

非心 Wishart 分布のモーメントと α -determinant, α -Hafnian について

栗木 哲 (統計数理研究所, JST CREST)

沼田 泰英 (東大 情報理工, JST CREST)

概要

正規分布に従うベクトルの分散共分散行列が従う確率分布は, Wishart 分布と呼ばれ, よく研究されている. 非心実 (複素)Wishart 分布のモーメントに対し, あるグラフの重みつき母関数を用いた表示を与えることができた. この母関数は determinant や Hafnian の analogue と思えるような多項式である. この表示を通して, パラメータが特別な非心実 (複素)Wishart 分布のいくつかのモーメントを求めることが, 条件を満たすグラフを数え上げることに帰着される.

1 Introduction

はじめに, Wishart 分布と呼ばれる確率分布について簡単に説明する. $p \times \nu$ 次行列 $M = (\mu_1, \dots, \mu_\nu) = (\mu_{ij})_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, \nu}}$ と $p \times p$ 次対称行列 $\Sigma = (\sigma_{i,j})$ を fix し $\Delta = M \cdot {}^t M$ とおく. $X_1 = (x_{i1})_{1 \leq i \leq p}$, $X_2 = (x_{i2})_{1 \leq i \leq p}, \dots, X_\nu = (x_{i\nu})_{1 \leq i \leq p}$ を ν 個の p 次元のランダムベクトルとし, それぞれ $N_p(\mu_1, \Sigma), \dots, N_p(\mu_\nu, \Sigma)$ に独立に従っているとすると, ただし, $N_p(\mu_i, \Sigma)$ は平均が μ_i , 分散共分散行列が Σ であるような多変量正規分布とする. X を $(X_1, \dots, X_p)$ なる $\nu \times p$ 行列とし, $W = (w_{ij})$ を $W = X \cdot {}^t X$ で定義する. このとき, W は対称なランダム行列となるが, W が従う分布を実非心 Wishart 分布 $W_p(\nu, \Sigma, \Delta)$ と呼ぶ. また, Δ は mean square matrix と呼ばれ, $\Delta = 0$ の時には中心 Wishart 分布 $W_p(\nu, \Sigma)$ とよばれる. 同様に, 複素正規分布から出発し, $W = X \cdot {}^t \bar{X}$ の様に構成したエルミート行列が従う分布を複素 Wishart 分布 $CW_p(\nu, \Sigma, \Delta)$ と呼ぶ.

次に, モーメントについて簡単に説明する. $x = (x_1, \dots, x_m)$ はある分布 D に従うランダムベクトルであるとする. このとき $n = (n_1, \dots, n_m)$ に対し, $x^n = x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}$ の平均 $\mathbb{E}[x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}]$ を分布 D の (n -次) モーメントと呼ぶ. ある分布 D が与えられたときに, D のモーメントを具体的に求めよという自然な問題が思い付く.

さて, Wishart 分布についてはモーメントの母関数は知られており, 実 Wishart 分布の場合には次の様に書ける:

$$\mathbb{E}[e^{\text{tr}(\Theta W)}] = \det(I - 2\Theta\Sigma)^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{1}{2} \text{tr}(I - (I - 2\Theta\Sigma)^{-1})\Omega},$$

ただしここで, Θ は $p \times p$ symmetric parameter matrix であり, Ω は $\Sigma\Omega = \Delta$ を満たす非心度行

列と呼ばれる行列である。複素 Wishart 分布についても同様の式が知られている (詳しくは [2, 11] などを参照されたい)。本稿の目標は Wishart 分布のモーメント $\mathbb{E}[w_{i_1, i_2} w_{i_3, i_4} \cdots w_{i_{2n-1}, i_{2n}}]$ を具体的に記述することである。我々は、まず determinant などの analogue と思える多項式をグラフの言葉を用いて定義する。その多項式を用いて一般のモーメント $\mathbb{E}[w_{i_1, i_2} w_{i_3, i_4} \cdots w_{i_{2n-1}, i_{2n}}]$ の公式を記述する。証明など詳細は [5] を参照されたい。

2 Notation of graphs

本稿では、有向グラフと無向グラフの両方を扱う。まず、無向グラフに関する記号を用意する。 $v \neq w$ に対し、 v と w の間の無向辺を $\{v, w\}$ であらわす。任意の $v \neq w$ に対し、 $\{v, w\} = \{w, v\}$ である。なお本稿では無向グラフにおいては、self loop $\{v, v\}$ は考えない。頂点の集合 V, U に対し、 K'_V と $K'_{V,U}$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} K'_{V,U} &= \{ \{v, u\} \mid v \in V, u \in U, v \neq u \}, \\ K'_V &= K'_{V,V} = \{ \{v, u\} \mid v \neq u \in V \}. \end{aligned}$$

有限集合 V' と $E' \subset K'_{V'}$ の組 $G' = (V', E')$ を無向グラフと呼び、

$$\text{vertex}(E') = \{ v \in V' \mid \{v, u\} \in E' \text{ for some } u \in V' \}$$

とおく。

(V', K') を無向グラフとする。次の条件を満たす $E' \subset K'$ を (V', K') 内のマッチングという:

$$\{v, u\}, \{v, u'\} \in E' \implies u = u'.$$

この条件は、“どの頂点の次数 (その頂点を端点とする辺の数) も高々 1 である” とも言い替えられる。 $\mathcal{M}'(V', K')$ を (V', K') 内のマッチング全体からなる集合とする。また、完全グラフ $(V', K'_{V'})$ 内のマッチング全体からなる集合 $\mathcal{M}'(V', K'_{V'})$ を $\mathcal{M}'(V')$ で表す。また、 (V', K') 内のマッチング E' が $\text{vertex}(E') = V'$ を満たすとき、 E' は perfect であるという。(“どの頂点の次数もちょうど 1” という言い方も出来る。) $\mathcal{P}'(V', K')$ を (V', K') 内の perfect matchings からなる集合とする。また $\mathcal{P}'(V') = \mathcal{P}(V', K'_{V'})$ とする。

次に有向グラフについての記号を用意する。 v から w への有向辺を (v, u) で表す。 $v \neq u$ に対し、 $(v, u) \neq (u, v)$ である。なお、本稿では有向グラフにおいては、self loop (v, v) も含めて考える。また、以降でサイクルと言った場合は self loop も含めるものとする。頂点の集合 V, U に対して、 K_V と $K_{V,U}$ を

$$\begin{aligned} K_{V,U} &= \{ (v, u) \mid v \in V, u \in U \}, \\ K_V &= K_{V,V} = \{ (v, u) \mid v, u \in V \} \end{aligned}$$

で定義する。有限集合 V と $E \subset K_V$ の組 $G = (V, E)$ を有向グラフといい、 $\text{start}(E)$ と $\text{end}(E)$ を

次のように定義する:

$$\begin{aligned}\text{start}(E) &= \{ v \in V \mid (v, u) \in E \text{ for some } u \in V \}, \\ \text{end}(E) &= \{ u \in V \mid (v, u) \in E \text{ for some } v \in V \}.\end{aligned}$$

(V, K) を有向グラフとする. 次の 2 条件を満たす $E \subset K$ を (V, K) 内のマッチングという:

$$\begin{aligned}(v, u), (v, u') \in E &\implies u = u' \\ (v, u), (v', u) \in E &\implies v = v' .\end{aligned}$$

この条件は, “どの頂点の出次数 (その頂点を始点とする辺の数) も入次数 (その頂点を終点とする辺の数) も高々 1” と言い替えられる. (V, K) 内のマッチング全てからなる集合を $\mathcal{M}(V, K)$ で表す. マッチング $E \in \mathcal{M}(V, K)$ が $\text{start}(E) = V$ と $\text{end}(E) = V$ を満たすとき, perfect であるといい, $\mathcal{P}(V, K)$ で (V, K) 内の perfect matching 全てからなる集合を表す. Perfect matching であるための条件は “どの頂点の出次数も入次数も 1” とも言い替えられる. また, $\mathcal{M}(V) = \mathcal{M}(V, K_V)$, $\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V, K_V)$ とする.

Remark 2.1. $V \subset \mathbb{Z}$ とし, $\dot{V} = \{ \dot{v} \mid v \in V \}$, $\ddot{V} = \{ \ddot{v} \mid v \in V \}$ とする, ただし $\dot{l} = 2l - 1$, $\ddot{l} = 2l$ とする. このとき, 有向グラフ (V, E) と 2 部グラフ $(\dot{V}, \ddot{V}, \{ \{ \dot{v}, \ddot{u} \} \mid (v, u) \in E \})$ を同一視することができる. この同一視を通して, $\mathcal{M}(V, K)$ の元を 2 部グラフ $(\dot{V}, \ddot{V}, \{ \{ \dot{v}, \ddot{u} \} \mid (v, u) \in E \})$ 内のマッチングとすることができる. この意味で $\mathcal{M}(V, K)$ の元をマッチングと呼ぶ.

3 Definition of our polynomials

$l \in \mathbb{Z}$ に対して, $\dot{l} = 2l - 1$, $\ddot{l} = 2l$ とおく. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を fix し, 頂点集合 V, V' を次のように fix する: $V = [n] = \{ 1, \dots, n \}$, $\dot{V} = [\dot{n}] = \{ \dot{1}, \dots, \dot{n} \}$, $\ddot{V} = [\ddot{n}] = \{ \ddot{1}, \dots, \ddot{n} \}$, $V' = \dot{V} \amalg \ddot{V} = [\dot{n}] \amalg [\ddot{n}] = [2n]$.

まず, 有向グラフを考える. $E \in \mathcal{M}(V)$ とする. このとき (V, E) は弦のないサイクルまたはチェーンのいずれかである. $\text{len}(E)$ で (V, E) 内のサイクルの個数を表す. $V \setminus \text{start}(E)$ は (V, E) 内のチェーンの終点たちからなる集合であり, $V \setminus \text{end}(E)$ は始点たちからなる集合である. この事実に着目し, $\check{E}$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}\check{E} &= \{ (v, u) \in K_{V \setminus \text{start}(E), V \setminus \text{end}(E)} \mid E \text{ 内に } u \text{ から } v \text{ へのチェーンが存在する.} \} \\ &\subset K_V.\end{aligned}$$

Remark 3.1. $E \in \mathcal{M}(V)$ に対し, $\check{E}$ は次の条件を満たすものとして定義することも出来る:

- $\check{E} \in \mathcal{M}(V)$,
- $\check{E} \cap E = \emptyset$,
- $\check{E} \cup E \in \mathcal{P}(E)$,
- (V, E) の連結成分の総数と $(V, \check{E} \cup E)$ の連結成分の総数は等しい.

Remark 3.2. $E \in \mathcal{M}(V)$ に対して, $\text{len}(E)$ を次のように定義することも出来る:

$$\text{len}(E) = ((V, E) \text{ の連結成分の個数}) - |\check{E}|.$$

また, $E \in \mathcal{P}(V)$ と, $(i, j) \in E$ に対し $\sigma_E(i) = j$ となるような n 次対称群 S_n の元 σ_E を同一視することが出来るが, 任意の E に対し, $\text{len}(E)$ は σ_E のサイクルの数に等しい.

有向グラフ (V, E) と変数 $\mathbf{x} = (x_{i,j})$ に対し, weight monomial $\mathbf{x}^E$ を

$$\mathbf{x}^E = \prod_{(v,u) \in E} x_{v,u}$$

と定義する. これらの記法を用いて次の様に定義する:

Definition 3.3. $K \subset K_V$ に対し, $\det_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; K)$ と $\det_\alpha(\mathbf{x}; K)$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} \det_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; K) &= \sum_{E \in \mathcal{M}(V, K)} \alpha^{n - \text{len}(E)} \mathbf{x}^E \mathbf{y}^{\check{E}}, \\ \det_\alpha(\mathbf{x}; K) &= \sum_{E \in \mathcal{P}(V, K)} \alpha^{n - \text{len}(E)} \mathbf{x}^E. \end{aligned}$$

また, $\det_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; K_V)$, $\det_\alpha(\mathbf{x}) = \det_\alpha(\mathbf{x}; K_V)$ とおく.

Remark 3.4. 定義より $\det_\alpha(\mathbf{x}; K) = \det_\alpha(\mathbf{x}, 0; K)$.

次に, 無向グラフを考える. $\{\{\check{1}, \check{1}\}, \dots, \{\check{n}, \check{n}\}\} \subset K'_{\check{V}, \check{V}}$ という辺集合を E'_0 で表す. また $E' \in \mathcal{M}'(V')$ に対して, $\check{E}'$ と $\text{len}(E')$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} \check{E}' &= \left\{ \{v, u\} \in K'_{V' \setminus \text{vertex}(E'), V'} \mid E' \cup E'_0 \text{ に } v \text{ を } u \text{ 端点とするチェーンが存在する.} \right\} \\ \text{len}(E') &= ((V', E' \cup E'_0) \text{ の連結成分の総数}) - |\check{E}'|. \end{aligned}$$

Remark 3.5. $E' \in \mathcal{M}'(V')$ に対して, $\check{E}'$ は次の条件を満たすものとしても定義することができる:

- $\check{E}' \in \mathcal{M}'(V')$,
- $\check{E}' \cap E' = \emptyset$,
- $\check{E}' \cup E' \in \mathcal{P}'(E')$,
- $(V', E' \cup E'_0)$ の連結成分の総数と $(V', \check{E}' \cup E' \cup E'_0)$ の連結成分の総数が等しい.

Remark 3.6. $E' \in \mathcal{M}'(V')$ に対し, 多重辺を許す無向グラフ $(V', E' \amalg E'_0)$ を考える. この時, $(V', E' \amalg E'_0)$ の連結成分は弦のないサイクルもしくはチェーンのいずれかである. E' で使われていない頂点 $V' \setminus \text{vertex}(E')$ は $(V', E' \amalg E'_0)$ 内のチェーンの端点となっている. $(V', E' \amalg E'_0)$ 内のチェーンの端点のペアを集めたものが $\check{E}'$ である.

無向グラフ (V', E') と変数 $\mathbf{x} = (x_{i,j})$ に対し, weight monomial $\mathbf{x}^{E'}$ を

$$\mathbf{x}^{E'} = \prod_{\{v,u\} \in E'} x_{v,u}$$

と定義する. 任意の $v, u \in V'$ に対し $x_{v,u} = x_{u,v}$ となっていれば, $\mathbf{x}^{E'}$ は well-defined となる.

Definition 3.7. $K' \subset K'_{V'}$ に対し, $\text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; K')$ および $\text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}; K')$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} \text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; K') &= \sum_{E' \in \mathcal{M}'(V', K')} \alpha^{n-\text{len}(E')} \mathbf{x}^{E'} \mathbf{y}^{\check{E}'}, \\ \text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}; K') &= \sum_{E' \in \mathcal{P}'(V', K')} \alpha^{n-\text{len}(E')} \mathbf{x}^{E'}. \end{aligned}$$

また $\text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; K'_{V'})$, $\text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}) = \text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}; K'_{V'})$ とおく.

Remark 3.8. 定義より, $\text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}; K') = \text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}, 0; K')$.

Remark 3.9. 正方形行列 $A = (a_{ij})$ に対し, α -determinant (or α -permanent) は次のように定義される:

$$\det_\alpha(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha^{n-\text{len}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

この多項式は determinant および permanent の α -analogue である; すなわち, α -determinant は $\alpha = -1$ とすれば determinant であり, $\alpha = 1$ とすれば permanent である. (See also [13, 14].) Remark 3.2 での同一視を通して, α -determinant は我々の多項式 $\det_\alpha(A)$ そのものであることがわかる.

また [9] では α -Pfaffian という, skew-symmetric matrix A に対し次で定義される多項式が導入されている:

$$\text{Pf}_\alpha(A) = \sum_{E' \in \mathcal{P}'(V')} (-\alpha)^{n-\text{len}(E')} \text{sgn}(E') A^{E'}.$$

ただし $\text{sgn}(E') A^{E'}$ は $E' = \{\{x_{\dot{1}}, x_{\check{1}}\}, \dots, \{x_{\dot{n}}, x_{\check{n}}\}\}$ となる $x \in S_{2n}$ に対して $\text{sgn}(x) a_{x_{\dot{1}}, x_{\check{1}}} \cdots a_{x_{\dot{n}}, x_{\check{n}}}$ で定義される単項式であり, いま A は skew symmetric であるので $\text{sgn}(E') A^{E'}$ は $x \in S_{2n}$ の選び方によらずに決まる. α -Pfaffian は Pfaffian の α -analogue である, すなわち, $\alpha = -1$ で α -Pfaffian は通常の Pfaffian $\text{Pf}(A)$, i.e., $\sum \text{sgn}(x) a_{x_{\dot{1}} x_{\check{1}}} \cdots a_{x_{\dot{n}} x_{\check{n}}}$, に他ならない.

一方, symmetric matrix B に対して我々の多項式 $\text{Hf}_\alpha(B)$ は

$$\text{Hf}_\alpha(B) = \sum_{E' \in \mathcal{P}'(V')} \alpha^{n-\text{len}(E')} B^{E'}$$

であるが, これは, $\alpha = 1$ のとき, 通常の Hafnian $\text{Hf}(B) = \sum b_{x_{\dot{1}} x_{\check{1}}} \cdots b_{x_{\dot{n}} x_{\check{n}}}$ となる. この意味で我々の多項式は Hafnian の analogue である.

4 Main results

$\det_\alpha(x, y)$, $\text{Hf}_\alpha(x, y)$ を用い Wishart 分布のモーメントを記述することが出来る.

Proposition 4.1. $W = (w_{i,j}) \sim W_p(\nu, \Sigma, \Delta)$, すなわち, W は実 Wishart 分布 $W_p(\nu, \Sigma, \Delta)$ に従うとする. A と B を次で定義される行列とする: $a_{u,v} = \sigma_{u,v}$, $b_{u,v} = \delta_{u,v}$. このとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[w_{1,2}w_{3,4} \cdots w_{2n-1,2n}] &= \mathbb{E}[w_{\dot{1},\dot{1}}w_{\dot{2},\dot{2}} \cdots w_{\dot{n},\dot{n}}] \\ &= \nu^n \text{Hf}_{\nu^{-1}}(A, B) = \text{Hf}_{\nu^{-1}}(\nu A, \nu B).\end{aligned}$$

ここから次が導かれる:

Theorem 4.2. A と B を次で定義される行列とする: $a_{u,v} = \sigma_{i_u, i_v}$, $b_{u,v} = \delta_{i_u, i_v}$. $W \sim W_p(\nu, \Sigma, \Delta)$ に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[w_{i_1, i_2}w_{i_3, i_4} \cdots w_{i_{2n-1}, i_{2n}}] &= \mathbb{E}[w_{i_{\dot{1}}, i_{\dot{1}}}w_{i_{\dot{2}}, i_{\dot{2}}} \cdots w_{i_{\dot{n}}, i_{\dot{n}}}] \\ &= \nu^n \text{Hf}_{\nu^{-1}}(A, B) = \text{Hf}_{\nu^{-1}}(\nu A, \nu B).\end{aligned}$$

また, 複素 Wishart 分布については次が成り立つ:

Proposition 4.3. $W = (w_{i,j}) \sim CW_p(\nu, \Sigma, \Delta)$ とし, A, B は次で定義される行列とする: $a_{u,v} = \sigma_{\dot{u}, \dot{v}}$, $b_{u,v} = \delta_{\dot{u}, \dot{v}}$. この時次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[w_{1,2}w_{3,4} \cdots w_{2n-1,2n}] &= \mathbb{E}[w_{\dot{1},\dot{1}}w_{\dot{2},\dot{2}} \cdots w_{\dot{n},\dot{n}}] \\ &= \nu^n \det_{\nu^{-1}}(A, B) = \det_{\nu^{-1}}(\nu A, \nu B).\end{aligned}$$

これから, 次が導かれる:

Theorem 4.4. A, B を次を満たす行列とする: $a_{u,v} = \sigma_{i_u, i_v}$, $b_{u,v} = \delta_{i_u, i_v}$. このとき, $W = (w_{i,j}) \sim CW_p(\nu, \Sigma, \Delta)$ に対し次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[w_{i_1, i_2}w_{i_3, i_4} \cdots w_{i_{2n-1}, i_{2n}}] &= \mathbb{E}[w_{i_{\dot{1}}, i_{\dot{1}}}w_{i_{\dot{2}}, i_{\dot{2}}} \cdots w_{i_{\dot{n}}, i_{\dot{n}}}] \\ &= \nu^n \det_{\nu^{-1}}(A, B) = \det_{\nu^{-1}}(\nu A, \nu B).\end{aligned}$$

Remark 4.5. この定理により, パラメータが特別な値であるときには, Wishart 分布のモーメントの計算は, 条件をみたすグラフの数え上げに帰着できる. 詳細は [5, 12] に譲る.

Remark 4.6. Wishart 分布は基本的な多変量分布のうちのひとつであり, そのモーメントについてもよく研究されており, 特に中心 Wishart 分布については, Lu, Richards [7]; Graczyk, Letac, Massam [3, 4]; Vere-Jones [13] などの先行研究がある. また, 最近では Letac, Massam [6] による非心 Wishart 分布のモーメントに関する研究結果もあり, 本稿とは異なるタイプの公式が与えられている. 一方, 中心 Wishart 分布においては, 逆行列についてのモーメントに関しても, Matsumoto [10] などの結果がある.

参考文献

- [1] Bai, Z. D. (1999). Methodologies in spectral analysis of large dimensional random matrices, A review. *Statist. Sinica*, **9**, 611–677.
- [2] Goodman, N. R. (1963). Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution (An introduction). *Ann. Math. Statist.*, **34**, 152–177.
- [3] Graczyk, P., Letac, G. and Massam, H. (2003). The complex Wishart distribution and the symmetric groups. *Ann. Statist.*, **31**, 287–309.
- [4] Graczyk, P., Letac, G. and Massam, H. (2005). The hyperoctahedral group, symmetric group representations and the moments of the real Wishart distribution. *J. Theor. Probab.*, **18**, 1–42.
- [5] Kuriki, S. and Numata, Y. (2009). Graph representations for moments of noncentral Wishart distributions and their applications. Submitted. [arXiv:0912.0577v1](#)
- [6] Letac, G. and Massam, H. (2008). The noncentral Wishart as an exponential family, and its moments. *J. Multivariate Anal.*, **99**, 1393–1417.
- [7] Lu, I-L. and Richards, D. St. P. (2001). MacMahon’s master theorem, representation theory, and moments of Wishart distributions. *Adv. Appl. Math.*, **27**, 531–547.
- [8] Maiwald, D. and Kraus, D. (2000). Calculation of moments of complex Wishart and complex inverse Wishart distributed matrices. *IEEE Proc.-Radar, Sonar Navig.*, **147**, 162–168.
- [9] Matsumoto, S. (2005) α -Pfaffian, pfaffian point process and shifted Schur measure. *Linear Algebra and its Applications*, **403**, 369–398.
- [10] Matsumoto, S. (2010) General moments of the inverse real Wishart distribution and orthogonal Weingarten functions, [arXiv:1004.4717v2](#)
- [11] Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. John Wiley & Sons
- [12] Numata, Y. and Kuriki, S. (2009). On formulas for moments of the Wishart distributions as weighted generating functions of matchings, DMTCS Proceedings, 22nd International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2010), pp. 953-964. (online journal)
- [13] Vere-Jones, D. (1988). A generalization of permanents and determinants. *Linear Algebra Appl.*, **111**, 119–124.
- [14] Vere-Jones, D. (1997). Alpha-permanents and their applications to multivariate gamma, negative binomial and ordinary binomial distributions. *New Zealand J. Math.*, **26**, 125–149.