

## 素粒子の相互作用と表現論

### Interaction of particles and representation theory

佐野 茂(Shigeru SANO), 大野成義 (Shigeyoshi OHNO)

2010 年 11 月 10 日

## はじめに

素粒子論の興味深い成果について表現論の立場から前回まとめてみた (『素粒子論と表現論』). そこでは素粒子論の標準モデルのうち, 表現論と密接に関連する内容について議論した. 今回は一步ふみこんで素粒子の相互作用をテーマとし, 表現論の立場から統一的な扱いを試みる. 相互作用はその強さとタイプ (ベクトル型, スカラー型など) で特徴付けられる. ここでは電磁相互作用, 強い相互作用そして弱い相互作用を扱う.

表 1.

| 相互作用   | 荷量   | 力の到達距離                           | 寿命(sec)                  | 結合定数      | 特徴                   |
|--------|------|----------------------------------|--------------------------|-----------|----------------------|
| 電磁相互作用 | 電荷   | $\infty$                         | $10^{-20} \sim 10^{-16}$ | $10^{-2}$ |                      |
| 強い相互作用 | カラー荷 | $1 \text{ fm} \approx 1/m_\pi$   | $10^{-23}$               | 1         | クォークに働く<br>レプトンに働かない |
| 弱い相互作用 | 弱い荷  | $1/M_w$<br>$M_w \approx 100 m_p$ | $10^{-12}$ 以上            | $10^{-6}$ | フレーバーを変化させる          |

表現論の理論の歴史を振り返ると, 物理から刺激を受け  $SL(2, \mathbb{R})$  など具体的な例で興味深い現象が見つかり, それを一般化する方向で理論が発展してきた. 数学としては正統的な歩みと言えるだろうが, 科学としては少し物足りない.

例えば, 電気磁気学ではデンマークのエルステッドが電流の流れる導線に磁石を近づけると針が振れる実験を公開で行っている. このニュースはジュネーブ経由でパリに届き, ビオやサバールなどが大変驚き現象の本質を研究している. さらにニュースは海を渡りイギリスにも届いた. ファラディも興味をもち巧みな実験を行い, その結果はマックスウェルが数式を用いてまとめている. その式を整理したのが現在知られているマックスウェルの方程式である. マックスウェルは「光は方程式が示す電磁波の一種である」と予想し, ヘルツにより実証されていた.

こうした歴史が示唆するように単に立派な数学が誕生したというだけでなく、何かその成果による物理現象の解明などの貢献があってもよいのではないか。

## § 1. 電磁相互作用

電磁力は光子交換により行われると見做されるようになっている。光は電磁波の一種でマックスウェル方程式に従う。マックスウェル方程式はローレンツ共役となるため、ローレンツ群  $SO(1,3)$  の表現を与えることになるので興味深い。

マックスウェルの方程式：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \end{cases} \quad (1)$$

この方程式を量子化することにより量子電気力学(Quantum Electrodynamics, QED)の理論が生まれ高い精度で磁気モーメントなどが求められている。電磁崩壊としては

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma, \quad \Sigma \rightarrow \Lambda + \gamma$$

など光子  $\gamma$  が放出されている。

電磁相互作用を明らかにするためにラザフォード散乱を例に挙げよう。電場において正負の電荷の偏りすなわち真空偏極がおこり、誘電体としての性質が示される。粒子間の距離  $r$  に対して、真空仮想フォトンの質量  $Q^2$  ( $Q \sim 1/r$ ) をとると、真空偏極による結合定数への補正因子  $B(Q^2)$  は

$$\alpha_0 B(Q^2) \approx \begin{cases} -\frac{\alpha_0}{3\pi} \left\{ \Delta_e - \ln \left( \frac{Q^2}{m_e^2} \right) \right\} & Q^2 \gg m_e^2 \\ -\frac{\alpha_0}{3\pi} \left\{ \Delta_e - \frac{Q^2}{5m_e^2} \right\} & Q^2 \ll m_e^2 \end{cases} \quad (2)$$

となる。誘電分極を引き起こすループは限りなくある。それらの和をすべてとったのが実効的な電荷  $\alpha_{run}$  である。

$$\begin{aligned} \alpha_{run}(Q^2) &= \alpha_0 \{ 1 + \alpha_0 B + \alpha_0 B \alpha_0 B + \dots \} \\ &= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0 B(Q^2)} \end{aligned} \quad (3)$$

この式では発散項  $\Delta_e$  を含んでいるので物理量とはならないが、十分に遠いとき ( $Q^2 \rightarrow 0$ )

には実効電荷が実際に測定される電荷  $\alpha$  とみなされるので

$$\alpha \equiv \alpha_{run}(0) = \frac{1}{137} \quad (4)$$

とすると

$$\frac{1}{\alpha_{run}(Q^2)} = \frac{1}{\alpha} - \{B(Q^2) - B(0)\} \approx \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{m_e^2}\right) \quad (5)$$

よって

$$\alpha_{run}(Q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{m_e^2}\right)} \quad (6)$$

この式には発散項  $\Delta_e$  はなく、観測される有限な量のみで与えられている。

表 2.

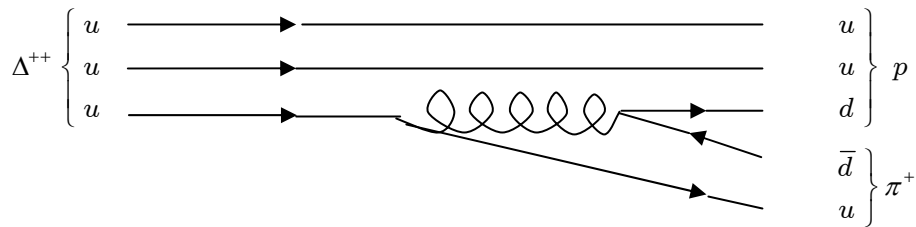
| ゲージボソン                  | スピン | バリオン数 B | レプトン数 L | 電荷 Q       |
|-------------------------|-----|---------|---------|------------|
| 光子 $\gamma$             | 1   | 0       | 0       | 0          |
| $W^\pm, Z$              | 1   | 0       | 0       | $\pm 1, 0$ |
| グルーオン $g_1, \dots, g_8$ | 1   | 0       | 0       | 0          |

## § 2. 強い相互作用

QED を手本として、強い力の理論、量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) が生まれている。クォークとクォークとを結び付けているグルーオンによるカラー価に働く力が強い力である。崩壊としては

$$\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$$

などがあるが、フェーバーは変えずバリオン数、レプトン数、電荷は保たれる。



しかし非アーベルゲージ理論では、グルーオンの自己結合があるので状況は異なってくる。

$$B(Q^2) = \frac{\beta_0}{4\pi} (\Delta - \ln Q^2), \quad \beta_0 = -\left(\frac{2}{3}n_f + 5 - 16\right) \quad (7)$$

ここで、 $n_f$  はクォークの数を表し、16 個以上だと符号が変わってくる。QED と同じように高次のループも入れると

$$\begin{aligned} \alpha_{run}(Q^2) &= \alpha_0 \{1 + \alpha_0 B + \alpha_0 B \alpha_0 B + \dots\} \\ &= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0 B(Q^2)} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。発散項  $\Delta$  を除くために、QED のときと同じように繰り込みの操作が必要になるが、QED の場合のように遠方 ( $Q^2 = 0$ ) で値を基準にとることはできない。閉じ込め効果により、遠方から裸のカラー値を観測するのが出来ないからである。そこで繰り込み点  $\lambda^2$  を設定して発散項を除く

$$\frac{1}{\alpha_{run}(Q^2)} = \frac{1}{\alpha(\lambda^2)} - \{B(Q^2) - B(\lambda^2)\} \approx \frac{1}{\alpha(\lambda^2)} + \frac{\beta_0}{4\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{\lambda^2}\right) \quad (9)$$

よって

$$\alpha_{run}(Q^2) = \frac{\alpha(\lambda^2)}{1 + \alpha(\lambda^2) \frac{\beta_0}{4\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{\lambda^2}\right)} \quad (10)$$

となる。この式で、 $Q^2 \rightarrow \infty$  とすると 0 に近づく。近距離ではクォークに働く強い力は弱くなることを示している。このことを漸近自由とよび、QCD の特徴となっている。

繰り込み点  $\lambda^2$  に依存しているので、(9)式を変形して

$$\frac{1}{\alpha_{run}(Q^2)} + B(Q^2) = \frac{1}{\alpha(\lambda^2)} + B(\lambda^2) \equiv -\frac{\beta_0}{4\pi} \ln(\Lambda^2) \quad (11)$$

とすると、左式は  $Q^2$  のみの関数、中式は  $\lambda^2$  のみの関数であるので繰り込み点に依存しないことが分かる。よって右式のように普遍的に結合定数  $\Lambda$  が定義できる。この定数  $\Lambda$  を用いて

$$\begin{aligned} \alpha_{run}(Q^2) &= \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(Q^2 / \Lambda^2)}, \\ \beta_0 &= \left(11 - \frac{2}{3}n_f\right) \end{aligned} \quad (12)$$

を得る。

歴史的には湯川秀樹の論文 ([Yu]) により原子核を維持する力として中間子による相互作用が予想され、中間子が後に発見され理論の正しさが証明された。その後、グルーオンに

よる強い力により統一的に説明されるようになっていった.

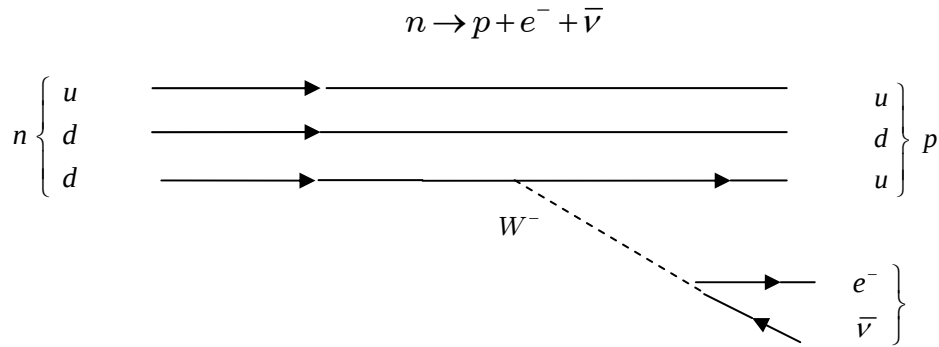
表 3.

| クオーク | スピン | バリオン<br>数 B | レプト<br>ン数 L | 電荷 Q | 質量<br>MeV |
|------|-----|-------------|-------------|------|-----------|
| u    | 1/2 | 1/3         | 0           | 2/3  | 3         |
| d    | 1/2 | 1/3         | 0           | -1/3 | 1,200     |
| c    | 1/2 | 1/3         | 0           | 2/3  | 174,000   |
| s    | 1/2 | 1/3         | 0           | -1/3 | 6         |
| t    | 1/2 | 1/3         | 0           | 2/3  | 120       |
| b    | 1/2 | 1/3         | 0           | -1/3 | 4,200     |

反粒子  $\bar{u}, \bar{d}, \bar{c}, \bar{s}, \bar{t}, \bar{b}$  の量子数 B, L, Q は対応する粒子の符号を反転させ, それ以外の性質は同じである. 例えば  $\bar{u}$  は B = -1/3, L = 0, Q = -2/3 である.

### § 3. 弱い相互作用

弱い相互作用は荷電ベクトルボソンすなわち弱いボソン  $W^\pm$  の放出と吸収により生じる.  
 $\beta$  崩壊



が弱い相互作用としてよく知られている. 電磁相互作用や強い相互作用での崩壊と比較して寿命は長い. また  $K^+$  の崩壊

$$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0, \pi^+ \pi^0 \pi^0$$

ではパリティが保存されない. さらに驚くことに, 弱い相互作用に関わるのは左巻きレプトン ( $e_L, \nu_L$  など) と右巻き反レプトン ( $\bar{e}_R, \bar{\nu}_R$  など) であることが実験により明らかになった. これらの鏡映状態となる  $\bar{\nu}_L$  や  $\nu_R$  が存在しないのは, パリティが保存されないことを示す.

P の破れ

$$\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_L) \neq \Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_R)$$

$$\text{C の破れ} \quad \Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_L) \neq \Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_L)$$

$$\text{CP は保存} \quad \Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_L) = \Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_R)$$

他方レプトン数は保存する．また，電荷ゼロのウィークボソン  $Z$  の存在も知られている．これらのことから弱い相互作用は V-A(vector-axial vector)型の崩壊となる．

表 4 .

| レプトン                     | スピン | バリオン数 B | レプトン数 L       | 電荷 Q | 質量 MeV |
|--------------------------|-----|---------|---------------|------|--------|
| 電子 e                     | 1/2 | 0       | $L_e = +1$    | -1   | 0.511  |
| 電子ニュートリノ $\nu_e$         | 1/2 | 0       | $L_e = +1$    | 0    | ?      |
| ミューオン $\mu$              | 1/2 | 0       | $L_\mu = +1$  | -1   | 105.7  |
| $\mu$ ニュートリノ $\nu_\mu$   | 1/2 | 0       | $L_\mu = +1$  | 0    | ?      |
| タウ $\tau$                | 1/2 | 0       | $L_\tau = +1$ | -1   | 1777   |
| $\tau$ ニュートリノ $\nu_\tau$ | 1/2 | 0       | $L_\tau = +1$ | 0    | ?      |

レプトン数には 3 種類あり，記入されていないレプトン数はすべてゼロである．反粒子  $e^+, \bar{\nu}_e, \bar{\mu}, \bar{\nu}_\mu, \bar{\tau}, \bar{\nu}_\tau$  の量子数 B, L, Q は対応する粒子の符号を反転させ，それ以外の性質は同じである．例えば陽電子  $e^+$  の量子数は  $B = 0$ ,  $L_e = -1$ ,  $Q = 1$  である．

## § 4. バリオンとメソンの分類

重粒子(バリオン)は 3 個のクォークの組からなる．6 種のクォークが知られているから，6 次元ベクトル空間のテンソルにより構成される SU(6)の表現を用いて，バリオン进行分类してみよう．まず 6 種のクォークのテンソルをとり対称 (S) か反対称 (A) かにより次のように

$$6 \otimes 6 \cong 21 \oplus 15$$

空間を分解する．さらにテンソルをとり既約分解することにより

$$(6 \otimes 6) \otimes 6 \cong 56 \oplus 70 \oplus 70 \oplus 20$$

空間 S(56), Ms(70), Ma(70), A(20)に分解される．それぞれのヤング図形は

$$S(56) \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}, \quad Ms(70), Ma(70) \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}, \quad A(20) \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$$

である．この表現によりバリオンを分類していくのが自然である．前に示した

問題 7．フレーバー対称性を数学的に美しく表現せよ．

この問題は次のように具体化できる．

問題 7'．バリオンを表現の分解  $(6 \otimes 6) \otimes 6 \cong 56 \oplus 70 \oplus 70 \oplus 20$  により分類せよ．またメソンを表現の分解  $6 \otimes \bar{6} \cong 35 \oplus 1$  を用いて分類せよ．

特に **Ms** 空間と **Ma** 空間のどちらに素粒子が入るかは不鮮明である．例えばクォーク  $uud$  からなる素粒子はデルタ粒子  $\Delta^+$  と陽子  $p$  があるが， $\Delta^+$  は空間 **S** に属し， $p$  は空間 **Ms** か **Ma** に属すが不明確である．またデルタ粒子  $\Delta^+$  は陽子  $p$  の励起した状態と見做されている．

## § 4. 今後の課題

前回素粒子論の基本となる問題を 7 題上げたので，今回は表現論の立場から興味深い問題を加えてみる．

問題 8．素粒子の量子数は要請により増やしてきたが，本当に必要な量子数かどうか検証せよ．

一つの素粒子にアイソスピン，電荷，バリオン数，ストレンジネスなど多くの量子数を与えて現象を説明しているが，不要な量子数も含まれているかもしれない．現象により量子数が形を変えているかもしれないので，トリックなどの手法が使えるのではと期待できる．

問題 9．素粒子論の標準モデルを表現論から見直し，崩壊などが統一的に扱えるようにせよ．

それぞれの素粒子に対し発見者を尊重し個別な扱いをしているために全体として統一感に欠けるように思える，ライブニッツのような記号法を与えることも興味深い．

問題 10．電磁崩壊に現れる分岐則を正確に捉える理論は興味深い．

歴史的には，光に関する現象から光量子論や特殊相対性理論などが生まれている．今後ディラック方程式やマックスウェルの方程式からは電磁相互作用などの興味深い物理現象が説明されていくことが期待できる．

問題 (Yang-Mills Existence and Mass Gap) Prove that for any compact simple gauge group  $G$ , a non-trivial quantum Yang-Mills theory exists on  $\mathbf{R}^4$  and has a mass gap  $\Delta > 0$ . (Clay Mathematical Institute [Cl])

これは，クレイ数学研究所が 2000 年にミレニアム懸賞問題としてリーマン予想やポアンカレ予想と並んで出した問題である．詳細については研究所のホームページを参照していただきたい．昨年はこの公開問題を意識しないで素粒子論を表現論の立場から問題をあげ

てみたが，密接に関連しており具体的に述べているので参考にしていただけたらと思う ([SO])．力の統一問題とも関係しており，興味深い問題といえる．

## 文献

[Cl]Clay Mathematical Institute, Millennium Prize problems.

[Di]P.A.M. Dirac, The quantum theory of the electron, Proceedings of the Royal Society Bd.117, 1928, S.610, Bd.118, S.351 (Diracgleichung, spin)

[HM]F.Halzen, A.D.Martin, Quarks & Lepton -An introduction course in modern particle physics-, John Wiley & Sons,1984.

[P]Particle data group, Particle physics booklet 2008.

[SO]佐野茂, 大野成義

素粒子論と表現論, 表現論シンポジウム講演集 2009

[Yu]H.Yukawa, On the interaction of elementary particles. I., Proceedings of Phys.-Math. Society of Japan 1934.