連結半単純コンパクトリー群に付随するゼータ関数について

小森 靖[1] (立教大学)

1　はじめに

Witten [14] は二次元コンパクト多様体上の連結半単純コンパクトリー群による量子ゲージ理論の研究に際し, 対応するリー群の有限次元既約表現の次元に関するディリクレ級数が現れることを発見した. さらに多様体が向き付け可能な場合, その値が有理数であることを見出した. 後に Zagier [15] は単純リー代数に対し, 一変数関数として定義したディリクレ級数を Witten ゼータ関数と名づけ, 純粋な解析数論的考察からも有理数性が従うことを述べている.

このゼータ関数について Zagier [15] のほか, 様々な研究がなされている [1, 12, 13]. 本稿では Witten ゼータ関数の拡張を考え, それに付随する周期的 Bernoulli 関数を構成することによって特殊値を記述する方法を紹介する [2–10]. 本稿は名古屋大松本氏, 首都大津村氏との共同研究に基づく.

2　ルート系のゼータ関数

Witten によれば, 二次元コンパクト多様体 Σ 上の連結半単純コンパクトリー群 G による量子ゲージ理論の分配関数 $Z_\Sigma(\tau)$ は以下で与えられる:

$$Z_\Sigma(\tau) = C\sum_\phi \frac{e^{-\tau c_2(\phi)/2}}{(\dim\phi)^{2g-2}}. \tag{1}$$

ここで C はある定数, g は Σ の種数, $c_2(\phi)$ は表現の二次 Casimir 作用素の値である. また, ϕ は G の有限次元既約表現全体を渡る. $Z_\Sigma(0)$ は平坦接続のモジュライ空間の体積を表しており, Witten の volume formula と呼ばれている. 特に G が単連結な場合を Zagier は Witten ゼータ関数

$$\zeta_W(s;G) = \sum_\phi \frac{1}{(\dim\phi)^s} \tag{2}$$

として定式化した. この節ではまず単連結の場合に多変数化を導入し, 特殊値やそれらの間の関係式について述べる.

[1]e-mail: komori@rikkyo.ac.jp

以下で用いるルート系の記号をまとめておく.
V: r 次元内積空間 $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
$\Delta=\{\alpha,\beta,\ldots\}\subset V$: ルート系.
σ_α: α に直交する超平面 H_α に関する鏡映.
W: σ_α によって生成されるワイル群.
$\alpha^\vee$: コルート $(=2\alpha/\langle\alpha,\alpha\rangle$. $\alpha^{\vee\vee}=\alpha)$.
$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$: 基本ルート.
Δ_+: 正ルート.
P_+: 支配的ウエイト.
ρ: ワイルベクトル $(\rho=\lambda_1+\cdots+\lambda_r)$.

G の有限次元既約表現とその表現の最高ウエイト $\lambda\in P_+$ との一対一対応, およびワイルの次元公式

$$\dim\phi=\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{\langle\alpha^\vee,\lambda+\rho\rangle}{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle} \tag{3}$$

によって Witten ゼータ関数は以下の表示を持つことがわかる:

$$\zeta_W(s;G)=\sum_\phi\frac{1}{(\dim\phi)^s}=K^s\sum_{\lambda\in P_+}\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{1}{\langle\alpha^\vee,\lambda+\rho\rangle^s}. \tag{4}$$

ここで $K=\prod_{\alpha\in\Delta_+}\langle\alpha^\vee,\rho\rangle$. この表示をもとに, 多変数化として以下のゼータ関数を定義する.

定義 1. ルート系のゼータ関数 (K-Matsumoto-Tsumura 2006): $\mathbf{s}=(s_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}\in\mathbb{C}^{|\Delta_+|}$, $\mathbf{y}\in V$ に対し,

$$\zeta(\mathbf{s},\mathbf{y};\Delta)=\sum_{\lambda\in P_+}e^{2\pi i\langle\mathbf{y},\lambda+\rho\rangle}\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{1}{\langle\alpha^\vee,\lambda+\rho\rangle^{s_\alpha}}. \tag{5}$$

例 1. ランク 1, および 2 の場合におけるルート系のゼータ関数は以下で与えられる:

$$\zeta(\mathbf{s},\mathbf{y};A_1)=\sum_{m=1}^\infty\frac{e^{2\pi imy}}{m^{s_1}}, \tag{6}$$

$$\zeta(\mathbf{s},\mathbf{y};A_1\times A_1)=\sum_{m,n=1}^\infty\frac{e^{2\pi i(my_1+ny_2)}}{m^{s_1}n^{s_2}}, \tag{7}$$

$$\zeta(\mathbf{s},\mathbf{y};A_2)=\sum_{m,n=1}^\infty\frac{e^{2\pi i(my_1+ny_2)}}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}}, \tag{8}$$

$$\zeta(\mathbf{s},\mathbf{y};C_2)=\sum_{m,n=1}^\infty\frac{e^{2\pi i(my_1+ny_2)}}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}(m+2n)^{s_4}}, \tag{9}$$

$$\zeta(\mathbf{s},\mathbf{y};G_2)=\sum_{m,n=1}^\infty\frac{e^{2\pi i(my_1+ny_2)}}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}(m+2n)^{s_4}(m+3n)^{s_5}(2m+3n)^{s_6}}. \tag{10}$$

変数 $\mathbf{s}=(s_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}$ を $s_\alpha=s_{-\alpha}$ としてルート全体上の変数 $(s_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ に拡張し, ワイル群の作用を $(w\mathbf{s})_\alpha=s_{w^{-1}\alpha}$ と定義する. V には自然にワイル群が作用していることに注意する.

定理 1. $\mathbf{s}=\mathbf{k}=(k_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}\in\mathbb{Z}_{\geq 2}^{|\Delta_+|}$ に対して以下が成り立つ:

$$\begin{aligned}\sum_{w\in W}\Bigl(\prod_{\alpha\in\Delta_+\cap w\Delta_-}(-1)^{k_\alpha}\Bigr)\zeta(w^{-1}\mathbf{k},w^{-1}\mathbf{y};\Delta)&\\ =(-1)^{|\Delta_+|}\mathcal{P}(\mathbf{k},\mathbf{y};\Delta)\Bigl(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{(2\pi i)^{k_\alpha}}{k_\alpha!}\Bigr)&. \end{aligned}\tag{11}$$

ここで $\mathcal{P}(\mathbf{k},\mathbf{y};\Delta)$ は次節で定義する多重周期的ベルヌーイ関数である.

例 2. A_1 型のルート系では $W=\{\mathrm{id},\sigma_\alpha\}$ であることに注意すると, 定理 1 は古典的な Lerch ゼータ関数

$$\varphi(k,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi imy}}{m^k}\tag{12}$$

に対する関数関係式

$$\varphi(k,y)+(-1)^k\varphi(k,-y)=-B_k(\{y\})\frac{(2\pi i)^k}{k!}\tag{13}$$

($B_k(y)$ はベルヌーイ多項式) を表している. したがって一般のルート系ではこの自然な拡張になっていることがわかる.

定理 1 から直ちに以下が得られる:

定理 2. ワイル群不変な $\mathbf{k}=(k_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}\in(2\mathbb{Z}_{\geq 1})^{|\Delta_+|}$ (すべての $w\in W$ に対して $w^{-1}\mathbf{k}=\mathbf{k}$) に対して以下が成り立つ:

$$\zeta(\mathbf{k},\mathbf{0};\Delta)=\frac{(-1)^{|\Delta_+|}}{|W|}\mathcal{P}(\mathbf{k},\mathbf{0};\Delta)\Bigl(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{(2\pi i)^{k_\alpha}}{k_\alpha!}\Bigr)\in\mathbb{Q}\pi^{\sum_{\alpha\in\Delta_+}k_\alpha}.\tag{14}$$

例 3. $\mathbf{k}=(k)_{\alpha\in\Delta_+}$ $(k\in 2\mathbb{Z}_{\geq 1})$ とおけば, Witten ゼータ関数に帰着する:

$$\begin{aligned}\zeta((2,2,2,2),\mathbf{0};C_2)&=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2(m+n)^2(m+2n)^2}\\&=\frac{(-1)^4}{2^2 2!}\frac{1}{604800}\Bigl(\frac{(2\pi i)^2}{2!}\Bigr)^4\\&=\frac{1}{302400}\pi^8.\end{aligned}\tag{15}$$

例 4. simply-laced でないルート系では, さらに以下のような場合も計算で

きる:

$$\begin{aligned}\zeta((2,4,4,2),\mathbf{0};C_2) &= \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n^4(m+n)^4(m+2n)^2} \\ &= \frac{(-1)^4}{2^2 2!}\frac{53}{1513512000}\left(\frac{(2\pi i)^2}{2!}\right)^2\left(\frac{(2\pi i)^4}{4!}\right)^2 \\ &= \frac{53}{6810804000}\pi^{12}.\end{aligned} \tag{16}$$

3　母関数

定理 1 で現れた多重周期的ベルヌーイ関数 $\mathcal{P}(\mathbf{k},\mathbf{y};\Delta)$ を定義する．　まず記号を準備する．$\mathscr{V}$ を基底 $\mathbf{V}\subset\Delta_+$ からなる集合とし，$\mathbf{V}^*=\{\mu_\beta^{\mathbf{V}}\}_{\beta\in\mathbf{V}}$ を $\mathbf{V}^\vee=\{\beta^\vee\}_{\beta\in\mathbf{V}}$ の双対基底とする．また $Q^\vee=\bigoplus_{i=1}^r\mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ をコルート格子，$L(\mathbf{V}^\vee)=\bigoplus_{\beta\in\mathbf{V}}\mathbb{Z}\beta^\vee$ を $\mathbf{V}^\vee$ で張られる $Q^\vee$ の部分格子とすると $|Q^\vee/L(\mathbf{V}^\vee)|<\infty$ となる．さらに小数部分の高次元化として以下を定義する: まず $\phi\in V$ をひとつ固定し，

$$\{\mathbf{y}\}_{\mathbf{V},\beta}=\begin{cases}\{\langle\mathbf{y},\mu_\beta^{\mathbf{V}}\rangle\} & (\langle\phi,\mu_\beta^{\mathbf{V}}\rangle>0),\\ 1-\{-\langle\mathbf{y},\mu_\beta^{\mathbf{V}}\rangle\} & (\langle\phi,\mu_\beta^{\mathbf{V}}\rangle<0)\end{cases} \tag{17}$$

とおく．ここで右辺の $\{\cdot\}$ は通常の意味での小数部分 $x-[x]$ を表す．A_1 型のときは $\phi=\alpha_1^\vee$ とする．

定義 2 (母関数)**.** $\mathbf{t}=(t_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}$ に対して

$$\begin{aligned}F(\mathbf{t},\mathbf{y};\Delta)=\sum_{\mathbf{V}\in\mathscr{V}}&\Bigl(\prod_{\gamma\in\Delta_+\setminus\mathbf{V}}\frac{t_\gamma}{t_\gamma-\sum_{\beta\in\mathbf{V}}t_\beta\langle\gamma^\vee,\mu_\beta^{\mathbf{V}}\rangle}\Bigr)\\ &\times\frac{1}{|Q^\vee/L(\mathbf{V}^\vee)|}\sum_{q\in Q^\vee/L(\mathbf{V}^\vee)}\Bigl(\prod_{\beta\in\mathbf{V}}\frac{t_\beta\exp(t_\beta\{\mathbf{y}+q\}_{\mathbf{V},\beta})}{e^{t_\beta}-1}\Bigr).\end{aligned} \tag{18}$$

$F(\mathbf{t},\mathbf{y};\Delta)$ は，定義の際に選んだ ϕ に依存しないこと，および変数 $\mathbf{t}$ に関して原点近傍で正則であり，テイラー展開可能であることが示される．このテイラー展開の係数を用いて多重周期的ベルヌーイ関数を定義する．

定義 3 (多重周期的ベルヌーイ関数)**.**

$$F(\mathbf{t},\mathbf{y};\Delta)=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{|\Delta_+|}}\mathcal{P}(\mathbf{k},\mathbf{y};\Delta)\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{t_\alpha^{k_\alpha}}{k_\alpha!}. \tag{19}$$

例 5. ルート系が A_1 型の場合，母関数 $F(\mathbf{t},\mathbf{y};\Delta)$ は通常の周期的ベルヌーイ関数の母関数となる．

$$F(t,y)=\frac{te^{t\{y\}}}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k(\{y\})\frac{t^k}{k!}. \tag{20}$$

よって定義 2, 3 は自然なルート系的拡張を与えていることがわかる．

4　リー群に付随するゼータ関数

もともと Witten ゼータ関数は単連結とは限らないコンパクト半単純連結リー群 G に対して定義されるものであった．ここでは単連結の場合の結果を用いて単連結でない場合を記述する方法を与える．この方法は数論におけるディリクレ算術級数定理と同じ考え方に基づく．

G を単連結とは限らないコンパクト半単純連結リー群とし，$\widetilde{G}$ を G の普遍被覆群 ($G \simeq \widetilde{G}/\pi_1(G)$) とする．また L を G のウエイト格子とすると $Q \subset L \subset P$ を満たしており，$P/L \simeq \pi_1(G)$ となっている．このとき，$L_+ = L \cap P_+$ とコンパクト半単純連結リー群 G の有限次元既約表現全体が対応する．

定義 4.

$$\zeta(\mathbf{s},\mathbf{y};G) = \zeta(\mathbf{s},\mathbf{y};L;\Delta) = \sum_{\lambda \in L_+} e^{2\pi i \langle \mathbf{y}, \lambda+\rho\rangle} \prod_{\alpha\in\Delta_+} \frac{1}{\langle \alpha^\vee, \lambda+\rho\rangle^{s_\alpha}}. \tag{21}$$

単連結とは限らない場合のゼータ関数 $\zeta(\mathbf{s},\mathbf{y};G)$ は単連結の場合のゼータ関数 $\zeta(\mathbf{s},\mathbf{y};\Delta)$ で展開することができる．

補題 3.

$$\zeta(\mathbf{s},\mathbf{y};G) = \zeta(\mathbf{s},\mathbf{y};L;\Delta) = \sum_{\mu\in P^\vee/Q^\vee} \widehat{\iota_{L+\rho}}(\mu)\zeta(\mathbf{s},\mathbf{y}+\mu;\Delta). \tag{22}$$

ここで $\widehat{\iota_{L+\rho}} : P^\vee/Q^\vee \to \mathbb{C}$ は $L+\rho$ の定義関数のフーリエ変換で

$$\widehat{\iota_{L+\rho}}(\mu) = \frac{1}{|P/Q|} \sum_{\lambda\in(L+\rho)/Q} e^{-2\pi i\langle \mu,\lambda\rangle}. \tag{23}$$

例 6. A_1 型で $L=Q$ とすると

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(2m+1)y}}{(2m+1)^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{e^{2\pi i(m+1)y}}{(m+1)^s} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-1}{2}\frac{e^{2\pi i(m+1)(y+\frac{1}{2})}}{(m+1)^s}. \tag{24}$$

フーリエ係数 $\widehat{\iota_{L+\rho}}$ を具体的に求める．$L^* = \mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z})$ とし

$$\delta_{L^*/Q^\vee}(\mu) = \begin{cases} 1 & (\mu \in L^*/Q^\vee), \\ 0 & (\mu \notin L^*/Q^\vee) \end{cases} \tag{25}$$

とおく．

補題 4. $\mu \in P^\vee/Q^\vee$ に対して

$$\widehat{\iota_{L+\rho}}(\mu) = \frac{(-1)^{\langle \mu, 2\rho\rangle}}{|\pi_1(G)|}\delta_{L^*/Q^\vee}(\mu) \in \frac{\{-1,0,1\}}{|\pi_1(G)|} \subset \mathbb{Q}. \tag{26}$$

$P/L \simeq L^*/Q^\vee \simeq \pi_1(G)$ に注意すると G が単連結とは限らない場合のゼータ関数の特殊値の母関数として以下が得られる.

定義 5 (母関数と多重周期的ベルヌーイ関数)**.**

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{t},\mathbf{y};G) &= \frac{1}{|\pi_1(G)|}\sum_{\mu\in\pi_1(G)}(-1)^{\langle\mu,2\rho\rangle}F(\mathbf{t},\mathbf{y}+\mu;\widetilde{G}) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{|\Delta_+|}}\mathcal{P}(\mathbf{k},\mathbf{y};G)\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{t_\alpha^{k_\alpha}}{k_\alpha!}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

ここで

$$
F(\mathbf{t},\mathbf{y};\widetilde{G}) = F(\mathbf{t},\mathbf{y};\Delta). \tag{28}
$$

定理 5. ワイル群不変な $\mathbf{k}=(k_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}\in(2\mathbb{Z}_{\geq 1})^{|\Delta_+|}$ (すべての　$w\in W$ に対して $w^{-1}\mathbf{k}=\mathbf{k}$) と $\nu\in P^\vee/Q^\vee$ (G の中心) に対して以下が成り立つ:

$$
\zeta(\mathbf{k},\nu;G) = \frac{(-1)^{|\Delta_+|}}{|W|}\mathcal{P}(\mathbf{k},\nu;G)\left(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{(2\pi i)^{k_\alpha}}{k_\alpha!}\right)\in\mathbb{Q}\pi^{\sum_{\alpha\in\Delta_+}k_\alpha}. \tag{29}
$$

例 7.

$$
\begin{aligned}
\zeta(\mathbf{2},\mathbf{0};PU(3)) &= \zeta(\mathbf{2},\mathbf{0};Q;A_2) \\
&= \sum_{\substack{m,n=1 \\ m\equiv n \pmod 3}}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2(m+n)^2} \\
&= \frac{(-1)^3}{3!}\frac{187}{918540}\left(\frac{(2\pi i)^2}{2!}\right)^3 \\
&= \frac{187}{688905}\pi^6.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

5　EZ 多重ゼータ関数との関係

Euler-Zagier 多重ゼータ関数は現在活発に研究がなされている多重ゼータ関数のクラスの一つである. ルート系のゼータ関数は EZ 多重ゼータ関数を含んでおり, またいくつかの特殊値もこの枠内で扱えることを述べたい. まず定義を述べる.

定義 6 (Euler-Zagier 多重ゼータ関数)**.**

$$
\zeta_{EZ,r}(s_1,s_2,\ldots,s_r) = \sum_{m_1>m_2>\cdots>m_r>0}\frac{1}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}\cdots m_r^{s_r}}. \tag{31}
$$

この EZ 多重ゼータ関数がどのように含まれるか説明する. C_2, C_3 型ルート系のゼータ関数は具体的に以下で与えられる.

$$\zeta(\mathbf{s};C_2)=\sum_{l,m=1}^{\infty}\frac{1}{(l+m)^{s_1}l^{s_2}}\cdot\frac{1}{m^{s_3}(2l+m)^{s_4}}, \tag{32}$$

$$\zeta(\mathbf{s};C_3)=\sum_{l,m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(l+m+n)^{s_1}(l+m)^{s_2}l^{s_3}} \tag{33}$$

$$\cdot\frac{1}{m^{s_4}n^{s_5}(m+n)^{s_6}(m+2n)^{s_7}(l+m+2n)^{s_8}(l+2m+2n)^{s_9}}. \tag{34}$$

EZ 多重ゼータ関数からはみ出す変数 s_α を 0 とおくと, 以下が得られる.

$$\zeta(\mathbf{s};C_2)=\sum_{l,m=1}^{\infty}\frac{1}{(l+m)^{s_1}l^{s_2}}=\zeta_{EZ,2}(s_1,s_2), \tag{35}$$

$$\zeta(\mathbf{s};C_3)=\sum_{l,m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(l+m+n)^{s_1}(l+m)^{s_2}l^{s_3}}=\zeta_{EZ,3}(s_1,s_2,s_3). \tag{36}$$

一般の r について, C_r 型ルート系の正コルートの集合が

$$\Delta_+^\vee=(\Delta_+^\vee)^{\mathrm{long}}\cup(\Delta_+^\vee)^{\mathrm{short}} \tag{37}$$

$$(\Delta_+^\vee)^{\mathrm{short}}=\{\alpha_1^\vee+\cdots+\alpha_r^\vee,\quad \alpha_1^\vee+\cdots+\alpha_{r-1}^\vee,\quad \ldots,\quad \alpha_{r-1}^\vee+\alpha_r^\vee,\quad \alpha_r^\vee\} \tag{38}$$

と与えられるので, 長いコルートに対応する変数を $s_\alpha=0$ とすると

$$\zeta(\mathbf{s},\mathbf{0};\Delta)=\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_r>0}\frac{1}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}\cdots m_r^{s_r}} \tag{39}$$

が得られる.

一般に EZ 多重ゼータ関数は様々なルート系で実現できるが, C_r 型ルート系ではワイル群 W の作用で閉じているという点が重要である.

$$W(\Delta_+^\vee)^{\mathrm{long}}=(\Delta_+^\vee)^{\mathrm{long}}, \tag{40}$$

$$W(\Delta_+^\vee)^{\mathrm{short}}=(\Delta_+^\vee)^{\mathrm{short}}. \tag{41}$$

C_r 型ルート系で長いコルートに対応する変数に対して $k_\alpha=0$ とおき, 特殊値が求めたい. しかし 0 を含む場合, 定理 2 は適用できない. 以下母関数を少し変形することによって定理 2 と同様な方法で特殊値を求めることができることを説明する.

$\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{r}y_i\alpha_i^\vee$ とおく. $\alpha\in\Delta_+$ に対して

$$\partial_{\mathbf{v}}=\sum_{i=1}^{r}v_i\frac{\partial}{\partial y_i},\qquad \mathfrak{D}_\alpha=\left.\frac{\partial}{\partial t_\alpha}\right|_{t_\alpha=0}\partial_{\alpha^\vee} \tag{42}$$

とおく.

定義 7. $A \subset \Delta_+$ に対して $\mathbf{t}_{\Delta_+\setminus A} = \{t_\alpha\}_{\alpha\in\Delta\setminus A}$ とおく.

$$F_{\Delta_+\setminus A}(\mathbf{t}_{\Delta_+\setminus A}, \mathbf{y}; \Delta) = \Bigl(\Bigl(\prod_{\alpha\in A} \mathfrak{D}_\alpha\Bigr) F\Bigr)(\mathbf{t}, \mathbf{y}; \Delta)$$
$$= \sum_{\mathbf{k}_A \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{|\Delta_+\setminus A|}} \mathcal{P}_{\Delta_+\setminus A}(\mathbf{k}_{\Delta_+\setminus A}, \mathbf{y}; \Delta) \prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus A} \frac{t_\alpha^{k_\alpha}}{k_\alpha!}. \tag{43}$$

定理 6. $\mathbf{s} = \mathbf{k} = (k_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}$, $k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ $(\alpha \in \Delta_+ \setminus A)$, $k_\alpha = 0$ $(\alpha \in A)$ に対して (級数が収束する限り) 以下が成り立つ:

$$\sum_{w\in W} \Bigl(\prod_{\alpha\in\Delta_+\cap w\Delta_-} (-1)^{k_\alpha} \Bigr) \zeta(w^{-1}\mathbf{k}, w^{-1}\mathbf{y}; \Delta)$$
$$= (-1)^{|\Delta_+|} \mathcal{P}_{\Delta_+\setminus A}(\mathbf{k}_{\Delta_+\setminus A}, \mathbf{y}; \Delta) \Bigl(\prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus A} \frac{(2\pi i)^{k_\alpha}}{k_\alpha!} \Bigr). \tag{44}$$

例 8. C_2 型ルート系, 長いコルートに対応する変数について $k_\alpha = 0$ とする.

$$F(t_1, t_2, y_1, y_2) = 1 + \frac{t_1 t_2 e^{\{y_2\} t_1}}{(e^{t_1} - 1)(t_1 - t_2)} + \frac{t_1 t_2 e^{\{y_2\} t_2}}{(e^{t_2} - 1)(-t_1 + t_2)}$$
$$+ \frac{t_1 t_2 e^{(1-\{y_1-y_2\})t_1 + \{y_1\} t_2}}{(e^{t_1} - 1)(e^{t_2} - 1)} - \frac{t_1 t_2 e^{(1-\{2y_1-y_2\})t_1}}{(e^{t_1} - 1)(t_1 + t_2)}$$
$$- \frac{t_1 t_2 e^{\{2y_1-y_2\} t_2}}{(e^{t_2} - 1)(t_1 + t_2)}$$
$$= \sum_{k_1,k_2=1}^{\infty} \mathcal{P}(k_1, k_2, y_1, y_2) \frac{t_1^{k_1} t_2^{k_2}}{k_1! k_2!}.$$

これを用いると特殊値として

$$\begin{aligned}
\zeta_{EZ,2}(4,4) &= \frac{(-1)^4}{8} \mathcal{P}(4,4,0,0) \frac{(2\pi i)^{4+4}}{4!4!} \\
&= \frac{(-1)^4}{8} \frac{1}{6300} \frac{(2\pi i)^{4+4}}{4!4!} \\
&= \frac{\pi^8}{113400}
\end{aligned} \tag{45}$$

などや, 特殊値の間の関係式

$$\begin{aligned}
\zeta_{EZ,2}(4,2) + \zeta_{EZ,2}(2,4) &= \frac{(-1)^4}{4} \mathcal{P}(4,2,0,0) \frac{(2\pi i)^{4+2}}{4!2!} \\
&= \frac{(-1)^4}{4} \Bigl(-\frac{1}{420}\Bigr) \frac{(2\pi i)^{4+2}}{4!2!} \\
&= \frac{\pi^6}{1260},
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{EZ,2}(6,4) + \zeta_{EZ,2}(4,6) &= \frac{(-1)^4}{4} \mathcal{P}(6,4,0,0) \frac{(2\pi i)^{6+4}}{6!4!} \\
&= \frac{(-1)^4}{4} \Bigl(-\frac{1}{13860}\Bigr) \frac{(2\pi i)^{6+4}}{6!4!} \\
&= \frac{\pi^{10}}{935550}
\end{aligned} \tag{47}$$

などが求められる．

奇数を含む場合もこの方法の拡張で捉えられる．

参考文献

[1] Gunnells, P. E., and Sczech, R. "Evaluation of Dedekind sums, Eisenstein cocycles, and special values of L-functions." *Duke Math. J.* 118 (2003): 229–260.

[2] Komori, Y., Matsumoto, K., and Tsumura, H. "Zeta-functions of root systems." In *The Conference on L-functions*, L. Weng and M. Kaneko (eds.), World Scientific, 2007, pp. 115–140.

[3] Komori, Y., Matsumoto, K., and Tsumura, H. "Zeta and L-functions and Bernoulli polynomials of root systems." *Proc. Japan Acad.*, Series A, 84 (2008): 57–62.

[4] Komori, Y., Matsumoto, K., and Tsumura, H. "Functional relations for zeta-functions of root systems." In *Number Theory: Dreaming in Dreams - Proceedings of the 5th China-Japan Seminar*, T. Aoki, S. Kanemitsu and J. -Y. Liu (eds.), World Scientific Publ, 2010, pp.135–183.

[5] Komori, Y., Matsumoto, K., and Tsumura, H. "On multiple Bernoulli polynomials and multiple L-functions of root systems." *Proc. London Math. Soc.* 100 (2010): 303–347.

[6] Komori, Y., Matsumoto, K., and Tsumura, H. "An introduction to the theory of zeta-functions of root systems." In *Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-functions*, G. Bhowmik, K. Matsumoto and H. Tsumura (eds.), MSJ Memoirs, Vol. 21, Mathematical Society of Japan, 2010, pp. 115–140.

[7] Komori, Y., Matsumoto, K., and Tsumura, H. "On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras II." *J. Math. Soc. Japan* 62 (2010): 355–394.

[8] Komori, Y., Matsumoto, K., and Tsumura, H. "On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras III." To appear in *The Proceedings of the Conference on Multiple Dirichlet Series and Applications to Automorphic Forms (Edinburgh, 2008)*, D. Bump et al. (eds.), arXiv:0907.0955.

[9] Komori, Y., Matsumoto, K., and Tsumura, H. "On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras IV." To appear in *Glasgow Math. J.*

[10] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, *Zeta-functions of weight lattices of compact semisimple connected Lie groups*, preprint, submitted for publication.

[11] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, *Multiple zeta values and zeta-functions of root systems*, preprint, submitted for publication.

[12] Subbarao, M. V., and Sitaramachandrarao, R. "On some infinite series of L. J. Mordell and their analogues." *Pacific J. Math.* 119 (1985): 245–255.

[13] Szenes, A. "Iterated residues and multiple Bernoulli polynomials." *Internat. Math. Res. Notices*, 18 (1998): 937–958.

[14] Witten, E. "On quantum gauge theories in two dimensions." *Comm. Math. Phys.* 141 (1991): 153–209.

[15] Zagier, D. "Values of zeta functions and their applications." In *First European Congress of Mathematics* Vol. II, A. Joseph et al. (eds.), Progr. Math. 120, Birkhäuser, 1994, pp. 497–512.