}), \tag{2.3}$$

ここで，$\mathfrak{D}$ は 4 で割って $0,1$ となる非平方数の集合で，

$$D_{t,u} := \frac{t^2-4}{u^2}, \quad j_{t,u} := \max\left\{ j\ge 1 \mid \epsilon_j(D)=\frac{1}{2}\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)\right\}$$

である．以上の対応 (2.1),(2.2) と (2.3) から，$\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合の length spectrum の重複度が次のようにあらわされることがわかる．

$$m_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(t)=\sum_{D\in\mathfrak{D},\epsilon(D)+\epsilon(D)^{-1}=t} h(D)=\sum_{u\in U(t), j_{t,u}=1} h(D_{t,u}), \tag{2.4}$$

ここで，$U(t) := \{u\ge 1, \frac{t^2-4}{u^2}\in\mathfrak{D}\}$ で，$h(D)$ は $D\in\mathfrak{D}$ に関する狭義の類数である．

2.2 合同部分群の場合

まず，合同部分群の定義を与える．

$n\ge 1$ を正整数，階数 n の主合同部分群 $\hat{\Gamma}(n)\subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を

$$\hat{\Gamma}(n) := \mathrm{Ker}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \overset{\text{proj.}}{\to} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_n)\big)=\{\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma\equiv\alpha I \bmod n, \alpha^2\equiv 1 \bmod n\}$$

と定義する．n が $n=\prod_{p|n}p^r$ と素因数分解されるとき，

$$\hat{\Gamma}(n)=\bigcap_{p|n}\hat{\Gamma}(p^r),$$

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}):\hat{\Gamma}(n)]=\#\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_n)=\prod_{p|n}\frac{p^{3r-2}(p^2-1)}{\beta(p^r)}$$

が成り立つ．ここで，

$$\beta(p^r) = \begin{cases} 1, & (p^r = 2), \\ 2, & (p^r = 4 \text{ or } 2 \nmid p), \\ 4, & (p = 2, r \geq 3) \end{cases}$$

である．もし，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分群 Γ が $\hat{\Gamma}(n) \subset \Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，任意の $m < n$ に対して $\Gamma \not\supset \hat{\Gamma}(m)$ であるとき，Γ を階数 n の合同部分群とよぶ．もし，n が $n = \prod_{p|n} p^r$ とあらわされるとき，Γ は階数 p^r の合同部分群 Γ_{p^r} を使って，

$$\Gamma = \bigcap_{p|n} \Gamma_{p^r} \tag{2.5}$$

とかける．ここで，Γ_{p^r} は $\Gamma_{p^r} = \Gamma\hat{\Gamma}(p^r)$ ととればよい．

次に，合同部分群に関する length spectrum について考える．ここでは，重複度 $m_\Gamma(t)$ そのものではなく，少しずらした

$$\hat{m}_\Gamma(t) := \sum_{\substack{\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma), j \geq 1 \\ \mathrm{tr}\gamma^j = t}} \frac{1}{j}$$

について考える．漸近的な挙動を考えるときには，$m_\Gamma(t)$ とほとんど同じものと考えてよい．これは，Venkov-Zograf の公式 [VZ] を使うと，

$$\hat{m}_{\tilde{\Gamma}}(t) = \sum_{\substack{\gamma \in \mathrm{Prim}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), j \geq 1 \\ \mathrm{tr}\gamma^j = t}} \frac{1}{j} \mathrm{tr}\chi_\Gamma(\gamma^j) \tag{2.6}$$

であることがわかる．ここで $\chi_\Gamma := \mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} 1$ である．実は，上の式の右辺にあらわれる $\mathrm{tr}\chi(\gamma^j)$ は，$\mathrm{tr}\gamma^j$ と u_{γ^j} にしかよらない（[H2]）ので，

$$\hat{m}_\Gamma(t) = \sum_{u \in U(t)} \frac{1}{j_{t,u}} M_\Gamma(t, u_n) h(D_{t,u}) \tag{2.7}$$

と記述できる．ここで，$u_n := \gcd(n, u)$，$D_{t,u}(n) := D_{t,u}(u/u_n)^2$，$t' \equiv t \bmod 2$ で，$M_\Gamma(t, u_n)$ は，

$$\gamma(t, u_n) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t + t'u_n) & \frac{1}{4}(D_{t,u}(n) - t')u_n \\ u_n & \frac{1}{2}(t - t'u_n) \end{pmatrix}.$$

を使って，$M_\Gamma(t, u_n) = \mathrm{tr}\chi_\Gamma(\gamma(t, u_n))$ で与えられる．ここで，

$$M_\Gamma(t, u_n) = \prod_{p|n} M_{\Gamma_{p^r}}(t, u_{p^r}) \tag{2.8}$$

が成り立っている．

ただ，(2.7) の右辺は $j_{t,u}^{-1}$ がやや不便なので，これを省略した，

$$\tilde{m}_\Gamma(t) := \sum_{u\in U(t)} M_\Gamma(t,u_n)h(D_{t,u})$$

を以後取り扱うことにする．すると，

$$\tilde{\pi}_\Gamma^{(k)}(x) := \sum_{3\le t\le x} \tilde{m}_\Gamma(t)^k$$

に対して，

$$\left|\tilde{\pi}_\Gamma^{(k)}(x) - \pi_\Gamma^{(k)}(x)\right| \ll x^{k+1/2+\epsilon}$$

なので，$m_\Gamma(t)$ の代わりに，$\tilde{m}_\Gamma(t)$ を考えてもよいことがわかる．

3　算術関数について

Schwarz と Spilker が，算術関数の漸近的な挙動についての非常に有用な研究成果を [SS] にまとめおり，Peter [Pe] による $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する成果も，その中に記述されている Parseval の等式を用いることで，得られている．本節では，算術関数における Parseval の等式と，そこから導かれる等式をいくつか述べる．

まず，$q \ge 1$ を整数とし，算術関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ に対して，セミノルムを

$$||f||_q := \left(\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{1\le n\le x} |f(n)|^q\right)^{1/q}$$

で定める．もし，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$||f-h|| < \epsilon$ をみたすような周期関数 h が存在するなら，f を q-limit periodic とよぶ．$\mathcal{D}^q$ を q-limit periodic な関数全体とすると，$\mathcal{D}^q$ は $||f_1 - f_2||_q = 0$ となる f_1 と f_2 を同一視することで，ノルム $||*||_q$ で定まるバナッハ空間になる．もちろん，$1 \le q_1 \le q_2 < \infty$ なら，$\mathcal{D}^1 \supset \mathcal{D}^{q_1} \supset \mathcal{D}^{q_2}$ である．ここで，$f \in \mathcal{D}^1$ に対して，

$$M(f) := \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{1\le n\le x} f(n)$$

と定義すると，$\mathcal{D}^2$ は内積 $< f, h >:= M(f\bar{h})$ で定まるヒルベルト空間になる．$u \in \mathbb{R}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して，$e_u(n) := e^{2\pi i u n}$ とすると，$f \in \mathcal{D}^1$ と $u \in \mathbb{R}$ に対して，フーリエ係数 $\hat{f}(u) := M(fe_{-u})$ が定まる．このとき，$f, g \in \mathcal{D}^2$ に対して，パーセバルの等式

$$M(f\bar{g}) = \sum_{b\ge 1} \sum_{a\in(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*} \hat{f}(a/b)\overline{\hat{g}(a/b)} \tag{3.1}$$

が成り立つ（[SS]）．このパーセバルの等式を使って，次の 2 つの補題を示す．

Lemma 3.1. 関数 f, g を，$f, g \in \mathcal{D}^2$ で，任意の $N \geq 1$, $m \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対して，

$$F(m;N) := \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{1\leq n\leq x \\ n\equiv m \bmod N}} f(n), \qquad G(m;N) := \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{1\leq n\leq x \\ n\equiv m \bmod N}} g(n)$$

が存在すると仮定する．このとき，任意の $N \geq 1$ と $\delta \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対して，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{1\leq n\leq x \\ n\equiv \delta \bmod N}} f(n)\overline{g(n)} = \lim_{b\to\infty} b \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}/b_N\mathbb{Z} \\ m\equiv\delta \bmod N}} F(m;b_N)\overline{G(m;b)}$$

が成り立つ．ここで，$b_N := \mathrm{lcm}(b, N)$ である．

Proof. まず，

$$\chi_{\delta,N}(n) := \begin{cases} 1, & (n \equiv \delta \bmod N), \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とおく．明らかに，$f\chi_{\delta,n}, g \in \mathcal{D}^2$ なので，パーセバルの等式を使って

$$M(f\chi_{\delta,n}\bar{g}) = \sum_{b\geq 1} \sum_{a\in(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*} \widehat{f\chi_{\delta,n}}(a/b)\overline{\hat{g}(a/b)} \tag{3.2}$$

を得る．ここで，$\hat{*}$ の定義から，

$$\widehat{f\chi_{\delta,n}}(\alpha) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}/b_N\mathbb{Z} \\ m\equiv\delta \bmod N}} F(m;b_N)e^{2\pi i m\alpha}, \quad \hat{g}(\alpha) = \sum_{m\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \overline{G(m;N)}e^{2\pi i m\alpha}$$

なので，(3.2) は，

$$\begin{aligned} M(f\bar{g}) =& \sum_{b\geq 1} \sum_{a\in(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}/b_N\mathbb{Z} \\ m\equiv\delta \bmod N}} F(m_1;b_N) \sum_{m_2\in\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}} \overline{G(m_2;b)}e^{2\pi i\frac{a}{b}(m_2-m_1)}, \\ =& \sum_{b\geq 1} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}/b_N\mathbb{Z} \\ m\equiv\delta \bmod N}} F(m_1;b_N) \sum_{m_2\in\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}} \overline{G(m_1+m_2;b)}\tilde{\mu}(m_2;b) \end{aligned} \tag{3.3}$$

である．ここで，$\tilde{\mu}(m_2;b)$ はメビウス関数 $\mu(*)$ を使って，次で与えられる．

$$\tilde{\mu}(m_2;b) := \sum_{a\in(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*} e^{2\pi i\frac{a}{b}(m_2)} = \frac{\varphi(b)}{\varphi(b/\gcd(m_2,b))}\mu\left(\frac{b}{\gcd(m_2,b)}\right).$$

等式 (3.3) について，まず m_2 に関する和を計算すると，

$$\begin{aligned}\sum_{m_2\in\mathbb{Z}/bZ}\overline{G(m_1+m_2;b)}\tilde{\mu}(m_2;b) &= \sum_{b_1|b}\frac{\varphi(b)}{\varphi(b/b_1)}\mu(b/b_1)\sum_{\substack{m_2\in\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\\ \gcd(m_2,b)=b_1}}\overline{G(m_1+m_2;b)}\\ &= \sum_{b_1|b}\frac{\varphi(b)}{\varphi(b/b_1)}\mu(b/b_1)\sum_{b_2|b/b_1}\mu(b_2)\overline{G(m_1;B)}\\ &= \sum_{B|b}\sum_{b_1|B}\frac{\varphi(b)}{\varphi(b/b_1)}\mu(b/b_1)\mu(B/b_1)\overline{G(m_1;B)}\end{aligned}$$

である．メビウス関数 $\mu(*)$ の定義から，

$$\mu(b/b_1)\mu(B/b_1)=\begin{cases}\mu(b/B), & (\gcd(b/B,B/b_1)=1,\mu(B/b_1)=1),\\ 0, & (\text{otherwise})\end{cases}$$

なので，

$$\begin{aligned}\sum_{m_2\in\mathbb{Z}/bZ}\overline{G(m_1+m_2;b)}\tilde{\mu}(m_2;b) &= \sum_{B|b}\mu(b/B)\overline{G(m_1;B)}\sum_{\substack{b_1|B\\ \gcd(b/B,B/b_1)=1\\ \mu(B/b_1)=1}}\frac{\varphi(b)}{\varphi(b/b_1)}\\ &= \sum_{B|b}\mu(b/B)B\overline{G(m_1;B)} \end{aligned}\tag{3.4}$$

が成り立つ．あとは，(3.4) を (3.3) に直接代入すると，

$$\begin{aligned}M(f\chi_{\delta,n}\bar{g}) &= \sum_{b\geq 1}\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}/b_N\mathbb{Z}\\ m\equiv\delta \bmod N}}F(m_1;b_N)\sum_{B|b}\mu(b/B)B\overline{G(m_1;B)}\\ &= \sum_{b\geq 1}\sum_{B|b}\mu(b/B)B\sum_{m_1\in\mathbb{Z}/B_N\mathbb{Z}}F(m_1;B_N)\overline{G(m_1;B)}\end{aligned}$$

を得る．あとは和のとりかえを行えばよい． □

Lemma 3.2. 関数 f を十分大きな $q\geq 1$ に対して，$f\in\mathcal{D}^q$ で，

$$F(m;N):=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{1\leq n\leq x\\ n\equiv m \bmod N}}f(n)$$

が，任意の $N\geq 1$，$m\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対して存在すると仮定する．このとき，次が成り立つ．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{1\leq n\leq x\\ n\equiv\delta \bmod N}}f(n)^k=\sum_{b\to\infty}b^{k-1}\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}/b_N\mathbb{Z}\\ m\equiv\delta \bmod N}}F(m;b_N)^k. \tag{3.5}$$

Proof. $k=1$ のときは自明なので，$k=K(\geq 1)$ のときに (3.5) が成り立つと仮定して，$k=K+1$ の場合を考える．すると，$f^K, f\in\mathcal{D}^2$ なので，

$$H_K(m;N):=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{1\leq n\leq x\\ n\equiv m \bmod N}} f(n)^K,$$
$$F(m;N):=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{1\leq n\leq x\\ n\equiv m \bmod N}} f(n)$$

が任意の $N\geq 1$ と $m\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対して成り立つ．なので，Lemma 3.1 を使うと，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{1\leq n\leq x\\ n\equiv m \bmod N}} f(n)^{K+1}=\lim_{b\to\infty} b\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}/b_N\mathbb{Z}\\ m\equiv\delta \bmod N}} H_K(m;b_N)F(m;b_N)$$

である．あとは，和のとりかえを行えばよい． □

4 重複度の部分和について

まず，

$$I_\Gamma(t):=\frac{\log t}{t}m_\Gamma(t)$$

とおく．すると，素測地線定理 (1.1) から，

$$\sum_{3\leq t<x} I_\Gamma(t)\sim x$$

が成り立つ，つまり，$I_\Gamma\in\mathcal{D}^1$ であることがわかる．なので，Lemma 3.2 の $f(n)$ に $I_\Gamma(t)$ をあてはめて，主結果を得たい．そのために示すべきことは，(i) 任意の $q\geq 1$ に対して，$I_\Gamma(t)\in\mathcal{D}^q$ であること，と (ii) 任意の m,δ に対して，

$$F_\Gamma(\delta;m):=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{3\leq t\leq x\\ t\equiv\delta \bmod m}} I_\Gamma(t)$$

が存在し，比較的わかりやすい形で記述できること，の 2 点である．(i) については，Peter [Pe] が $I_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\in\mathcal{D}^q$ を示しており，さらに，$0\leq I_\Gamma(t)\leq[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}):\Gamma]I_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(t)$ なので，$I_\Gamma\in\mathcal{D}^q$ が成り立つこともわかる．あとは，(ii) について調べればよい．

便宜上，

$$\tilde{m}_\Gamma(t,u):=M_\Gamma(t,u_n)h(D_{t,u})=M_\Gamma(t,u_n)\tilde{m}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(t,u)$$
$$I_\Gamma(t,u):=\frac{\log t}{t}m_\Gamma(t,u),$$
$$F_\Gamma(\delta,N;m):=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{3\leq t\leq x\\ t\equiv\delta \bmod m\\ D_{\delta,N}\in\mathfrak{D},N\,||\,\gcd(u,m)}} I_\Gamma(t,u)$$

を定義する．すると，$\tilde{m}_\Gamma(t), I_\Gamma(t)$ は上を，u に関して和をとったものである．類数公式を使うと，

$$\tilde{m}_\Gamma(t,u) = M_\Gamma(t,u_n)h(D_{t,u}) = M_\Gamma(t,u_n)\frac{\sqrt{D_{t,u}}}{\log\epsilon(D_{t,u})}L(1,\chi_{D_{t,u}})$$

と書ける．Raulf はこの表示を使って，[Rau] の Lemma 2.11, 2.19 で，与えられた m,u,δ に対して，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{3\le t<x\\ t\equiv\delta \bmod m, D_{t,u}\in\mathfrak{D}}} I_\Gamma(t,u) = A(\delta;m,u)\mathrm{li}(x^2) + O(u^{-1-\epsilon}x^{2-\epsilon}) \tag{4.1}$$

が成り立つことを示した．ここで，

$$A(\delta;m,u) := \frac{1}{u}\sum_{n\ge1}\frac{1}{8\mathrm{lcm}(m,u^2)n^2}\sum_{\substack{8n\mathrm{lcm}(m,u^2)<t\le16n\mathrm{lcm}(m,u^2)\\ t\equiv\delta \bmod m, D_{t,u}\in\mathfrak{D}}}\left(\frac{D_{t,u}}{n}\right) \tag{4.2}$$

である．ここであらわれる $A(\delta;m,u)$ を u に関しての和をとると，$F(\delta;m)$ に対応するものの値を導くことができる．しかし，これを直接計算するのは非常に面倒なので，チェボタレフ型素測地線定理を用いる．

Lemma 4.1. *(チェボタレフ型素測地線定理，[Sa],[Su])* Γ を $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash H) < \infty$ をみたす $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群，Γ' を指数有限な Γ の正規部分群とする．$G := \Gamma'\backslash\Gamma$ とし，$\iota : \Gamma \to G$ を自然な射影とする．このとき，G の共役類 $[g]$ に対して，次が成り立つ．

$$\pi_\Gamma(x;\Gamma',[g]) := \#\{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma) \mid \iota(\gamma)\subset[g], \mathrm{tr}\gamma < x\} \sim \frac{\#[g]}{\#G}\mathrm{li}(x) \quad as \quad x\to\infty. \tag{4.3}$$

二次形式の同値類と $\mathrm{Prim}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ との対応 (2.1) をみると，$\gamma_1,\gamma_2\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が $\hat{\Gamma}(m)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ 上で共役であるとき，ある $\alpha^2\equiv 1 \bmod m$ なる α に対して，$\mathrm{tr}\gamma_1 \equiv \alpha\mathrm{tr}\gamma_2 \bmod m$ と，$\gcd(m,u_{\gamma_1}) = \gcd(m,u_{\gamma_2})$ をみたすので，集合

$$\{\gamma\in\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \mid \mathrm{tr}\gamma\equiv\alpha\delta \bmod n, \alpha^2\equiv 1 \bmod m, \gcd(m,u_\gamma) = N\}$$

は，いくつかの $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ の共役類を合わせたものになる．なので，Lemma 4.1 より，

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha^2\equiv 1 \bmod m} F_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\alpha\delta,N;m)\\ &= \frac{\#\{\gamma\in\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \mid \mathrm{tr}\gamma\equiv\alpha\delta \bmod m, \alpha^2\equiv 1 \bmod m, \gcd(m,u_\gamma) = N\}}{\#\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})}\end{aligned} \tag{4.4}$$

であることがわかる．任意の $\alpha^2\equiv 1 \bmod m$ なる α に対して，

$$F_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\delta,N;m) = F_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\alpha\delta,N;m)$$

であることは，(4.2) よりすぐにわかるので，(4.4) と (4.1) を合わせると，

$$F_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\delta, N; m) = \frac{\#\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \mid \mathrm{tr}\gamma \equiv \delta \bmod m, \gcd(m, u_\gamma) = N\}}{\#\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})} \tag{4.5}$$

が成り立つことがわかる．これは，初等的な計算で，次のように求まる．

Lemma 4.2. *(i)* $m = 2^r$ のとき，

$$\begin{aligned}&\#\{\gamma \in \mathrm{SL}(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}) \mid tr\gamma \equiv t \bmod p^r, p^L \,||\, u\} \\ &= \begin{cases} 3 \times 2^{2r-L-2}, & (0 \le L < r/2, D \equiv 1 \bmod 8), \\ 2^{2r-L-2}, & (0 \le L < r/2, D \equiv 5 \bmod 8), \\ 3 \times 2^{2r-L-3}, & (0 \le L < r/2, 4 \mid D), \end{cases}\end{aligned}$$

(ii) $m = p^r$, $p \ge 3$ のとき，

$$\begin{aligned}&\#\{\gamma \in \mathrm{SL}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \mid tr\gamma \equiv t \bmod p^r, p^L \,||\, u\} \\ &= \begin{cases} p^{2r-L-1}(p+1), & (0 \le L < r/2, (D/p) = 1), \\ p^{2r-L-1}(p-1), & (0 \le L < r/2, (D/p) = -1), \\ p^{2r-L-2}(p^2-1), & (0 \le L < r/2, (D/p) = 0), \\ p^{3[r/2]}, & (L \ge r/2). \end{cases}\end{aligned}$$

(iii) $m = \prod_p p^r$, $N = \prod_p p^k$ のとき，

$$\begin{aligned}&\#\{\gamma \in \mathrm{SL}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \mid tr\gamma \equiv t \bmod m, N \,||\, u\} \\ &= \prod_p \#\{\gamma \in \mathrm{SL}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \mid tr\gamma \equiv t \bmod p^r, p^k \,||\, u\}\end{aligned}$$

以上より，

$$F_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\delta, N; m) = \prod_{p|m} F_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\delta, p^k; p^r)$$

が成り立つことがわかる．また，$F_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\delta, N; m)$ と $M_\Gamma(t, u_n)$ の乗法性から，任意の合同部分群 Γ（階数 $n = \prod_p p^R$）に対しても，

$$F_\Gamma(\delta, N; m) = \prod_{p|m} F_{\Gamma_{p^R}}(\delta, p^k; p^r) \tag{4.6}$$

が成り立つことがわかる．

5 主結果

前節までの結果を用いて,

$$\psi_\Gamma^{(k)}(x) := \sum_{3\le t<x} I_\Gamma(t)^k,$$

に関する漸近公式を導く．素測地線定理 (1.1) から,

$$\psi_\Gamma^{(1)}(x) \sim x \quad \text{as} \quad x \to \infty$$

なので，$I_\Gamma \in \mathcal{D}^1$ であることはすぐにわかる．前節の議論から，Lemma 3.2 を用いて

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\psi_\Gamma^{(k)}(x) = \sum_{b\ge1} b^{k-1} \sum_{\delta\in\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}} F_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\delta; b)^k \tag{5.1}$$

が成り立つことがわかる．あとは，$F_\Gamma(\delta; m)$ に関する乗法性 (4.6) を用いることで，次の結果を得る．

Theorem 5.1. $n \ge 1$ を整数とし，Γ を階数 n の合同部分群とする．このとき,

$$F_\Gamma^{(k)} := \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\psi_\Gamma^{(k)}(x) = \prod_p \left(\lim_{l\to\infty} p^l \sum_{0\le\delta\le p^l-1} F_{\Gamma_{p_n}}(\delta; p^l)^k \right)$$

が成り立つ．ここで，$p_n := p^{\mathrm{ord}_p n}$ である．

この定理 5.1 を使うと，即座に

$$\pi_\Gamma^{(k)}(x) \sim F_\Gamma^{(k)} \mathrm{li}_k(x^{k+1}) \quad \text{as} \quad x \to \infty$$

を得られるので，定理 5.1 を本稿の主結果であるということができる．次節では，例としていくつかの主要な合同部分群に対して，$F_\Gamma^{(k)}$ の具体的な値を求める．

6 具体例

6.1 $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ とき

Lemma 4.2 より，$F_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\delta; p^r)$ は次のとおりである．
(i) $p = 2$ のとき.

$$F_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\delta; 2^r) = \frac{1}{3\times 2^{3r-2}} \begin{cases} 3\times 2^{2r-1}, & ((\delta^2-4)/2^{2L} \equiv 1 \bmod 8, L \ge 3), \\ 2^{2r-1}\times(3-2^{-L+1}), & ((\delta^2-4)/2^{2L} \equiv 5 \bmod 8, \\ & L = 0, L \ge 3), \\ 3\times 2^{2r-1}\times(1-2^{-L-1}), & (2^{2L+2} \mid \delta^2-4, L \ge 0). \end{cases}$$

(ii) $p \geq 3$ のとき.

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\delta; p^r) &= \frac{1}{p^{3r-2}(p^2-1)} \\
&\times \begin{cases}
p^{2r} + p^{2r-1}, & ((\frac{\delta^2-4}{p^{2L}}/p) = 1, L \geq 0), \\
p^{2r} + p^{2r-1} - 2p^{2r-L-1}, & ((\frac{\delta^2-4}{p^{2L}}/p) = -1, L \geq 0), \\
p^{2r} + p^{2r-1} - p^{2r-L-1} - p^{2r-L-2}, & ((\frac{\delta^2-4}{p^{2L}}/p) =, L \geq 0).
\end{cases}
\end{aligned}
$$

これを用いると,

$$
\begin{aligned}
F^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} =& \frac{1015}{864} \prod_{p \geq 3} \frac{p^2(p^3+p^2-p-3)}{(p-1)^2(p+1)^3}, \\
F^{(3)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} =& \frac{682495}{428544} \prod_{p \geq 3} \frac{p^8+p^7+p^6-5p^5-5p^3-5p^2-p-1}{(p-1)^2(p+1)^2(p^4+p^3+p^2+p+1)}, \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

を得る．もちろん，$k \geq 4$ の場合も計算でき，同様に有理数の無限積であらわされる．しかしながら，$k = 4$ のときは $p^6 - 1$ の因子，$k = 5$ のときは $p^7 - 1$ の因子，$\cdots$ が分母にあらわれ，表示が煩雑になってくるのでここでは省略する．

6.2 $\Gamma = \Gamma_0(n)$ のとき

簡単のため，n が平方因子を含まない奇数と仮定する．このとき素数 q に対して，$q \mid n$ なら $\Gamma_0(n)\hat{\Gamma}(q^r) = \Gamma_0(q)$ で，$q \nmid n$ なら $\Gamma_0(n)\hat{\Gamma}(q^r) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ である．さらに，[H1] より，

$$
M_{\Gamma_0(q)}(t,u) = \begin{cases}
q+1, & (q \mid u), \\
1 + \left(\dfrac{t^2-4}{p}\right), & (q \nmid u),
\end{cases}
$$

なので，

$$
\begin{aligned}
F_{\Gamma_0(q)}(\delta; q^r) &= \frac{1}{p^{3r-2}(p^2-1)} \\
&\times \begin{cases}
2q^{2r} + 2q^{2r-1}, & ((\frac{\delta^2-4}{q^{2L}}/q) = 1, L \geq 0), \\
2(p+1)(p^{2r-1} - p^{2r-L-1}), & ((\frac{\delta^2-4}{p^{2L}}/p) = -1, L \geq 0), \\
(p+1)(2p^{2r-1} - p^{2r-L-1} - p^{2r-L-2}), & ((\frac{\delta^2-4}{p^{2L}}/p) =, L \geq 0)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

であることがわかる．これを使うと，

$$
\begin{aligned}
F^{(2)}_{\Gamma_0(n)} =& \frac{1015}{864}\prod_{p\geq 3, p\nmid n}\frac{p^2(p^3+p^2-p-3)}{(p-1)^2(p+1)^3}\prod_{p|n}\frac{2(p^2-p-1)}{(p-1)^2(p+1)^3},\\
F^{(3)}_{\Gamma_0(n)} =& \frac{682495}{428544}\prod_{p\geq 3, p\nmid n}\frac{p^8+p^7+p^6-5p^5-5p^3-5p^2-p-1}{(p-1)^2(p+1)^2(p^4+p^3+p^2+p+1)}\\
&\times\prod_{p|n}\frac{2p^2(2p^6-p^5-2p^4-4p^3-2p^2-5p-2)}{(p-1)^3(p+1)(p^4+p^3+p^2+p+1)},\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

を得る．

6.3 $\Gamma=\hat{\Gamma}(n)$ のとき

簡単のため，n は奇数で，$n=\prod_{q|n}q^N$ と素因数分解されるとする．このとき，$r\geq N$ に対して，$\hat{\Gamma}(n)\hat{\Gamma}(q^r)=\Gamma(q^N)$ で，$p\nmid n$ なる素数 p に対して $\hat{\Gamma}(n)\hat{\Gamma}(p^r)=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ である．さらに，[H1] より，

$$
M_{\hat{\Gamma}(q^N)}(t,u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}q^{3N-2}(q^2-1), & (q\mid u),\\ 0, & (q\nmid u)\end{cases}
$$

なので，

$$
\begin{aligned}
&F_{\hat{\Gamma}(q^N)}(\delta;q^r)=\frac{1}{2}p^{-3(r-N)}\\
&\times\begin{cases}q^{2r-N}+q^{2r-N-1}, & ((\frac{\delta^2-4}{q^{2L}}/q)=1, L\geq N),\\
q^{2r-N}+q^{2r-N-1}-2p^{2r-L-1}, & ((\frac{\delta^2-4}{p^{2L}}/p)=-1, L\geq N),\\
q^{2r-N}+q^{2r-N-1}-p^{2r-L-1}-p^{2r-L-2}, & ((\frac{\delta^2-4}{p^{2L}}/p)=, L\geq N),\\
0, & (\text{otherwise})\end{cases}
\end{aligned}
$$

であることがわかる．これを定理 5.1 にあてはめると，

$$
\begin{aligned}
F^{(2)}_{\hat{\Gamma}(n)} =& \frac{1015}{864}\prod_{p\geq 3, p\nmid n}\frac{p^2(p^3+p^2-p-3)}{(p-1)^2(p+1)^3}\prod_{p|n}\frac{p^{2N}(p^2+p+1)}{2p(p+1)},\\
F^{(3)}_{\hat{\Gamma}(n)} =& \frac{682495}{428544}\prod_{p\geq 3, p\nmid n}\frac{p^8+p^7+p^6-5p^5-5p^3-5p^2-p-1}{(p-1)^2(p+1)^2(p^4+p^3+p^2+p+1)}\\
&\times\prod_{p|n}\frac{p^{4N-2}(p^6+p^5+4p^4+p^3+4p^2+p+1)}{4(p^4+p^3+p^2+p+1)},\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

を得る.

参考文献

[BGGS] E. Bogomolny, B. Georgeot, M.J. Giannoni and C. Schmit, *Arithmetical chaos*, Physics Reports **291** (1997), 219–324.

[BLS] E. Bogomolny, F. Leyvraz and C. Schmit, *Distribution of eigenvalues for the modular group*, Commun. Math. Phys. **176** (1996), 575–617.

[BS] E. Bogomolny and C. Schmit, *Multiplicities of periodic orbit lengths for non-arithmetic models*, J. Phys. A **37** (2004), 4501–4526.

[H1] Y. Hashimoto, *Arithmetic expressions of Selberg's zeta functions for congruence subgroups*, J. Number Theory, **122** (2007) p.324–335.

[H2] Y. Hashimoto, *Selberg's zeta functions for congruence subgroups of modular groups in* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *and* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, arXiv.math/0806.4829.

[G] C. F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Fleischer, Leipzig, (1801).

[GL] S. Geninska and E. Leuzinger, *A geometric characterization of arithmetic Fuchsian groups*, Duke Math. J. **142** (2008), 111–125.

[He] D. Hejhal, *The Selberg trace formula of* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *I, II*, Springer Lec. Notes in Math. **548, 1001** Springer-Verlag (1976, 1983).

[Hu] H. Huber, *Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen I, II*, Math. Ann. **138** (1959), 1–26, **142** (1961), 385–398 and **143** (1961), 463–464.

[Lu] V. Lukianov, *A mean value theorem for closed geodesics on congruence surfaces*, Forum Math. **19** (2007), 851–903.

[LS] W. Luo and P. Sarnak, *Number variance for arithmetic hyperbolic surfaces*, Commun. Math. Phys. **161** (1994), 419–432.

[Ma] J. Marklof, *On multiplicities in length spectra of arithmetic hyperbolic three-orbifolds*, Nonlinearity, **9** (1996), 517–536.

[Pe] M. Peter, *The correlation between multiplicities of closed geodesics on the modular surface*, Commun. Math. Phys. **225** (2002), 171–189.

[Ra] B. Randol, *The length spectrum of a Riemann surface is always of unbounded multiplicity*, Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), 455–456.

[Rau] N. Raulf, *Asymptotics of class numbers for progressions and for fundamental discriminants*, Forum Math. **21** (2009), 221-257.

[Ru] Z. Rudnick, *A central limit theorem for the spectrum of the modular group*, Ann. Henri Poincare. **6** (2005), 863-883.

[Sa] P. Sarnak, *Class numbers of indefinite binary quadratic forms*, J. Number Theory, **15** (1982), 229–247.

[Sc] P. Schmutz, *Arithmetic groups and the length spectrum of Riemann surfaces*, Duke Math. J., **84** (1996), 199–215.

[SS] W. Schwarz and J. Spilker, *Arithmetical functions*, London Mathematica Society LNS **184**, Cambridge University Press, 1994.

[Se] A. Selberg, *Collected Papers I*, Springer-Verlag (1989).

[Su] T. Sunada, *L-functions in geometry and some applications*, Curvature and topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985), 266–284, Lecture Notes in Math. **1201**, Springer, Berlin, 1986.

[Ta] K. Takeuchi, *A characterization of arithmetic Fuchsian groups*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 600–612.

[VZ] A. B. Venkov and P. G. Zograf, *Analogues of Artin's factorization formulas in the spectral theory of automorphic functions associated with induced representations of Fuchsian groups*, Math. USSR Izvestiya, **21**(1983), 435-443.

橋本康史
〒 814-0001 福岡市早良区百道浜 2-1-22 7 階
九州先端科学技術研究所
e-mail: hasimoto@isit.or.jp