Verma 加群の間の拡大と R 多項式

阿部 紀行*

1 はじめに

加群の族 $\{M_i\}$ が与えられているとき、そのような加群の拡大で得られるような加群全体を考えることができる。原理的には、各々の i, j について M_i と M_j の拡大の様子が十分に理解できていれば、そのような加群も理解が可能はずである。たとえば、 $\{M_i\}$ が既約表現全体である場合は、有限の長さを持つ加群全体を考えることになる。有限次元代数の表現論における叢の道代数の理論は、各々の M_i と M_j の間の拡大の様子から一般の有限の長さを持つ加群を記述する理論であるともいえると思う。

さて、 $\{M_i\}$ として Verma 加群を考えよう。Verma 加群を考える動機としては、以下の二つがある。

- 実半単純 Lie 群の主系列表現の Jacquet 加群は特別な場合には Verma 加群の拡大により得られる [Abe08].
- 圏 $\mathcal{O}$ の射影対象は Verma 加群による拡大で得られる。

この場合、 M_i と M_j の間の拡大の様子も知られていなければ、それらの拡大の様子から一般の加群を記述する方法も知られていない。本論では、 M_i と M_j の間の拡大を調べる試み [Abe] を紹介する。

2 Gabber-Joseph 予想

まずいくつか設定をおこなう。 $\mathfrak{g}$ を複素半単純 Lie 代数とし、Borel 部分代数 $\mathfrak{b}$ と Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$ を固定する。それにより、ルート系 Δ 、正ルート系 $\Delta^+ \subset \Delta$ 、単純ルート全体のなす集合 Π 、Weyl 群 W 、単純鏡映全体 S が定まる。また、データ $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ は Bernstein-Gelfand-Gelfand の圏 $\mathcal{O}$ を定める。以下、 Hom や Ext は全てこの圏で考えることとする。 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して、 $\mathcal{O}_\lambda$ を一般無限小指標が λ であるような対象全体のなす $\mathcal{O}$ の充満部分圏とする。 ρ を正ルートの和の半分とし、 $\mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して $M(\mu)$ を最高ウェイトが $\mu - \rho$ である Verma 加群とする。このとき、 $M(\mu)$ の無限小指標は μ であるから、 $M(\mu) \in \mathcal{O}_\lambda$ であるための必要十分条件は $\mu \in W\lambda$ である。

以下、支配的かつ整な $\lambda \in \mathfrak{h}^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$ を固定する。 λ が正則である時には、

* 東京大学大学院数理科学研究科

$\text{Ext}^i(M(x\lambda), M(y\lambda))$ に関して次の結果が知られている.

定理 2.1 (Gabber-Joseph [GJ81]) λ が正則であると仮定する. $x, y \in W$ とし, $s \in W$ を単純鏡映であって $xs > x$ かつ $ys < y$ を満たすものとする. このとき, 次が成り立つ.

(1)

$$\text{Ext}^k(M(xs\lambda), M(y\lambda)) \simeq \text{Ext}^k(M(x\lambda), M(ys\lambda)).$$

(2)

$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}^k(M(x\lambda), M(y\lambda)) &\geq \dim \text{Ext}^k(M(xs\lambda), M(y\lambda)) \\ &\quad + \dim \text{Ext}^{k-1}(M(xs\lambda), M(y\lambda)) - \dim \text{Ext}^{k-1}(M(xs\lambda), M(ys\lambda)). \end{aligned}$$

予想 2.2 定理 2.1 (2) において, 等号が成り立つ.

この予想は Gabber-Joseph 予想と呼ばれていた. (Gabber と Joseph が予想したわけではないが.) この予想は, 次のように R 多項式の言葉でも述べることができる. $\mathbb{H} = \bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q, q^{-1}]T_x$ を W の Hecke 環とする. ℓ を W の長さ関数とする. $x, y \in W$ に対して,

$$(T_{y^{-1}})^{-1} = \sum_{x \in W} R_{x,y}(q^{-1})q^{-\ell(x)}T_x$$

により多項式 $R_{x,y}$ を定義する [KL79]. このとき, 予想 2.2 は次と同値である.

予想 2.3 λ が正則であるとする. $x, y \in W$ に対して

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^{\ell(y) - \ell(x) - i} q^i \dim \text{Ext}^i(M(x\lambda), M(y\lambda)) = R_{y,x}(q)$$

が成り立つ.

どちらにせよ, この予想が正しければ帰納的に $\dim \text{Ext}^i(M(x\lambda), M(y\lambda))$ を計算することがわかる. Boe は実際にこの計算を実行し, 係数の符号が予想の示すものと違う (つまり, Ext^i の次元が負になる) 場合があることを発見した.

定理 2.4 (Boe [Boe92]) 予想 2.2 は正しくない.

本論では, $R_{x,y}$ の係数と実際の Ext^i の次元を $i = 1$ の場合に比較する.

3 空間 $V_\lambda(x, y)$

まず, 次の定理を思い出そう. λ は一般の整かつ支配的な元とする.

定理 3.1 $x, y \in W$ とする.

(1) $\dim \text{Hom}(M(x\lambda), M(y\lambda))$ は 1 以下である.

(2) $\dim \text{Hom}(M(x\lambda), M(y\lambda)) = 1$ と, ある $w \in \text{Stab}_W(\lambda)$ が存在して $x \geq yw$ となることは同値.

(3) 0 でない準同型 $M(x\lambda) \rightarrow M(y\lambda)$ は単射である。

特に単射準同型 $M(x\lambda) \hookrightarrow M(\lambda)$ が定数倍を除きただ一つ存在する。これにより、 $M(x\lambda)$ を $M(\lambda)$ の部分加群と見なすこととする。 w_0 を W の最長元とすれば、 $M(w_0\lambda) \subset M(x\lambda)$ が全ての $x \in W$ に対して成り立つ。このことを用いて、次のように定義する：

$$V_\lambda(x, y) = \text{Im}(\text{Ext}^1(M(x\lambda), M(y\lambda)) \rightarrow \text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(\lambda))).$$

命題 3.2 $x \geq y$ とする。このとき、 $\text{Ext}^1(M(x\lambda), M(y\lambda)) \rightarrow \text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(\lambda))$ の核は $\text{Hom}(M(x\lambda), M(\lambda)/M(y\lambda))$ と同型である。

残念ながらこの核が 0 にならない例は存在する。(0 になる例も数多くある。) また、この核の次元を一般に計算するのは難しいと思われる。一方で、次の定理はこの核が Gabber-Joseph 予想の成立しない具合を表していることを示している。

定理 3.3 λ が正則であるとする。 $x, y \in W$ に対して、 $\dim V_\lambda(x, y)$ は $(-1)^{\ell(y) - \ell(x) - 1} R_{y, x}(q)$ における q の係数に一致する。

つまり、 $V_\lambda(x, y)$ は Gabber-Joseph 予想を満たす。より詳しく、 $V_\lambda(x, y)$ は次を用いて計算することができる。 $e \in W$ を単位元とする。

定理 3.4 λ が正則であるとする。

(1) $V_\lambda(w_0, e) = \text{Ext}^1(M(w_0), M(e))$ は W 加群の構造を持ち、 W 加群として $\mathfrak{h}^*$ と同型である。

(2) $x, y \in W$ とし、 $s \in W$ を $xs > x$ なる単純鏡映とする。 $v_s \in V_\lambda(w_0, e) \simeq \mathfrak{h}^*$ を、 s に対応する単純ルートとする。

(a) $ys < y$ ならば $V_\lambda(xs, y) = s(V_\lambda(x, ys))$ 。

(b) $ys > y$ ならば $V_\lambda(xs, y) = \mathbb{C}v_s + s(V_\lambda(x, y))$ 。

定理 3.3 はここから従う。

一般の λ に対しては次のようになる。 λ_0 を整、支配的、正則な $\mathfrak{h}^*$ の元とし、 $T_{\lambda_0}^\lambda: \mathcal{O}_{\lambda_0} \rightarrow \mathcal{O}_\lambda$ を移送関手とすると、 $T_{\lambda_0}^\lambda(M(x\lambda_0)) = M(x\lambda)$ であるから、 $\text{Ext}^1(M(x\lambda_0), M(y\lambda_0)) \rightarrow \text{Ext}^1(M(x\lambda), M(y\lambda))$ を導く。これにより、 $T_{\lambda_0}^\lambda: V_{\lambda_0}(x, y) \rightarrow V_\lambda(x, y)$ を得る。

定理 3.5 $T_{\lambda_0}^\lambda: V_{\lambda_0}(x, y) \rightarrow V_\lambda(x, y)$ は全射であり、 $T_{\lambda_0}^\lambda: V_{\lambda_0}(w_0, e) \rightarrow V_\lambda(w_0, e)$ の核は $\{v_s \mid s \in S, s\lambda = \lambda\}$ の張る部分空間である。

4 W 加群構造

整、支配的、正則な λ を固定する。 $V_\lambda(w_0, e)$ への W の作用の定義及び、 W 表現として $\mathfrak{h}^*$ と同型になることを述べる。

$s \in S$ を固定し、 $\theta_s: \mathcal{O}_\lambda \rightarrow \mathcal{O}_\lambda$ を s 壁越え関手とする。つまり、 $\lambda_s \in \mathfrak{h}^*$ を整、支配的で $\text{Stab}_W(\lambda_s) =$

$\{e, s\}$ となるものとして固定し, $\theta_s = T_{\lambda_s}^\lambda \circ T_{\lambda}^{\lambda_s}$ とおく. 定義から, 自然変換 $\text{Id} \rightarrow \theta_s \rightarrow \text{Id}$ が存在する. そこで, $C_s = \text{Cok}(\text{Id} \rightarrow \theta_s)$ とおく. このとき, 合成 $M \rightarrow \theta_s M \rightarrow M$ が 0 であれば $C_s M \rightarrow M$ が存在する. 特に $M = M(x\lambda)$ の時に合成 $M(x\lambda) \rightarrow \theta_s M(x\lambda) \rightarrow M(x\lambda)$ は 0 であることが知られているため, 準同型 $C_s M(x\lambda) \rightarrow M(x\lambda)$ を得る. LC_s を C_s の導来関手とする. このとき, 次が成立する.

補題 4.1 $s \in S, x \in W$ とする.

(1) $k > 0$ ならば $L^k C_s(M(x\lambda)) = 0$.

(2) $C_s M(w_0\lambda) \rightarrow M(w_0\lambda)$ から導かれる準同型 $\text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(\lambda)) \rightarrow \text{Ext}^1(C_s M(w_0\lambda), M(\lambda))$ は同型である.

この事実を用いて, $s \in S$ の $V_\lambda(w_0, e) = \text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(\lambda))$ への作用を次のように定める. $D^b(\mathcal{O})$ を $\mathcal{O}$ の有界導来圏とする.

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(\lambda)) &= \text{Hom}_{D^b(\mathcal{O})}(M(w_0\lambda), M(\lambda)[1]) \\ &\rightarrow \text{Hom}_{D^b(\mathcal{O})}(LC_s M(w_0\lambda), LC_s M(\lambda)[1]) \simeq \text{Hom}_{D^b(\mathcal{O})}(C_s M(w_0\lambda), C_s M(\lambda)[1]) \\ &= \text{Ext}^1(C_s M(w_0\lambda), C_s M(\lambda)) \rightarrow \text{Ext}^1(C_s M(w_0\lambda), M(\lambda)) \simeq \text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(\lambda)). \end{aligned}$$

または次のようにも書くことができる. $v \in \text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(\lambda))$ に対応する完全系列 $0 \rightarrow M(\lambda) \rightarrow X \rightarrow M(w_0\lambda) \rightarrow 0$ をとる. このとき, $L^1 C_s M(w_0\lambda) = 0$ から $0 \rightarrow C_s M(\lambda) \rightarrow C_s X \rightarrow C_s M(w_0\lambda) \rightarrow 0$ は完全であり, さらに上の補題から次を可換図式とする完全系列 $0 \rightarrow M(\lambda) \rightarrow X' \rightarrow M(w_0\lambda) \rightarrow 0$ が同型を除きただ一つ存在する.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_s M(\lambda) & \longrightarrow & C_s X & \longrightarrow & C_s M(w_0\lambda) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M(\lambda) & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & M(w_0\lambda) \longrightarrow 0. \end{array}$$

このとき, $s(v)$ は $0 \rightarrow M(\lambda) \rightarrow X' \rightarrow M(w_0\lambda) \rightarrow 0$ の定める $\text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(\lambda))$ の元となる.

この作用が W の作用を定めるためには, 組紐関係式及び $s^2 = 1$ を確認する必要がある. C_s が組紐関係式を満たしている [MS05] ので, s も組紐関係式を満たす. 従って, $s^2 = 1$ を示せばよい. そのために, $\alpha_s: V_\lambda(w_0, e) \rightarrow \mathbb{C}$ を次で定める. $v \in V_\lambda(w_0, e) = \text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(\lambda))$ に対して, 対応する完全系列 $0 \rightarrow M(\lambda) \rightarrow X \rightarrow M(w_0\lambda) \rightarrow 0$ をとり, 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M(\lambda) & \longrightarrow & X & \longrightarrow & M(w_0\lambda) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \theta_s M(\lambda) & \longrightarrow & \theta_s X & \longrightarrow & \theta_s M(w_0\lambda) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M(\lambda) & \longrightarrow & X & \longrightarrow & M(w_0\lambda) \longrightarrow 0. \end{array}$$

縦の列は自然変換である。 $M(\lambda) \rightarrow \theta_s M(\lambda) \rightarrow M(\lambda)$ と $M(w_0\lambda) \rightarrow \theta_s M(w_0\lambda) \rightarrow M(w_0\lambda)$ はともに 0 であったから、 $X \rightarrow \theta_s X \rightarrow X$ は $X \rightarrow M(w_0\lambda)$ 及び $M(\lambda) \rightarrow X$ を経由することがわかる。従って $\text{Hom}(M(w_0\lambda), M(\lambda))$ を得るが、包含写像 $M(w_0\lambda) \rightarrow M(\lambda)$ を基底にとり $\text{Hom}(M(w_0\lambda), M(\lambda)) = \mathbb{C}$ と同一視することで、 $\alpha_s(v) \in \mathbb{C}$ を得る。 α_s が $\mathbb{C}$ 線形であることはすぐにわかる。以下の事実は定義からすぐに確認できる。

補題 4.2 $\alpha_s(v) = 0$ ならば $s(v) = v$.

よって、 $\text{Ker } \alpha_s$ 上では $s^2 = 1$ であるから、適当な $\text{Ker } \alpha_s$ に入っていない元をとり、その元に対して $s^2 = 1$ が成立することを示せば良い。次の完全列に対応する $\text{Ext}^1(M(w_0s\lambda), M(w_0\lambda))$ の元を考える。

$$0 \rightarrow M(w_0s\lambda) \rightarrow \theta_s M(w_0\lambda) \rightarrow M(w_0\lambda) \rightarrow 0.$$

ただし、 $\theta_s M(w_0\lambda) \rightarrow M(w_0\lambda)$ は自然変換であり、 $M(w_0s\lambda) \rightarrow \theta_s M(w_0\lambda)$ は $M(w_0\lambda) \hookrightarrow M(w_0s\lambda) \rightarrow \theta_s M(w_0\lambda)$ が自然変換になるようにとる。

補題 4.3 この完全系列に対応する元は $\text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(w_0s\lambda))$ の基底をあたえる。また、 $\text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(w_0s\lambda)) \rightarrow \text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(\lambda))$ は単射である。

さきほどの完全系列の $\text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(w_0s\lambda)) \rightarrow \text{Ext}^1(M(w_0\lambda), M(\lambda))$ による像を v_s と書く。(前節と同じ記号を用いたが、定数倍を除き同じのものを与えることが後からわかる。)

$M(w_0\lambda)$ は既約であり、 $M(w_0s\lambda)$ は長さ 2。またこれらの既約成分の生成する部分圏は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の圏 $\mathcal{O}$ と同値な圏を生成することに注意しよう。従って、 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の場合に計算をおこなうことで、次がわかる。

補題 4.4 $\alpha_s(v_s) = 2$, $s(v_s) = -v_s$.

よって、 $s^2 = 1$ である。さらに、 $s(v) = v - \alpha_s(v)v_s$ であることもわかる。

W 表現として $V_\lambda(w_0, e) \simeq \mathfrak{h}^*$ であることの証明の概要を述べる。Mazorchuk [Maz07] の議論から、 $\{v_s\}_{s \in S}$ は $V_\lambda(w_0, e)$ の基底となる。次の補題は、 $s(v) = v - \alpha_s(v)v_s$ という形で作用が与えられていることと W が有限群であることから従う。

補題 4.5 $s, s' \in S$ に対して $m_{s, s'}$ を ss' の $\text{End}(V_\lambda(w_0, e))$ における位数とする。このとき、適当な $0 \neq v'_s \in V_\lambda(w_0, e)$ が存在し、 $s(v'_s) = v'_s - 2 \cos(\pi/m'_{s, s'})v'_s$ が成り立つ。

v'_s が実際には v_s の定数倍であることも容易である。一方、半単純 Lie 環の分類から、 $m_{s, s'}$ を ss' の W における位数とすれば、 $s(v''_s) = v''_s - 2 \cos(\pi/m_{s, s'})v''_s$ となる $v''_s \in \mathfrak{h}^*$ が存在することがわかる。従って、 $m_{s, s'} = m'_{s, s'}$ を示せば良いが、これは基本的には階数 2 の問題であり、階数 2 の場合の具体的な計算から従う。

参考文献

- [Abe] N. Abe, *First extension groups of Verma modules and R -polynomials*, preprint.
- [Abe08] N. Abe, *Jacquet modules of principal series generated by the trivial K -type*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), no. 4, 1169–1197.
- [Boe92] B. D. Boe, *A counterexample to the Gabber-Joseph conjecture*, Kazhdan-Lusztig theory and related topics (Chicago, IL, 1989), Contemp. Math., vol. 139, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 1–3.
- [GJ81] O. Gabber and A. Joseph, *Towards the Kazhdan-Lusztig conjecture*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **14** (1981), no. 3, 261–302.
- [KL79] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53** (1979), no. 2, 165–184.
- [Maz07] V. Mazorchuk, *Some homological properties of the category $\mathcal{O}$* , Pacific J. Math. **232** (2007), no. 2, 313–341.
- [MS05] V. Mazorchuk and C. Stroppel, *Translation and shuffling of projectively presentable modules and a categorification of a parabolic Hecke module*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 7, 2939–2973 (electronic).