

# VISIBLE ACTIONS ON NILPOTENT ORBITS OF HEIGHT TWO

笹木 集夢 (早稲田大学基幹理工学部数学科)

## 1. 導入と主定理

複素多様体における可視的作用という概念が小林俊行氏によって導入された [3, 4]. この概念は, 表現の重複がないという性質に統一的説明を与えるという理論において重要な役割を果たすことが明らかになってきている (cf. [4, 6]).

連結な複素多様体  $D$  にリー群  $G$  が正則に作用しているとする. この作用が強可視的であるとは, 次の条件を満たす  $D$  の実部分多様体  $S$  (この  $S$  をスライスという) および  $D$  上の反正則微分同相写像  $\sigma$  が存在するときをいう ([4, Definition 3.3.1]):

(V.1)  $G \cdot S$  は  $D$  の開集合,

(S.1)  $\sigma|_S = \text{id}_S$ ,

(S.2)  $\sigma$  は各  $G$ -軌道を保存する.

$\mathfrak{g}$  を複素半単純リー環とし,  $G_{\mathbb{C}}$  を  $\mathfrak{g}$  の随伴群とする.  $G_{\mathbb{C}}$  は  $\mathfrak{g}$  に随伴表現として作用する.  $X \in \mathfrak{g}$  を 0 でない冪零元とすると,  $\mathcal{N}_X$  を  $X$  と通る  $G_{\mathbb{C}}$  の冪零軌道を表すとする. 本講演では,  $X$  が高さ  $\max\{m \in \mathbb{N} : (\text{ad } X)^m \neq 0\} = 2$  に対する冪零軌道  $\mathcal{N}_X$  を考える.

冪零元  $X \in \mathfrak{g}$  の高さが 2 のとき  $\mathcal{N}_X$  は球多様体である ([8, Theorem 3.1]). つまり, ある  $Z \in \mathcal{N}_X$  が存在して  $G_{\mathbb{C}}$  のボレル部分群  $B_{\mathbb{C}}$  の作用による随伴軌道  $B_{\mathbb{C}} \cdot Z$  が  $\mathcal{N}_X$  の開集合となるときのことをいう. 球冪零軌道  $\mathcal{N}_X$  上の正則関数のなす空間  $\mathcal{O}(\mathcal{N}_X)$  は  $G_{\mathbb{C}}$  の表現として重複なく既約分解される [12].

本講演の主結果を述べる.  $G_u$  を  $G_{\mathbb{C}}$  のコンパクトな実型とし, 冪零軌道  $\mathcal{N}_X$  における  $G_u$  の作用を考える.

**定理 1.1.** 0 でない冪零元  $X \in \mathfrak{g}$  が高さ 2 のとき,  $G_{\mathbb{C}}$  のコンパクトな実型  $G_u$  の冪零軌道  $\mathcal{N}_X$  への作用は強可視的である.

定理 1.1 は, モーメント写像による可視的作用の誘導定理 ([4, Theorem 20]) を適用することで証明を与えることができる. また, 小林氏

---

2010 年度表現論シンポジウム (世話人: 関口次郎氏, 太田琢也氏, おおとり荘: 2010 年 11 月 9 日–12 日) における講演集.

の無重複性の伝播定理 [4, 6] と定理 1.1 を合わせることで, Panyushev の分類 [8] にある冪零軌道の一部に対して球多様体であることの別証明を与える.

本講演では, 定理 1.1 について解説する. 特に, 定理 1.1 におけるスライスの構成およびその次元について述べる (定理 5.1 参照).

## 2. 準備

本章では, 定理 1.1 の証明に必要な準備を行う.

2.1. 複素半単純リー環  $\mathfrak{g}$  に対して,  $X \in \mathfrak{g}$  を 0 でない冪零元とする. Jacobson–Morozov の定理より,  $X$  を含む  $\mathfrak{sl}_2$ -triple  $\{H, X, Y\}$  が存在する. つまり,

$$(2.1) \quad [H, X] = 2X, [H, Y] = -2Y, [X, Y] = H$$

となる半単純元  $H \in \mathfrak{g}$  および冪零元  $Y \in \mathfrak{g}$  が存在する. 半単純元  $H$  の随伴作用による  $\mathfrak{g}$  の固有空間分解を

$$(2.2) \quad \mathfrak{g} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(m).$$

で表す. ただし,

$$\mathfrak{g}(m) := \{Z \in \mathfrak{g} : [H, Z] = mZ\}$$

とする. このとき,  $m, n \in \mathbb{Z}$  に対して  $[\mathfrak{g}(m), \mathfrak{g}(n)] \subset \mathfrak{g}(m+n)$  となるので, (2.2) は  $\mathfrak{g}$  の  $\mathbb{Z}$  による次数付けを与える. また,  $X$  を含む  $\mathfrak{sl}_2$ -triple 全体は,  $G_{\mathbb{C}}$  における  $X$  の中心化群  $(G_{\mathbb{C}})_X$  の単一軌道であることから, (2.2) のもつ性質は (2.1) を満たす  $H, Y \in \mathfrak{g}$  の選び方によらない.

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  の表現論から次が成り立つ.

補題 2.1 (cf. [1, 11]). (1)  $m \geq 0$  ならば,  $[X, \mathfrak{g}(m)] = \mathfrak{g}(m+2)$ .  
 (2)  $d := \max\{m \in \mathbb{Z} : \mathfrak{g}(m) \neq \{0\}\}$  とすると,  $(\text{ad } X)^d \neq 0$  かつ  $(\text{ad } X)^{d+1} = 0$  である.

いま,

$$(2.3) \quad \text{ht}(X) := \max\{m \in \mathbb{Z} : \mathfrak{g}(m) \neq \{0\}\}$$

と定義し, これを冪零元  $X \in \mathfrak{g}$  の高さという. 任意の  $Z \in \mathcal{N}_X$  に対して  $\text{ht}(Z) = \text{ht}(X)$  が成り立つことから,  $\text{ht}(X)$  を冪零軌道  $\mathcal{N}_X$  の高さともいう.  $X \in \mathfrak{g}(2)$  であるから,  $\text{ht}(X) \geq 2$  である.

2.2. 次に,  $\mathfrak{l}$  および  $\mathfrak{p}$  を次で定義する :

$$\mathfrak{l} := \mathfrak{g}(0), \quad \mathfrak{p} := \bigoplus_{m \geq 0} \mathfrak{g}(m).$$

$\mathfrak{l}$  は  $\mathfrak{g}$  の簡約な部分リー環で,  $\mathfrak{p}$  は  $\mathfrak{l}$  をレビ部分環にもつ  $\mathfrak{g}$  の放物型部分環である .

$$\mathfrak{q} := \bigoplus_{m \geq 2} \mathfrak{g}(m)$$

とおくと,  $\mathfrak{p}$  は随伴作用によって  $\mathfrak{q}$  に作用する . 特に, 補題 2.1 の (1) より

$$(2.4) \quad \mathfrak{q} = [X, \mathfrak{p}]$$

となる .

2.3.  $P_{\mathbb{C}}$  をリー環  $\mathfrak{p}$  に対応する  $G_{\mathbb{C}}$  の放物型部分群とする .  $P_{\mathbb{C}}$  は  $\mathfrak{q}$  に作用する . (2.4) から冪零元  $X \in \mathfrak{q}$  を通る  $P_{\mathbb{C}}$ -軌道

$$(2.5) \quad \mathfrak{q}_0 := P_{\mathbb{C}} \cdot X$$

は  $\mathfrak{q}$  の開集合である .

ここで, 旗多様体  $G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$  上の  $G_{\mathbb{C}}$ -同変な正則ベクトル束  $G_{\mathbb{C}} \times_{P_{\mathbb{C}}} \mathfrak{q}$  からリー環  $\mathfrak{g}$  への写像

$$(2.6) \quad \varphi : G_{\mathbb{C}} \times_{P_{\mathbb{C}}} \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad [g, Z] \mapsto \text{Ad}(g)Z.$$

を考える . このとき, (2.5) より, 冪零軌道  $\mathcal{N}_X$  は  $G_{\mathbb{C}} \times_{P_{\mathbb{C}}} \mathfrak{q}_0$  の  $\varphi$  による像として得られる :

$$(2.7) \quad \mathcal{N}_X = \varphi(G_{\mathbb{C}} \times_{P_{\mathbb{C}}} \mathfrak{q}_0).$$

$L_{\mathbb{C}}$  を簡約リー環  $\mathfrak{l}$  に対応する  $P_{\mathbb{C}}$  のレビ部分群とし,  $L_{\mathbb{C}}$  のコンパクトな実型を  $L_u$  とする . このとき,  $G_u$ -同変な正則ベクトル束としての同型

$$\iota : G_u \times_{L_u} \mathfrak{q} \xrightarrow{\sim} G_{\mathbb{C}} \times_{P_{\mathbb{C}}} \mathfrak{q}$$

が得られる . ゆえに,  $\psi$  を

$$(2.8) \quad \psi := \varphi \circ \iota : G_u \times_{L_u} \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad [g, Z] \mapsto \text{Ad}(g)Z$$

で定めると,  $\mathcal{N}_X$  は (2.7) より

$$(2.9) \quad \mathcal{N}_X = \psi(G_u \times_{L_u} \mathfrak{q}_0).$$

と表すことができる .

### 3. $q_0$ における可視的作用

本章では, 冪零元  $X \in \mathfrak{g}$  の高さ  $\text{ht}(X) = 2$  ((2.3) 参照) と仮定する. このとき,  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}(0) + \mathfrak{g}(1) + \mathfrak{g}(2)$ ,  $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}(2)$  である. よって, (2.4) は  $\mathfrak{q} = [X, \mathfrak{l}]$  と表され,  $\mathfrak{q}$  の開集合  $q_0 = P_{\mathbb{C}} \cdot X$  は

$$(3.1) \quad q_0 = L_{\mathbb{C}} \cdot X$$

となることに注意する<sup>1</sup>.

この設定の下で,  $L_{\mathbb{C}}$  のコンパクトな実型  $L_u$  の  $q_0$  における作用を考える.

3.1.  $K_{\mathbb{C}}$  を  $L_{\mathbb{C}}$  における  $X$  の中心化群  $(L_{\mathbb{C}})_X$  とすると,  $K_{\mathbb{C}}$  は  $(G_{\mathbb{C}})_X$  のレビ部分群である.  $X$  の高さが2のとき,  $K_{\mathbb{C}}$  は次の性質をもつことが知られている.

補題 3.1 ([8, Proposition 3.3]).  $\text{ht}(X) = 2$  ならば, 複素リー群の組  $(L_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$  は対称対となる<sup>2</sup>.

補題 3.1 より,  $q_0 \simeq L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$  は複素対称空間である. ここで, 複素対称空間における可視的作用の研究については小林氏によって次の結果が示された.

補題 3.2 ([4, Theorem 11]).  $L_{\mathbb{C}}$  のコンパクトな実型  $L_u$  の複素対称空間  $L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$  における作用は強可視的である.

したがって, 次の定理が得られた.

定理 3.3. 0 でない冪零元  $X \in \mathfrak{g}$  は  $\text{ht}(X) = 2$  であるとする. このとき, 複素簡約リー群  $L_{\mathbb{C}}$  のコンパクトな実型  $L_u$  は  $q_0$  に強可視的に作用する.

3.2 節および 3.3 節では, [4, Theorem 11] の証明に沿って複素対称空間  $L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$  における  $L_u$  の強可視的作用に対するスライス  $S_0$  および反正則微分同相  $\sigma_0$  を構成する.

3.2. まず, 本節では対称空間  $L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$  への  $L_u$  の作用によるスライス  $S_0$  を構成しよう.

$\theta_0$  を  $L_{\mathbb{C}}$  上の正則な対合的自己同型で  $K_{\mathbb{C}} = L_{\mathbb{C}}^{\theta_0}$  となるものを選ぶ. また,  $L_{\mathbb{C}}$  上の反正則な対合的自己同型  $\mu_0$  で  $\theta_0\mu_0 = \mu_0\theta_0$  かつ  $L_u = L_{\mathbb{C}}^{\mu_0}$  を満たすものを選ぶことができる. このとき,

$$(3.2) \quad \sigma_0 := \theta_0\mu_0$$

<sup>1</sup> $\text{ht}(X) > 2$  のときは一致しない.

<sup>2</sup>補題 3.1 は  $\text{ht}(X) \leq 3$  で成り立つ.

は  $L_{\mathbb{C}}$  上の反正則な対合的自己同型となる．また， $\theta_0, \mu_0$  と互いに可換である．

$L_{\mathbb{C}}$  上の対合自己同型  $\theta_0, \mu_0, \sigma_0$  の微分も同じ記号を用いる． $\mathfrak{l}_0 := \mathfrak{l}^{\sigma_0}$  は  $\mathfrak{l}$  の実型となる． $\theta_0$  を  $\mathfrak{l}_0$  へ制限したものによる  $\mathfrak{l}_0$  の固有空間分解は

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}_0^{\theta_0} + \mathfrak{l}_0^{-\theta_0} = \mathfrak{l}^{\sigma_0, \theta_0} + \mathfrak{l}^{\sigma_0, -\theta_0} = \mathfrak{l}^{\mu_0, \theta_0} + \mathfrak{l}^{-\mu_0, -\theta_0}$$

となる．ただし，記号  $\mathfrak{l}^{-\mu_0, -\theta_0}$  などは

$$(3.3) \quad \mathfrak{l}^{-\mu_0, -\theta_0} := \{Z \in \mathfrak{l} : (-\mu_0)Z = (-\theta_0)Z = Z\} = \mathfrak{l}^{-\mu_0} \cap \mathfrak{l}^{-\theta_0}$$

を表すとする．

$\mathfrak{a}$  を  $\mathfrak{l}^{-\mu_0, -\theta_0}$  の極大可換部分空間とし， $A := \exp \mathfrak{a}$  とする．このとき，次のカルタン分解が得られる ([2, Theorem 4.1])：

$$(3.4) \quad L_{\mathbb{C}} = L_u AK_{\mathbb{C}}.$$

以上より，

$$S_0 := AK_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$$

と定義すると，(3.4) から

$$(3.5) \quad L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} = L_u \cdot S_0.$$

3.3. 次に， $L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$  上の反正則微分同相を  $\sigma_0$  を用いて構成しよう．

$\sigma_0$  は  $\theta_0$  と可換より  $K_{\mathbb{C}}$  は  $\sigma_0$ -安定であり，このことから， $L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$  上の反正則微分同相写像を誘導する（これを同じ記号  $\sigma_0$  で表す）：

$$\sigma_0(gK_{\mathbb{C}}) = \sigma_0(g)K_{\mathbb{C}} \quad (g \in L_{\mathbb{C}}).$$

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{l}_0^{-\theta_0}$  より  $\sigma_0|_{\mathfrak{a}} = \text{id}_{\mathfrak{a}}$  であるので， $\sigma_0|_{S_0} = \text{id}_{S_0}$  である．また， $\sigma_0$  は  $L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$  内の  $L_u$ -軌道を保存する．実際に，(3.5) より任意の  $x \in L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$  は  $g \in L_u$  および  $s \in S_0$  を用いて  $x = g \cdot s$  と表され，

$$(3.6) \quad \sigma_0(x) = \sigma_0(g) \cdot \sigma_0(s) = \sigma_0(g) \cdot s = (\sigma_0(g)g^{-1}) \cdot x.$$

$L_u$  は  $\sigma_0$ -安定より  $\sigma_0(g)g^{-1} \in L_u$  となる．よって， $\sigma_0(x) \in L_u \cdot x$  となる．

(3.5)–(3.6) により， $(S_0, \sigma_0)$  は (V.1)–(S.2) (第1章参照) を満たすことが示された．

3.4.  $\mathfrak{q}_0$  における  $L_u$  の作用に対するスライスと反正則微分同相は同型  $\pi : L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{q}_0$  を経由して以下のように定まる．

$$(3.7) \quad S := \pi(S_0) = A \cdot X$$

とおくと，(3.5) から

$$(3.8) \quad \mathfrak{q}_0 = L_u \cdot S$$

を得る．

また,  $L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$  上の反正則微分同相  $\sigma_0$  は,  $\pi$  によって  $\mathfrak{q}_0$  上の反正則微分同相 (同じ記号  $\sigma_0$  を用いる) を誘導する. つまり,

$$(3.9) \quad \sigma_0(\text{Ad}(g)X) = \text{Ad}(\sigma_0(g))X \quad (g \in L_{\mathbb{C}}).$$

この  $\sigma_0$  は  $\sigma_0|_S = \text{id}_S$  を満たし各  $L_u$ -軌道を保存することが分かる.

ゆえに,  $(S, \sigma_0)$  は  $\mathfrak{q}_0$  における  $L_u$  の強可視的作用に対して条件 (V.1)–(S.2) を満たす.

注意 3.4. (3.9) から  $\sigma_0(X) = X$  を得る.

#### 4. 定理 1.1 の証明

第 3 章では,  $L_{\mathbb{C}}$  のコンパクトな実型  $L_u$  が  $\mathfrak{q}_0$  に強可視的に作用することを示した (定理 3.3). 本章では, [4, Theorem 20] で用いられたモーメント写像による可視的作用の誘導定理を我々の設定に適用し, (2.8) で定義した  $\psi$  が,  $\mathfrak{q}_0$  における  $L_u$  の作用の強可視性を幕零軌道  $\mathcal{N}_X$  における  $G_u$  の作用へ誘導することを見る.

以下,  $G_{\mathbb{C}}$  のコンパクトな実型  $G_u$  は  $L_u$  を含むとする.

4.1. まず, (2.9) より  $\mathcal{N}_X = \psi(G_u \times_{L_u} \mathfrak{q}_0)$  であり, (3.8) から  $\mathfrak{q}_0 = L_u \cdot S$  と表されるのであった. これより,  $\mathcal{N}_X$  は

$$(4.1) \quad \mathcal{N}_X = \psi(G_u \times_{L_u} (L_u \cdot S)) = G_u \cdot S$$

と表される. ゆえに,  $\mathcal{N}_X$  における各  $G_u$ -軌道は  $S$  と交わる.

4.2. 次に,  $\mathcal{N}_X$  上の反正則微分同相を構成しよう.

$G_{\mathbb{C}}$  上の正則対合  $\theta$  を,  $\theta$  の  $L_{\mathbb{C}}$  への制限  $\theta|_{L_{\mathbb{C}}}$  が  $\theta_0$  と一致するものとする. また,  $G_{\mathbb{C}}$  上の反正則対合  $\mu$  を,  $\theta\mu = \mu\theta$  かつ  $G_u = G_{\mathbb{C}}^{\mu}$  を満たすように選ぶ. このとき,  $\sigma := \theta\mu$  は  $G_{\mathbb{C}}$  上の反正則対合であり,  $\sigma|_{L_{\mathbb{C}}} = \sigma_0$  に注意する.

ここで,  $\mathcal{N}_X$  上の反正則微分同相 (同じ記号  $\sigma$  を用いる) を

$$(4.2) \quad \sigma(\text{Ad}(g)X) := \text{Ad}(\sigma(g))X \quad (g \in G_{\mathbb{C}})$$

で定義する. このとき,  $\sigma|_{\mathfrak{q}_0} = \sigma_0$  を満たす. 特に,  $\sigma(X) = \sigma_0(X) = X$  となる (注意 3.4 参照).

4.3. 以上の準備をもって, 定理 1.1 の証明を与える.

*Proof.* (3.7) で定義した  $S$  および (4.2) で定義した  $\sigma$  が (V.1)–(S.2) を満たすことを見よう.

(V.1) が成り立つことは (4.1) で既に確かめた. また,  $S \subset \mathfrak{q}_0$  から  $\sigma|_S = \sigma_0|_S = \text{id}_S$  が得られ, (S.1) を満たす. さらに, 3.3 節の (3.6) と同様の議論を行うことで (S.2) が成り立つことも確かめられる.

以上より,  $G_u$  の  $\mathcal{N}_X$  における作用は強可視的であることが証明された.  $\square$

### 5. スライスの次元と冪零軌道の階数について

最後に, (3.7) で定めたスライス  $S$  の次元と冪零軌道  $\mathcal{N}_X$  の階数を比較しよう.

スライス  $S$  は  $S = A \cdot X$  で与えられた ((3.7) 参照) ことから,  $\dim S = \dim A$  である. さらに,  $A$  のリー環  $\mathfrak{a}$  は  $\mathfrak{l}_0^{-\theta} = \mathfrak{l}^{-\mu, -\theta}$  の極大可換部分空間であった ((3.3) 参照) ことから,  $S$  の次元は対称空間  $L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$  の分裂階数  $\text{rank}_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$  と表すことができる:

$$\dim S = \text{rank}_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}.$$

一方, 複素半単純リー群  $G_{\mathbb{C}}$  が作用する冪零軌道  $\mathcal{N}_X$  の階数  $\text{rank}(G_{\mathbb{C}} : \mathcal{N}_X)$  は, 対称空間  $L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$  の階数  $\text{rank} L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$  に等しいことが知られている ([8, Corollary 3.3]):

$$\text{rank}(G_{\mathbb{C}} : \mathcal{N}_X) = \text{rank} L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}.$$

複素対称空間の階数と分裂階数は一致するので, 次の定理が成り立つことが明らかになった.

**定理 5.1.**  $X \in \mathfrak{g}$  を 0 でない高さ 2 の冪零元とする.  $G_{\mathbb{C}}$  のコンパクトな実型  $G_u$  の冪零軌道  $\mathcal{N}_X$  への強可視的作用 (定理 1.1 参照) に対し, スライス  $S$  として,  $S$  の次元と  $G_{\mathbb{C}}$  が作用する  $\mathcal{N}_X$  の階数が一致するものを選ぶことができる.

### REFERENCES

- [1] D. Collingwood, W. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.
- [2] M. Flensted-Jensen, Spherical functions of a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case, *J. Funct. Anal.* **30** (1978), 106–146.
- [3] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of  $GL(n)$ , visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta. Appl. Math.* **81** (2004), 129–146.
- [4] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.
- [5] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform. Groups* **12** (2007), 671–694.

- [6] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles, *preprint*, arXiv: math.RT/0607004.
- [7] D. Panyushev, Complexity and rank of homogeneous spaces, *Geom. Dedicata* **34** (1990), 249–269.
- [8] D. Panyushev, Complexity and nilpotent orbits, *Manuscripta Math.* **83** (1994), 223–237.
- [9] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* (2009) 3445–3466.
- [10] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* (2010), doi: 10.1093/imrn/rnq100.
- [11] T. A. Springer, R. Steinberg, Conjugacy classes, in *Seminar on algebraic groups and related finite groups*, 167–266, Lecture Notes in Mathematics **131**, Springer–Verlag, Berlin, 1970.
- [12] É. B. Vinberg, B. N. Kimelfeld, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups, *Funct. Anal. Appl.*, **12** (1978), 168–174.
- [13] É. B. Vinberg, Complexity of actions of reductive groups, *Func. Anal. Appl.* **20** (1986), 1–11.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE AND ENGINEERING,  
WASEDA UNIVERSITY, OKUBO, SHINJUKU-KU, TOKYO, 169-8555 JAPAN.

*E-mail address:* atsumu@aoni.waseda.jp