

Deligne's category $\underline{\mathcal{R}ep}(\mathfrak{S}_t)$ and wreath products of braided tensor categories

森 真樹*

1 Introduction

Deligne が [Del] で導入した圏 $\underline{\mathcal{R}ep}(\mathfrak{S}_t)$ は、対称群 $\mathfrak{S}_d$ の表現圏 $\mathcal{R}ep(\mathfrak{S}_d)$ の「 d が自然数でない場合の」構造を反映したものである。ここではこの構成を一般化し、任意の braided tensor category $\mathcal{C}$ に対し新たな braided tensor category $\mathcal{S}_t(\mathcal{C})$ を定義する。 $\mathcal{S}_t$ は関手としての性質を持ち、tensor functor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を $\mathcal{S}_t(F): \mathcal{S}_t(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{S}_t(\mathcal{D})$ に写す。前述の Deligne の圏 $\underline{\mathcal{R}ep}(\mathfrak{S}_t)$ は、自明な圏にこの構成を適用して得られる。

2 Representation theory of wreath products

2.1 Notations about algebras

$\mathbb{k}$ は可換環とし、algebra はすべて $\mathbb{k}$ 上のものを扱う。bialgebra A の積、単位射、余積、余単位射はそれぞれ $\mu_A, \eta_A, \Delta_A, \epsilon_A$ で表す。さらに A が Hopf algebra であるときには、その対合射を γ_A と書く。演算はしばしば $\mu_A(a \otimes b) = a \cdot b$, $\eta_A(1) = 1_A$, $\Delta_A(a) = \sum a^{(1)} \otimes a^{(2)}$ と略記される。

A を bialgebra とする。 A -module の圏の充満部分圏であって、 $\mathbb{k}$ -module として有限生成かつ射影的な object を集めたものを $\mathcal{R}ep(A)$ とおく。 Δ_A により $V, W \in \mathcal{R}ep(A)$ に対し $V \otimes W \in \mathcal{R}ep(A)$ が定義される。また ϵ_A を用いて $\mathbb{k}$ に自明な A -module の構造を与えたものを $1_A \in \mathcal{R}ep(A)$ と書く。さらに A が Hopf algebra であれば、 γ_A により $V^* := \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k}) \in \mathcal{R}ep(A)$ が定まる。同じ $\mathbb{k}$ -module に γ_A^{-1} で作用を入れたものを ${}^*V \in \mathcal{R}ep(A)$ と書くと、自然に ${}^*(V^*) \simeq V \simeq ({}^*V)^*$ となる。

A が余可換であれば、テンソル積の順序を入れ替える射 $P_{VW}: V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V; v \otimes w \mapsto w \otimes v$ は $\mathcal{R}ep(A)$ での同型射となる。そうでない場合、この射 P_{VW} は準同型にはならない。しかし例えば量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ には universal R -matrix と呼ばれる $U_q(\mathfrak{g}) \widehat{\otimes} U_q(\mathfrak{g})$ (テンソル積の適当な完備化) の可逆元 R が存在し、 $\sigma_{VW} := P_{VW} \circ R|_{V \otimes W}$ が $U_q(\mathfrak{g})$ -module の同型 $V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V$ を与える。この σ は P と同様 $\sigma_{V \otimes W} \circ (\varphi \otimes \psi) = (\psi \otimes \varphi) \circ \sigma_{VW}$ などの性質を持ち、これにより $\mathcal{R}ep(U_q(\mathfrak{g}))$ には braided tensor category と呼ばれる構造 [BK] が入る。以下 bialgebra A と $\mathcal{R}ep(A)$ にはこのような braiding isomorphism σ が一つ与えられているものとする。明示的には書かれていないが、 $\mathcal{R}ep(A)$ の braided tensor category としての構造は σ の取り方に依存することを喚起しておく。もちろん A が余可換なら $\sigma := P$ が一つの braiding isomorphism を与える。

* 東京大学大学院数理科学研究科

2.2 Wreath products of bialgebras

$d \in \mathbb{N}$ を固定する。bialgebra A に対し、 d 次対称群 $\mathfrak{S}_d$ との環積 $A_d = A \wr \mathfrak{S}_d$ が以下で定義される：
 $\mathbb{k}$ -module としては $A_d = A^{\otimes d} \otimes \mathbb{k}[\mathfrak{S}_d]$ であり、bialgebra の演算を

$$\begin{aligned} (a_1 \otimes \cdots \otimes a_d \otimes g) \cdot (b_1 \otimes \cdots \otimes b_d \otimes h) &= a_1 \cdot b_{g^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a_d \cdot b_{g^{-1}(d)} \otimes gh \\ 1_{A_d} &= 1_A \otimes \cdots \otimes 1_A \otimes e \\ \Delta_{A_d}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_d \otimes g) &= \sum (a_1^{(1)} \otimes \cdots \otimes a_d^{(1)} \otimes g) \otimes (a_1^{(2)} \otimes \cdots \otimes a_d^{(2)} \otimes g) \\ \epsilon_{A_d}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_d \otimes g) &= \epsilon_A(a_1) \cdots \epsilon_A(a_d) \end{aligned}$$

$$(a_j, b_j \in A, g, h \in \mathfrak{S}_d, e \in \mathfrak{S}_d \text{ は単位元})$$

によって定める。加えて A が Hopf algebra ならば、

$$\gamma_{A_d}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_d \otimes g) = \gamma_A(a_{g(1)}) \otimes \cdots \otimes \gamma_A(a_{g(d)}) \otimes g^{-1}$$

により A_d は Hopf algebra となる。 A が群環のときは A_d は群の環積の群環に他ならない。

$d = d_1 + \cdots + d_l$ のとき、 $A_{d_1} \otimes \cdots \otimes A_{d_l}$ は自然に A_d の部分 bialgebra (Hopf algebra) として埋め込める。
 これを用いて、 $V \in \mathcal{R}ep(A)$ に対し $\widetilde{V} \in \mathcal{R}ep(A_d)$ を次で定める：

$$\widetilde{V} := \text{Ind}_{A \otimes A_{d-1}}^{A_d} (V \boxtimes 1_{A_{d-1}}).$$

$\mathbb{k}$ -module としては $\widetilde{V} \simeq V^{\oplus d}$ であり、 $(v_1, \dots, v_d) \in \widetilde{V}$ には A_d の元が次のように作用する：

$$(a_1 \otimes \cdots \otimes a_d \otimes g) \cdot (v_1, \dots, v_d) = (\epsilon_A(a_2) \cdots \epsilon_A(a_d) a_1 \cdot v_{g^{-1}(1)}, \dots, \epsilon_A(a_1) \cdots \epsilon_A(a_{d-1}) a_d \cdot v_{g^{-1}(d)}).$$

2.3 Graphical calculation of $\mathcal{R}ep_0(A_d)$

Definition 1. $\widetilde{V}_1 \otimes \cdots \otimes \widetilde{V}_m$ ($V_1, \dots, V_m \in \mathcal{R}ep(A)$) という形の object を全て集めた $\mathcal{R}ep(A_d)$ の充満部分圏を $\mathcal{R}ep_0(A_d)$ とおく。特に $m = 0$ の場合である 1_{A_d} も含むことに注意する。

以下では $\mathcal{R}ep_0(A_d)$ を組み合わせ論的に記述するために、いくつかの道具を用意する。まず、object $\widetilde{V}_1 \otimes \cdots \otimes \widetilde{V}_m$ は $V_1, \dots, V_m$ というラベルのついた点を水平に並べて表す。その間の射は以下説明する方法によって点の間を上から下へとつなぐ線で描く。

Definition 2. $\varphi \in \text{Hom}_A(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m, W_1 \otimes \cdots \otimes W_n)$ に対し、 $\widetilde{\varphi} \in \text{Hom}_{A_d}(\widetilde{V}_1 \otimes \cdots \otimes \widetilde{V}_m, \widetilde{W}_1 \otimes \cdots \otimes \widetilde{W}_n)$ を

$$\widetilde{\varphi} = \sum_{j=1}^d \left(\iota_j^{W_1} \otimes \cdots \otimes \iota_j^{W_n} \right) \circ \varphi \circ \left(\pi_j^{V_1} \otimes \cdots \otimes \pi_j^{V_m} \right)$$

で定める。ここで各 $\pi_j^{V_i}$ 、 $\iota_j^{W_i}$ は

$$\begin{aligned} \pi_j^V: \widetilde{V} &\rightarrow V & \iota_j^W: W &\rightarrow \widetilde{W} \\ ;(v_1, \dots, v_d) &\mapsto v_j & ;w &\mapsto (0, \dots, \underset{j}{w}, \dots, 0) \end{aligned}$$

で与えられる。この $\widetilde{\varphi}$ が実際に A_d -準同型であることは簡単な計算で確かめられる。

$\widetilde{\varphi}$ は図 1 のように、点を全て線でつなぎその上に φ というラベルを貼った図で表す。 $\varphi = \text{id}_V: V \rightarrow V$ のときは $\widetilde{\text{id}}_V = \text{id}_{\widetilde{V}}$ であり、図 2 のようにラベルを省略する。

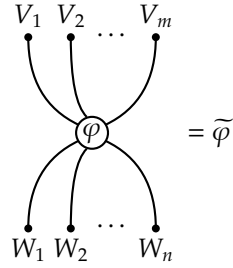


図 1 射 $\widetilde{\varphi}$

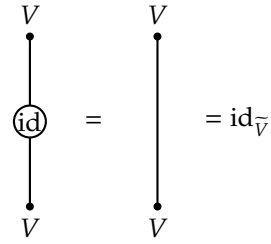


図 2 id の省略

$m = n = 0$ の場合には $\bigcirc$ のような孤立した図になるが、このときは単にスカラー $\widetilde{c} \in \text{End}_{A_d}(\mathbf{1}_{A_d}) \simeq \mathbb{k}$ と見なせる。 $c \in \text{End}_A(\mathbf{1}_A) \simeq \mathbb{k}$ とは $\widetilde{c} = dc$ の関係にある。

Definition 3. $\mathcal{R}ep(A)$ における braiding isomorphism σ から、 $\mathcal{R}ep_0(A_d)$ での braiding isomorphism τ が作られる：

$$\begin{aligned} \tau_{\widetilde{V}\widetilde{W}}: \widetilde{V} \otimes \widetilde{W} &\xrightarrow{\sim} \widetilde{W} \otimes \widetilde{V} \\ &:= \widetilde{\sigma_{VW}} + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^d (\iota_k^W \otimes \iota_j^V) \circ P_{VW} \circ (\pi_j^V \otimes \pi_k^W). \end{aligned}$$

ここで $P_{VW}(v \otimes w) = w \otimes v$ 。 τ^{-1} は上式の σ を σ^{-1} に変えれば得られる。これらが準同型であることも簡単な計算でわかる。

τ 、 τ^{-1} は図 3 のように上下に交叉する線で表す。

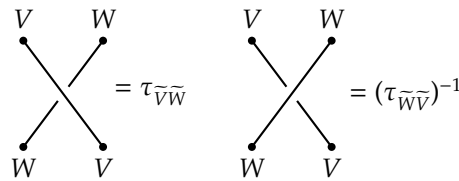


図 3 braiding τ

また、このような図形を水平に複数個並べたものは、それぞれが表す射のテンソル積をとったものを表すこととする。最後に、これらの射の合成は、それぞれを表す図形を上から下の順番に接続して描く。これだけの材料がそろえば、braided tensor category $\mathcal{R}ep_0(A_d)$ を記述するに足ることが後にわかる。

射の合成を計算するには次の定理が使える。

Theorem 1. 離れた場所にある射の順序を入れ替える変形に加えて、以下に示す局所的な変形ができる。なお太線は 1 本以上、破線は 0 本以上の複数の線を省略して描いたものである。

$$\begin{aligned}
\textcircled{c} &= dc \quad (\text{スカラー倍 } dc \in \text{End}_A(\mathbf{1}_A) \simeq \mathbb{k} \text{ として取り除く}), \\
\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} &= \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}, & \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} &= \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}, \\
\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} &= \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \textcircled{\sigma^2 - \text{id}}, & \textcircled{a\varphi + b\psi} &= a \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \textcircled{\varphi} + b \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \textcircled{\psi}, \\
\begin{array}{c} \textcircled{\varphi} \\ \diagdown \end{array} &= \begin{array}{c} \diagdown \end{array} \textcircled{(\text{id} \otimes \psi) \circ (\varphi \otimes \text{id})}, & \begin{array}{c} \diagup \end{array} \textcircled{\psi} &= \begin{array}{c} \diagup \end{array} \textcircled{(\psi \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \varphi)}, \\
\begin{array}{c} \textcircled{\varphi} \\ \diagdown \end{array} &= \begin{array}{c} \diagdown \end{array} \textcircled{\varphi}, & \begin{array}{c} \diagup \end{array} \textcircled{\varphi} &= \begin{array}{c} \diagup \end{array} \textcircled{\varphi}, \\
& \text{2本の線がグラフ上の同じ連結成分にあるとき} & \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} &= \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \textcircled{\sigma}.
\end{aligned}$$

2.4 Abstract construction of $\text{Rep}_0(A_d)$

前章で得られた関係式を元に、抽象的に $\text{Rep}_0(A_d)$ を模倣した圏を構成することを考える。まず、混乱を防ぐために、 $V \in \text{Rep}(A)$ に対し、 $\widehat{V}$ の代わりに $\widehat{V}$ という記号を用意する。同様に、 $\varphi \in \text{Hom}_A(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m, W_1 \otimes \cdots \otimes W_n)$ に対して $\widehat{\varphi}$ の代わりに $\widehat{\varphi}$ 、 $\tau_{\widehat{V}\widehat{W}}$ と $(\tau_{\widehat{V}\widehat{W}})^{-1}$ の代わりに $\tau_{\widehat{V}\widehat{W}}$ と $(\tau_{\widehat{V}\widehat{W}})^{-1}$ という記号も準備する。この二種類の「射」について、その「定義域」と「値域」を

$$\begin{aligned}
\text{Dom}(\widehat{\varphi}) &:= \widehat{V}_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{V}_m & \text{Dom}(\tau_{\widehat{V}\widehat{W}}) &= \text{Dom}((\tau_{\widehat{V}\widehat{W}})^{-1}) := \widehat{V} \otimes \widehat{W} \\
\text{Codom}(\widehat{\varphi}) &:= \widehat{W}_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{W}_n & \text{Codom}(\tau_{\widehat{V}\widehat{W}}) &= \text{Codom}((\tau_{\widehat{V}\widehat{W}})^{-1}) := \widehat{W} \otimes \widehat{V}
\end{aligned}$$

と書く。さらに、これらを水平に並べた $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_l$ ($\alpha_k = \widehat{\varphi}$ または $\tau_{\widehat{V}\widehat{W}}, (\tau_{\widehat{V}\widehat{W}})^{-1}$) という記号も用意し、 $\text{Dom}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_l) := \text{Dom}(\alpha_1) \otimes \cdots \otimes \text{Dom}(\alpha_l)$ 、 $\text{Codom}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_l) := \text{Codom}(\alpha_1) \otimes \cdots \otimes \text{Codom}(\alpha_l)$ とする。最後に、 $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ をそれぞれ $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_l$ という形の記号であって、 $\text{Codom}(\Phi_k) = \text{Dom}(\Phi_{k+1})$ ($k = 1, \dots, r-1$) を満たすものとするときに、これらを縦に並べた $\Phi_r \circ \cdots \circ \Phi_1$ という記号を考える。もちろんこれに対し $\text{Dom}(\Phi_r \circ \cdots \circ \Phi_1) := \text{Dom}(\Phi_1)$ 、 $\text{Codom}(\Phi_r \circ \cdots \circ \Phi_1) := \text{Codom}(\Phi_r)$ と書く。なおこれらの記号についても前章と同じやり方で図に表すものとする。

Definition 4. このような記号 $\Phi_r \circ \cdots \circ \Phi_1$ のうち、 $\text{Dom} = \widehat{V_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{V_m}$ 、 $\text{Codom} = \widehat{W_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{W_n}$ をみたすものを全て集める。これらで生成される自由 $\mathbb{k}$ 加群を、**Theorem 1.** に挙げられた同値関係で割ったものを $H_d(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n)$ と置く。 $f(\widehat{\varphi}) := \widetilde{\varphi}$ 、 $f(\tau_{\widehat{V}\widehat{W}}) := \tau_{\widehat{V}\widehat{W}}$ 、 $f(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_l) := f(\alpha_1) \otimes \cdots \otimes f(\alpha_l)$ 、 $f(\Phi_r \circ \cdots \circ \Phi_1) := f(\Phi_r) \circ \cdots \circ f(\Phi_1)$ と定めることにより、 $\mathbb{k}$ -linear map $f: H_d(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n) \rightarrow \text{Hom}_{A_d}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m, W_1 \otimes \cdots \otimes W_n)$ が定義される。また、適切な空間 H_d 同士の間で、 $\mathbb{k}$ -bilinear な演算 $\bullet \otimes \bullet$ と $\bullet \circ \bullet$ が記号操作から誘導される。これらは f で保たれる。

Remark 1. 記号を「全て集め」た段階では、大抵集合で扱える範囲を超えてしまうので、クラスなどの概念を必要とするかもしれない。しかし関係式で割ってしまえば集合になる。

Remark 2. この定義は A ではなく $\text{Rep}(A)$ についての言葉だけで書かれていることに注意する。

関係式から特に、 $\widehat{\text{id}} \otimes \cdots \otimes \tau_{\widehat{V_j} \widehat{V_k}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\text{id}}$ という形の元を braid 群の元 $x \in \mathfrak{B}_m$ に従って $\circ$ で合成した結果は well-defined である。これを $\tau_{\widehat{V_1} \cdots \widehat{V_m}}^x \in H_d(V_1, \dots, V_m | V_{x^{-1}(1)}, \dots, V_{x^{-1}(m)})$ 、もしくは省略して τ^x と書く。関係式をうまく使うと、全ての $H_d(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n)$ の元は $(\tau^y)^{-1} \circ (\widehat{\varphi_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\varphi_l}) \circ \tau^x$ という形に変形できることがわかる。それは例えば図4のように描かれる。この形の元を集めた空間を以下で準備する。

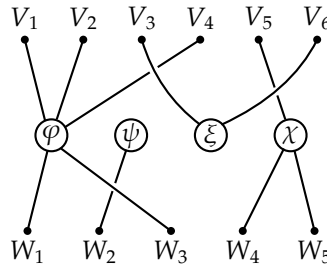


図4 $H_d(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n)$ の元の例

Definition 5. 1. $m+n$ 個の元からなる集合 $\left\{ \begin{matrix} 1, \dots, m \\ 1', \dots, n' \end{matrix} \right\}$ をいくつかの部分集合の直和に分ける方法

$$\left\{ \begin{matrix} 1, \dots, m \\ 1', \dots, n' \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i_1, \dots \\ i'_1, \dots \end{matrix} \right\} \sqcup \cdots \sqcup \left\{ \begin{matrix} i_l, \dots \\ i'_l, \dots \end{matrix} \right\}$$

を $m+n$ の分割と呼び、その全体の集合を $P_{m,n}$ と書く。分割 $p \in P_{m,n}$ で分けられた部分集合の数を $l = |p|$ と書く。 p' が p の細分であるときに $p \leq p'$ と定めることにより、 $P_{m,n}$ に半順序が入る。

2. 上式のように、分割に対し部分集合の和をとる順序と、それぞれの部分集合で $\{1, \dots, m\}$ と $\{1', \dots, n'\}$ の元を並べる順序を決めたものをその分割の表示と呼ぶ。さらに、分割の表示 $\mathbf{i}: \left\{ \begin{matrix} i_1, \dots \\ i'_1, \dots \end{matrix} \right\} \sqcup \cdots \sqcup \left\{ \begin{matrix} i_l, \dots \\ i'_l, \dots \end{matrix} \right\}$ に加え、braid 群の元 $x \in \mathfrak{B}_m$ と $y \in \mathfrak{B}_n$ でそれぞれ $(1, \dots, m)$ を $(i_1, \dots), \dots, (i_l, \dots)$ に、 $(1', \dots, n')$ を $(i'_1, \dots), \dots, (i'_l, \dots)$ に順番を並び替えるものと組にした $(\mathbf{i}, x, y)$ を、その分割の braid 表示と呼ぶ。分割の braid 表示は図4からラベルだけ取り除いたような図で表せる。

3. $V_1, \dots, V_m, W_1, \dots, W_n \in \text{Rep}(A)$ とする。 $m+n$ の分割 $p \in P_{m,n}$ とその braid 表示 $\mathbf{I} = (\mathbf{i}, x, y)$ をとる。これらに対し、 $H_d(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n)$ の部分 $\mathbb{k}$ -module $H_d^{\mathbf{I}}(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n)$ を、 $(\tau^y)^{-1} \circ (\widehat{\varphi_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\varphi_l}) \circ \tau^x$ の形で表される元全体とする。ここで、 $\mathbf{i}: \left\{ \begin{matrix} i_1, \dots \\ i'_1, \dots \end{matrix} \right\} \sqcup \cdots \sqcup \left\{ \begin{matrix} i_l, \dots \\ i'_l, \dots \end{matrix} \right\}$ とするとき、各 φ_k は $\text{Hom}_A(V_{i_k} \otimes \cdots, W_{i'_k} \otimes \cdots)$ の元。

この空間は $H_d(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n)$ の基底としてのよい性質を持っている。

Theorem 2. 1. 上記のような $\mathbf{I}$ をとったとき、この分割の *braid* 表示に「ラベルを貼る」射

$$\bigotimes_{k=1}^l \text{Hom}_A(V_{i_k} \otimes \dots, W_{i'_k} \otimes \dots) \xrightarrow{\sim} H_d^{\mathbf{I}}(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n)$$

$$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_l \mapsto (\tau^y)^{-1} \circ (\widehat{\varphi}_1 \otimes \dots \otimes \widehat{\varphi}_l) \circ \tau^x$$

は $\mathbb{k}$ -module の同型射。

2. 各分割 $p \in P_{m,n}$ に対しその *braid* 表示 $\mathbf{I}_p = (\mathbf{i}_p, x_p, y_p)$ を適当に一つずつ決めたとき、

$$H_d(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n) = \bigoplus_{p \in P_{m,n}} H_d^{\mathbf{I}_p}(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n).$$

別の *braid* 表示 $\mathbf{I}'_p$ をとりこれらの表示の間で座標変換を考えると、その行列表示は $P_{m,n}$ の半順序についての d によらない単位上三角行列となる。

3. $\bullet \otimes \bullet$ や $\bullet \circ \bullet$ を上記のような基底で表示したとき、展開係数は d についての多項式となる。

次に、この空間と f がどれだけ $\text{Hom}_{A_d}(V_1 \otimes \dots \otimes V_m, W_1 \otimes \dots \otimes W_n)$ を正確に記述できているかを調べる。それには次のような $\Theta: H_d(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n) \xrightarrow{\sim} H_d(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n)$ を導入すると便利である。

Lemma 3. 以下の性質を持つ $\Theta: H_d(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n) \xrightarrow{\sim} H_d(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n)$ が存在する。

1. Θ は上記の基底表示の下で d によらない単位上三角行列で書ける。特に、

$$H_d(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n) = \bigoplus_{p \in P_{m,n}} \Theta(H_d^{\mathbf{I}_p}(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n)).$$

$$2. (f \circ \Theta)((\tau^y)^{-1} \circ (\widehat{\varphi}_1 \otimes \dots \otimes \widehat{\varphi}_l) \circ \tau^x) = (\tau^y)^{-1} \circ \left(\sum_{\substack{j_1, \dots, j_l=1 \\ j_k \text{ は相異なる}}}^d (\iota_{j_1} \circ \varphi_1 \circ \pi_{j_1}) \otimes \dots \otimes (\iota_{j_l} \circ \varphi_l \circ \pi_{j_l}) \right) \circ \tau^x.$$

ここで π_{j_k} などは $\pi_{j_k}^{V_{i_k}} \otimes \dots$ などの省略である。 Θ のない $f((\tau^y)^{-1} \circ (\widehat{\varphi}_1 \otimes \dots \otimes \widehat{\varphi}_l) \circ \tau^x)$ は右辺の「相異なる」という条件を外した和に一致することに注意。

ここから次がわかる。

Theorem 4. $f: H_d(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n) \rightarrow \text{Hom}_{A_d}(V_1 \otimes \dots \otimes V_m, W_1 \otimes \dots \otimes W_n)$ は全射であって、

$$\ker(f) = \bigoplus_{\substack{p \in P_{m,n} \\ |p| > d}} \Theta(H_d^{\mathbf{I}_p}(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n)).$$

これは、braided tensor category $\text{Rep}_0(A_d)$ の構造の完全な記述が得られたことを意味する。次章では、 $d \in \mathbb{N}$ の代わりに一般の $t \in \mathbb{k}$ に対しこの $\text{Rep}_0(A_d)$ の構造を模倣することで、新たな圏を定義する。

3 Functor $\mathcal{S}_t$

3.1 Tensor categories

引き続き $\mathbb{k}$ を可換環とする。

Definition 6. 1. $\mathbb{k}$ -linear category とは、category C の各 $\text{Hom}_C(V, W)$ に $\mathbb{k}$ -module の構造が入っており、合成 $\text{Hom}_C(V, W) \times \text{Hom}_C(U, V) \rightarrow \text{Hom}_C(U, W)$ が $\mathbb{k}$ -bilinear であるものを言う。

2. $\mathbb{k}$ -tensor category とは、

$$\begin{array}{ll} C: \mathbb{k}\text{-linear category} & \mathbf{1}_C \in C \\ \otimes: C \times C \rightarrow C & \mathbb{k}\text{-bilinear functor} & \lambda: \mathbf{1}_C \otimes \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \\ \alpha: (\bullet \otimes \bullet) \otimes \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \otimes (\bullet \otimes \bullet) & \rho: \bullet \otimes \mathbf{1}_C \xrightarrow{\sim} \bullet \end{array}$$

の組であって、Pentagon axiom、Triangle axiom を満たすものを言う。ここではさらに、 $\mathbf{1}_C$ は simple であって $\text{End}(\mathbf{1}_C) \simeq \mathbb{k}$ となることを要求する。

3. $\mathbb{k}$ -braided tensor category とは、 $\mathbb{k}$ -tensor category と

$$\sigma: \bullet \otimes \bullet' \xrightarrow{\sim} \bullet' \otimes \bullet$$

の組であって、Hexagon axioms を満たすものを言う。

4. 全ての object V について right dual V^* と left dual *V が存在する $\mathbb{k}$ -tensor category を rigid であると言う。

5. rigid な $\mathbb{k}$ -braided tensor category と

$$\delta: \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet^{**}$$

の組であって、いくつかの性質を満たすものを $\mathbb{k}$ -ribbon category と言う。

詳しくは [BK] を参照のこと。ただしここでは tensor category は additive であるとは限らない。以下必要なとき以外は頭の $\mathbb{k}$ は省略する。

bialgebra A に対し、 $\mathcal{R}ep(A)$ は tensor category となる。 A が Hopf algebra の場合これは rigid である。 A が余可換なら $\mathcal{R}ep(A)$ にはさらに ribbon category の構造が自動的に入るが、余可換ではない量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の場合にも自明でない ribbon category の構造が知られている。これらの構造は $\mathcal{R}ep_0(A_d)$ にも誘導される。

3.2 Construction of the category $\mathcal{S}_t(C)$

Definition 7. braided tensor category C と $t \in \mathbb{k}$ に対し、braided tensor category $\mathcal{S}_t(C)$ を以下で定める。

Objects: C の object の有限個の組。

$(V_1, \dots, V_m)$ に対応する object を $\widehat{V_1} \otimes \dots \otimes \widehat{V_m}$ と書く。

ただし $m = 0$ の場合に対応する object は $\mathbf{1}_{\mathcal{S}_t(C)}$ と書く。

Morphisms: $\text{Hom}_{\mathcal{S}_t(C)}(\widehat{V_1} \otimes \dots \otimes \widehat{V_m}, \widehat{W_1} \otimes \dots \otimes \widehat{W_n}) := H_t(V_1, \dots, V_m | W_1, \dots, W_n)$.

先程の定義で、 $d \in \mathbb{N}$ を $t \in \mathbb{k}$ に置き換え、 Hom_A の代わりに Hom_C を用いる。

テンソル積は $\otimes$ 、射の合成は $\circ$ で行う。

α, λ, ρ はいずれも自明に定義される。また braiding isomorphism は図 5 で示される braid 群の元 $x \in \mathfrak{B}_{m+n}$ を使って τ^x で定義する。

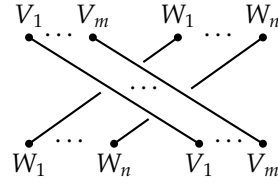


図 5 一般の braiding

詳細は省くが、 C が rigid ならば $S_t(C)$ も rigid、 C が ribbon ならば $S_t(C)$ も ribbon となる。

braided tensor category $C, \mathcal{D}$ の間に tensor functor ($\mathbb{k}$ -linear で $\otimes$ と braiding を保つ関手) $F: C \rightarrow \mathcal{D}$ があるとき、新たな tensor functor $S_t(F): S_t(C) \rightarrow S_t(\mathcal{D})$ が定義される。これは図 6 のように射を射に写すものとして定める。

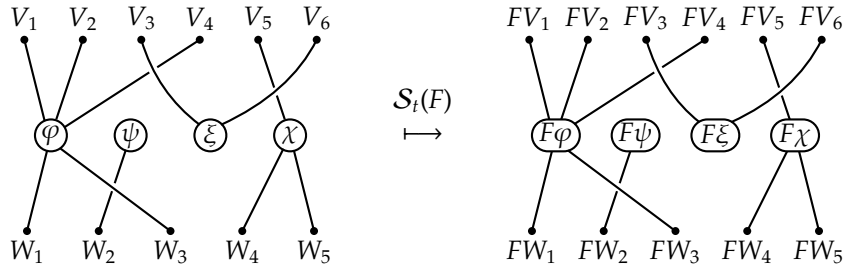


図 6 関手 $S_t(F)$

つまり、braided tensor category を object、tensor functor (を圏同値で割ったもの) を morphism とする圏を考えると、 S_t はそこから自分自身への関手とすることができる。なお集合論的な困難の避け方については (よく知らないので) 深く立ち入らない。

前章の設定、 $C = \text{Rep}(A)$ (+ braiding isomorphism σ) の場合には、 $S_t(\text{Rep}(A))$ のことを $\underline{\text{Rep}}_0(A_t)$ と書くことにする。 $t = d \in \mathbb{N}$ のときは、以下のような tensor functor が存在する。

$$\begin{aligned} \underline{\text{Rep}}_0(A_d) &\rightarrow \text{Rep}_0(A_d) \\ \widehat{V}_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{V}_m &\mapsto \widetilde{V}_1 \otimes \cdots \otimes \widetilde{V}_m \\ \Phi &\mapsto f(\Phi) \end{aligned}$$

この関手は明らかに object について全射である。また morphism についても **Theorem 4.** の通り全射であり、kernel も具体的に記述できている。

3.3 Completions of categories

$\text{Rep}(A)$ と $\text{Rep}_0(A)$ との間のギャップを埋めるため、圏に対し「完備化」あるいは「閉包」の操作を定義する。

Definition 8. 1. 有限直和 (0 も含む) で閉じている $\mathbb{k}$ -linear category を additive であるという。

2. $\mathbb{k}$ -linear category C に対し、その additive envelope $\overline{C}^a$ が以下で定義される。

Objects: C の object の有限個の組。

$V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ ($m = 0$ のときは 0) と書く。

Morphisms: $\text{Hom}_{\overline{C}^a}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_m, W_1 \oplus \cdots \oplus W_n) := \bigoplus_{i,j} \text{Hom}_C(V_i, W_j).$

合成は行列の積で定義。

Definition 9. 1. 任意の幂等元 $e \in \text{End}(V)$ ($e^2 = e$) について kernel が存在する $\mathbb{k}$ -linear category を idempotent complete であるという。

2. $\mathbb{k}$ -linear category C に対し、その idempotent completion $\overline{C}^i$ が以下で定義される。

Objects: (V, e) ここで $V \in C, e \in \text{End}_C(V), e^2 = e.$

Morphisms: $\text{Hom}_{\overline{C}^i}((V, e), (W, f)) := f \cdot \text{Hom}_C(V, W) \cdot e.$

これらは

$\bullet^a: \{\text{linear category}\} \longrightarrow \{\text{additive category (+ additive functor)}\}$

$\bullet^i: \{\text{linear category}\} \longrightarrow \{\text{idempotent complete な linear category}\}$

という関手と見なすことができる。逆方向にはそれぞれ忘却関手 $\mathcal{F}$ と充満部分圏の埋め込み $\mathcal{I}$ という関手があるが、これらはそれぞれの left adjoint を与えており、かつ自然に $\overline{\mathcal{F}\mathcal{D}}^a \simeq \mathcal{D}$ 、 $\overline{\mathcal{I}\mathcal{D}}^i \simeq \mathcal{D}$ となっている。braided tensor category C に対し、 $\overline{C}^a$ や $\overline{C}^i$ には braided tensor category の構造が誘導される。また C が additive ならば $\overline{C}^i$ も additive である。そこでこれらの合成を $\overline{C}^{ai} := \overline{\overline{C}^a}^i$ と書く。その結果は additive かつ idempotent complete な braided tensor category になる。

$\underline{\text{Rep}}(A_t) := \overline{\text{Rep}_0(A_t)}^{ai}$ とおく。 $t = d \in \mathbb{N}$ のとき、 $\text{Rep}(A_d)$ は additive かつ idempotent complete であるから、これらの間に以下の関係があることがわかる。

$$\underline{\text{Rep}}(A_d) \twoheadrightarrow \overline{\text{Rep}_0(A_d)}^{ai} \hookrightarrow \text{Rep}(A_d)$$

左の関手は object、morphism 両方に対し全射であり、右の関手は充満部分圏の埋め込みである。

A が有限群の群環の場合には次の定理が示される。

Theorem 5. G を有限群とし、 $\mathbb{k}$ を標数が 0 の G の分解体とする。このとき

$$\overline{\text{Rep}_0(G_d)}^{ai} \hookrightarrow \text{Rep}(G_d)$$

は圏同値。ここで、 $\text{Rep}(G_d)$ は $\text{Rep}(\mathbb{k}[G]_d)$ のことである。左辺も同様。

References

- [BK] B. Bakalov and A. Kirillov, Jr.. Lectures on Tensor Categories and Modular Functors. Volume 21 of *University Lectures Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [CO] J. Comes and V. Ostrik. On blocks of Deligne's category $\underline{\mathrm{Rep}}(S_t)$. arXiv:0910.5695v1.
- [Del] P. Deligne. La catégorie des représentations du groupe symétrique S_t , lorsque t n'est pas un entier naturel. *Algebraic groups and homogeneous spaces*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., pp 209–273. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007.
- [Kn1] F. Knop. A construction of semisimple tensor categories. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343:15–18, 2006. arXiv:math/0605126v2.
- [Kn2] F. Knop. Tensor envelopes of regular categories. *Advances in Mathematics*, 214(2):571–617, 2007. arXiv:math/0610552v2.
- [Mat] A. Mathew. Categories parametrized by schemes and representation theory in complex rank. arXiv:1006.1381v1.