

Weyl module および Demazure module と 有限 crystal との関係について

東京大学大学院数理科学研究科 直井 克之 (Katsuyuki Naoi)*

概要

current algebra $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ の (indecomposable かつ irreducible でない) 有限次元表現の重要な例である Weyl module の character と、quantum affine algebra の level zero fundamental module の tensor 積に付随する有限 crystal の character が一致し、またそれらが Demazure module の character を用いて表されることについて解説する

1 Introduction

Weyl module $W(\lambda)$ (λ は simple Lie algebra $\mathfrak{g}$ の dominant integral weight) は weight λ の (適当な意味での) highest weight $\mathcal{C}\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ -module で有限次元となるものの中で universal なものであり、生成元と関係式によって定義される. Fourier と Littelmann は [FoLi] において、 $\mathfrak{g}$ が simply laced type の場合に Weyl module が Demazure module と同型となることを示した. また彼らは、 $\mathfrak{g}$ が simply laced type であるという仮定のもとで以下の事実も示した: $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の level zero fundamental weight module を $W_q(\varpi_i)$ と表す. ($W_q(\varpi_i)$ は crystal base $\mathcal{B}'(\varpi_i)$ を持つ [K3]). また、 $\lambda = \sum_i \lambda_i \varpi_i$ ($\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に対し $W_q(\lambda) := \bigotimes_i W_q(\varpi)^{\otimes \lambda_i}$ の crystal base を $\mathcal{B}'(\lambda)$, highest weight Λ_0 の irreducible highest weight $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -module に付随する crystal base を $\mathcal{B}(\Lambda_0)$ と表す. このとき、 $\mathcal{B}(\Lambda_0) \otimes \mathcal{B}'(\lambda)$ の部分集合 $u_{\Lambda_0} \otimes \mathcal{B}'(\lambda)$ は Demazure crystal と同型となる. (ここで、 u_{Λ_0} は $\mathcal{B}(\Lambda_0)$ の highest weight element とする).

これらの結果は $\mathfrak{g}$ が non-simply laced type の場合には正しくない. そもそもこの場合には、Weyl module は Demazure module と同型にならない.

本稿では、上に述べた結果の non-simply laced case への一般化について述べる. すでに述べたようにそのままの形で拡張されるのではなく、以下のような結果が成り立つ:

* naoik@ms.u-tokyo.ac.jp 日本学術振興会特別研究員 (DC1)

(1) Weyl module は各 subquotient が Demazure module と同型となるような filtration を持つ.

(2) また, $u_{\Lambda_0} \otimes \mathcal{B}'(\lambda)$ は Demazure crystal の直和となり, その直和因子と Weyl module の filtration において subquotient として現れる Demazure module たちは (適当な意味で) 一致する.

$\mathcal{B}'(\lambda)$ には energy function と呼ばれる $\mathbb{Z}$ に値を持つ関数が定義される. 上の (2) を示すとき, 同時に $\mathcal{B}'(\lambda)$ の energy function こみの weight の和に関する等式も得られる. この結果は $\mathfrak{g}$ が type A の場合には [S] により既に知られていたが, 少なくとも $\mathfrak{g}$ が non-simply laced type の場合には新しい結果である.

2 Notation

以下の記号を準備しておく:

$\mathfrak{g}$: complex simple Lie algebra, $\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra,

$\Delta \subset \mathfrak{h}^*$: $\mathfrak{g}$ の root system, $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$: $\alpha \in \Delta$ に対応する coroot,

$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$: 三角分解,

$\Delta_+ \subseteq \Delta$: $\mathfrak{n}_+$ に対応する positive roots,

$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$: simple roots, $I = \{1, \dots, n\}$: index set,

$\theta \in \Delta_+$: highest root,

$(\ , \)$: non-degenerate, invariant, symmetric bilinear form on $\mathfrak{g}$ normalized by $(\theta^\vee, \theta^\vee) = 2$,

$Q = \sum_i \mathbb{Z}\alpha_i$, $Q_+ = \sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$,

$\{\varpi_1, \dots, \varpi_n\}$: fundamental weights, $P = \sum_i \mathbb{Z}\varpi_i$, $P_+ = \sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i$,

$s_i \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}^*)$: α_i に付随する simple reflection, $W = \langle s_i \mid i \in I \rangle$: $\mathfrak{g}$ の Weyl 群,

$\{e_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_+} \cup \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$: $\mathfrak{g}$ の Shevalley basis とし, $e_i = e_{\alpha_i}$, $f_i = f_{\alpha_i}$ とおく.

また, $\widehat{\mathfrak{g}}$ を non-twisted affine Lie algebra とし, $\widehat{\mathfrak{h}}, \widehat{\mathfrak{n}}_+, \widehat{\mathfrak{n}}_-, \widehat{\Delta}, \widehat{\Delta}_+, \widehat{\Pi}, \widehat{P}, \widehat{W}$ をそれぞれの $\widehat{\mathfrak{g}}$ における対応物とする. (index set は $\widehat{I} = I \cup \{0\}$ とする.)

以下、自然に $\mathfrak{g} \subset \widehat{\mathfrak{g}}$ とみなす.

$\{\Lambda_0, \dots, \Lambda_n\} \subset \widehat{P}$: fundamental weights corresponding to $\{\alpha_0^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$,

$\delta \in \widehat{P}$: null root, $\widehat{P}_+ := \sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\Lambda_i + \mathbb{Z}\delta$,

$K \in \widehat{\mathfrak{h}}$: central element such that $\langle \Lambda_0, K \rangle = 1$, $d \in \widehat{\mathfrak{h}}$: degree operator,

以下 $\varpi_i(K) = \varpi_i(d) = 0$ として, 常に P を $\widehat{P}$ の部分集合とみなす.

3 Demazure modules

$\Lambda \in \widehat{P}_+$ に対し, $V(\Lambda)$ で $\widehat{\mathfrak{g}}$ の highest weight Λ の irreducible highest weight module を表す. 本稿では Demazure module を以下で定義する:

定義. $\lambda \in P_+$, $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $\Lambda \in \widehat{P}_+$ で $\lambda + \ell\Lambda_0 \in \widehat{W}\Lambda$ となるものがただ一つ存

在する. このとき, $V(\Lambda)$ の weight $\lambda + \ell\Lambda_0$ の extremal weight vector $v_{\lambda+\ell\Lambda_0}$ が生成する $\mathcal{C}\mathfrak{g}$ -module $U(\mathcal{C}\mathfrak{g}).v_{\lambda+\ell\Lambda_0}$ を $D(\ell, \lambda)$ と表し, level ℓ , weight λ の Demazure module と呼ぶ.

注. 通常 Demazure module は $V(\Lambda)$ の extremal weight vector から生成される $\widehat{\mathfrak{b}} (= \widehat{\mathfrak{h}} + \widehat{\mathfrak{n}})$ -module として定義される. 本稿では, $\mathcal{C}\mathfrak{g}$ -module の構造をもつような Demazure module にのみ興味があるため, 上のような定義をした. vector space として

$$D(\ell, \lambda) = U(\widehat{\mathfrak{b}}).v_{w_0\lambda+\ell\Lambda_0}$$

(w_0 は W の longest element) が成り立つことが容易に確認できる.

Demazure module の定義関係式は以下であることが知られている ([M], [FoLi]).

命題 1. Demazure module $D(\ell, \lambda)$ は, 以下の定義関係式で $v \neq 0$ から生成される cyclic $\mathcal{C}\mathfrak{g}$ -module と同型である:

$$\mathfrak{n}_+ \otimes \mathbb{C}[t].v = 0, \quad \mathfrak{h} \otimes t\mathbb{C}[t].v = 0, \quad h.v = \lambda(h)v \text{ for } h \in \mathfrak{h},$$

$$(f_\alpha \otimes t^s)^{k_{\alpha,s}+1}.v = 0 \text{ for all } \alpha \in \Delta_+, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

ただし

$$k_{\alpha,s} = \max \left\{ 0, \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle - \frac{\ell(\theta, \theta)}{(\alpha, \alpha)} \right\}. \quad \square$$

t の degree により, $U(\mathcal{C}\mathfrak{g})$ は自然な $\mathbb{Z}$ -grading を持つ. また上の $D(\ell, \lambda)$ の定義関係式から, $D(\ell, \lambda)$ は $\mathbb{Z}$ -graded $U(\mathcal{C}\mathfrak{g})$ -module となることもわかる. そこで以下, $D(\ell, \lambda)$ の命題 1 における生成元 v の degree を $m \in \mathbb{Z}$ と定めることで得られる $\mathbb{Z}$ -graded $U(\mathcal{C}\mathfrak{g})$ -module を $D(\ell, \lambda)[m]$ と表すことにする.

[J2] における結果から, 以下が従う:

定理 2. ([J2]) $\mathfrak{g}$ が simply laced type であると仮定する. このとき, 任意の正整数の組 $\ell' > \ell$ と $\lambda \in P_+$ に対し, $D(\ell, \lambda)[0]$ には $\mathbb{Z}$ -graded $\mathcal{C}\mathfrak{g}$ -module filtration

$$X_0 = 0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_k = D(\ell, \lambda)[0]$$

で, 各 subquotient が

$$X_i/X_{i-1} \cong D(\ell', \mu_i)[m_i] \text{ for some } \mu_i \in P_+, m_i \in \mathbb{Z}$$

となるものが存在する. $\square$

注. [J2] の結果は, 任意の Kac-Moody Lie algebra に付随する Quantized enveloping algebra の Demazure module (classical と同様に定義することができる) に関する結果である. 上の定理は, [J2] の結果の classical limit をとること得られる.

4 Weyl modules

定義. $\lambda \in P_+$ に対し $\mathcal{C}\mathfrak{g}$ -module $W(\lambda)$ を以下の関係式によって $v \neq 0$ から生成される cyclic module として定義する:

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_+ \otimes \mathbb{C}[t].v &= 0, \quad \mathfrak{h} \otimes t\mathbb{C}[t].v = 0, \quad h.v = \lambda(h)v \text{ for } h \in \mathfrak{h}, \\ f_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)+1}.v &= 0 \text{ for } i \in I. \end{aligned} \quad (1)$$

$W(\lambda)$ も $D(\ell, \lambda)$ の場合と同様に, $\mathbb{Z}$ -graded structure を考えるときには $W(\lambda)[m]$ ($m \in \mathbb{Z}$) と表すことにする.

注. $W(\lambda)$ は (1) を満たすような v から生成される有限次元 $\mathcal{C}\mathfrak{g}$ -module の中で universal なものである ([CP], [FoLi]).

ここで

$$I^{\text{sh}} = \{i \in I \mid \alpha_i \text{ は short root}\}, \quad \Pi^{\text{sh}} = \{\alpha_i \mid i \in I^{\text{sh}}\}$$

とおき ($\mathfrak{g}$ が simply laced type の場合、 $I^{\text{sh}} = \emptyset$ とする), Δ の subroot system $\langle \Pi^{\text{sh}} \rangle$ を

$$\langle \Pi^{\text{sh}} \rangle = \left(\sum_{i \in I^{\text{sh}}} \mathbb{Z}\alpha_i \right) \cap \Delta$$

と定める. また, $\mathfrak{h}$ の部分空間 $\mathfrak{h}^{\text{sh}}$ を $\mathfrak{h}^{\text{sh}} := \bigoplus_{i \in I^{\text{sh}}} \mathbb{C}\alpha_i^\vee$ とし, $\mathfrak{g}$ の Lie subalgebra $\mathfrak{g}^{\text{sh}}$ を

$$\mathfrak{g}^{\text{sh}} = \bigoplus_{\alpha \in \langle \Pi^{\text{sh}} \rangle \cap \Delta_+} (\mathbb{C}e_\alpha + \mathbb{C}f_\alpha) \oplus \mathfrak{h}^{\text{sh}}$$

とおく. このとき,

$$\mathfrak{g}^{\text{sh}} \cong \begin{cases} \{0\} & \mathfrak{g} \text{ は type A, D, E,} \\ \mathfrak{sl}_2 & \mathfrak{g} \text{ は type B}_n, \text{ G}_2, \\ \mathfrak{sl}_3 & \mathfrak{g} \text{ は type F}_4, \\ \mathfrak{sl}_{n-1} & \mathfrak{g} \text{ は type C}_n. \end{cases}$$

canonical projection: $\mathfrak{h}^* \rightarrow (\mathfrak{h}^{\text{sh}})^*$ の $\sum_{i \in I^{\text{sh}}} \mathbb{C}\alpha_i$ への制限は同型写像となる. 以下, その逆写像により $(\mathfrak{h}^{\text{sh}})^*$ を $\mathfrak{h}^*$ の部分空間とみなすことにする. このとき, $\mathfrak{h}^*$ は $(,)$ に関する直交分解

$$\mathfrak{h}^* = (\mathfrak{h}^{\text{sh}})^* \oplus \sum_{i \notin I^{\text{sh}}} \mathbb{C}\varpi_i$$

を持つ. p_i ($i = 1, 2$) でこの分解に関する $\mathfrak{h}^*$ から i -th factor への projection を表すことにする.

また $\lambda \in (\mathfrak{h}^{\text{sh}})^*$ に対し, $D_{\text{sh}}(\ell, \lambda)$ で $\mathcal{C}\mathfrak{g}^{\text{sh}} = \mathfrak{g}^{\text{sh}} \otimes \mathbb{C}[t]$ の Demazure module を表すことにする.

以下が, 前半の主結果である:

命題 3. $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ を long root と short root の square length の比とし (simply laced type の場合 $r = 1$ とする), $\lambda \in P_+$ とする. また, $\lambda' = p_1(\lambda), \lambda'' = p_2(\lambda)$ とおく. (定理 2 で存在が主張されている) $D_{\text{sh}}(1, \lambda')[0]$ の level r の Demazure module による $\mathbb{Z}$ -graded $\mathcal{C}\mathfrak{g}^{\text{sh}}$ -module filtration を

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_k = D_{\text{sh}}(1, \lambda')[0],$$

$$X_i/X_{i-1} \cong D_{\text{sh}}(r, \mu_i)[m_i], \mu_i \in (\mathfrak{h}^{\text{sh}})^*, m_i \in \mathbb{Z}$$

とおく. このとき $W(\lambda)[0]$ は, $\mathbb{Z}$ -graded $\mathcal{C}\mathfrak{g}$ -module filtration

$$Y_0 = 0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_k = W(\lambda)[0]$$

で, 各 subquotient Y_i/Y_{i-1} が $D(1, \mu_i + \lambda'')[m_i]$ の quotient となるものを持つ.

$\mathbb{Z}$ -graded $\mathfrak{h}$ -diagonalizable $\mathcal{C}\mathfrak{g}$ -module M に対し,

$$M_{\lambda, m} = \{v \in M \mid h.v = \lambda(h)v \text{ for } h \in \mathfrak{h}, v \text{ は degree } m\}$$

とおき, $\text{ch } M$ を

$$\text{ch } M = \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{h}^* \\ m \in \mathbb{Z}}} \dim M_{\lambda, m} e(\lambda + m\delta)$$

と定める.

系 4.

$$\text{ch } W(\lambda)[0] \leq \sum_{\substack{\mu \in (\mathfrak{h}^{\text{sh}})^* \\ m \in \mathbb{Z}}} (D_{\text{sh}}(1, \lambda')[0] : D_{\text{sh}}(r, \mu)[m]) \text{ch } D(1, \mu + \lambda'')[m]. \quad \square$$

(定理の証明の sketch) $W(\lambda)[0] \ni v$ を定義における生成元とし $W := U(\mathcal{C}\mathfrak{g}^{\text{sh}}).v$ とおくと, surjective $\mathcal{C}\mathfrak{g}^{\text{sh}}$ -homomorphism $\Phi : D_{\text{sh}}(1, \lambda')[0] \rightarrow W$ が存在する. $D_{\text{sh}}(1, \lambda')[0]$ の元の列 $x_1, \dots, x_k$ を, $x_i \in X_i$ であり, x_i の X_i/X_{i-1} における像が $D_{\text{sh}}(r, \mu_i)$ の定義関係式 (cf. 命題 1) を満たすようにとる. このとき,

$$Y_i = U(\mathcal{C}\mathfrak{g}).\Phi(x_i)$$

とおけば, $\Phi(x_i)$ の Y_i/Y_{i-1} における像が $D(1, \mu_i + \lambda'')$ の定義関係式を満たすことが確認できる. $\square$

5 Demazure crystals

本節からは, crystal が扱うべき対象となる. まず, Demazure crystal について必要なことをまとめておく.

定義. $\lambda \in P_+, \ell \in \mathbb{Z}_{>0}, m \in \mathbb{Z}$ に対し, $\Lambda \in \widehat{P}_+$ と $w \in \widehat{W}$ を $w(\Lambda) = \lambda + \ell\Lambda_0 + m\delta$ となるようにとり w の reduced expression $w = s_k \dots s_1$ を一つ fix する. このとき, $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の irreducible highest weight module $V_q(\Lambda)$ に付随する $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -crystal $\mathcal{B}(\Lambda)$ の部分集合 $\mathcal{D}(\ell, \lambda)[m]$ を

$$\mathcal{D}(\ell, \lambda)[m] = \bigcup_{j_1, \dots, j_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \tilde{f}_{i_k}^{j_k} \dots \tilde{f}_{i_1}^{j_1}(u_\Lambda)$$

(u_Λ は $\mathcal{B}(\Lambda)$ の highest weight element) とおく.

Demazure module の quantum version $D_q(\ell, \lambda)[m]$ も classical の場合と同様に定義される. このとき, $\mathcal{D}(\ell, \lambda)[m]$ は $D_q(\ell, \lambda)[m]$ の crystal base に当たるものである. より正確に言えば, $\{G_\Lambda(b) \mid b \in \mathcal{B}(\Lambda)\}$ を $V_q(\Lambda)$ の lower global base とするとき,

$$D_q(\ell, \lambda)[m] \cong \bigoplus_{b \in \mathcal{D}(\ell, \lambda)[m]} \mathbb{Q}(q)G_\Lambda(b)$$

が従う ([K1]). (上の同型において, $\mathbb{Z}$ -grading と degree operator d の作用を同一視している).

命題 5. ([K1])

- (1) $\mathcal{D}(\ell, \lambda)[m]$ は w の reduced expression の取り方によらない,
- (2) $\tilde{e}_i \mathcal{D}(\ell, \lambda)[m] \subseteq \mathcal{D}(\ell, \lambda)[m] \cup \{0\}$ for all $i \in \widehat{I}$,
- (3)

$$\text{ch } D(\ell, \lambda)[m] = \sum_{b \in \mathcal{D}(\ell, \lambda)[m]} e(\text{wt}(b)). \quad \square$$

projection: $\widehat{P} \rightarrow \widehat{P}/\mathbb{Z}\delta$ を cl で表す. また以下, $\widehat{P}/\mathbb{Z}\delta$ と $P + \mathbb{Z}\Lambda_0$ を同一視することで, $\widehat{P}/\mathbb{Z}\delta$ を $\widehat{P}$ の部分集合と思うことにする. $\mathcal{B}(\Lambda)$ は weight map を $\text{cl} \circ \text{wt} : \mathcal{B}(\Lambda) \rightarrow \widehat{P}/\mathbb{Z}\delta$ に取り換えることで $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -crystal とみなせる. $\mathcal{D}(\ell, \lambda)[m]$ をこの方法で $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -crystal の部分集合とみなすと, これは m によらない. そこでこれを $\mathcal{D}(\ell, \lambda)$ と表す.

$i \in I$ に関する level zero fundamental weight module (cf. [K3]) を $W_q(\varpi_i)$, その crystal base を $\mathcal{B}'(\varpi_i)$ と表す. このとき, $\mathcal{B}'(\varpi_i)$ と Demazure crystal の間に以下の関係が成り立つ:

定理 6. ([K4]) $i \in I$ とするとき, $\mathcal{B}(\Lambda_0) \otimes \mathcal{B}'(\varpi_i)$ の部分集合 $u_{\Lambda_0} \otimes \mathcal{B}'(\varpi_i)$ から $\mathcal{D}(1, \varpi_i)$ への weight を保つ全単射 Ψ で,

$$\Psi(\tilde{e}_j(u_{\Lambda_0} \otimes b)) = \tilde{e}_j \Psi(u_{\Lambda_0} \otimes b)$$

が任意の $b \in \mathcal{B}'(\varpi_i)$ と $j \in \widehat{I}$ に対し成り立つものが存在する. (ただし, $\Psi(0) = 0$ とする). $\square$

6 Path crystals

($\widehat{P}$ に weight をとる) path とは, $[0, 1] = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ から $\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^* := \mathbb{R} \otimes \widehat{P}$ への piecewise linear, continuous map π で $\pi(0) = 0, \pi(1) \in \widehat{P}$ を満たすものである. $\widehat{P}$ に weight をとる path の集合を $\mathbb{P}$ と表す. Littelmann は各 $i \in \widehat{I}$ に対し $\text{map } \tilde{e}_i, \tilde{f}_i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P} \cup \{0\}$ を定義し, 以下を示した:

定理 7. [L] $\pi \in \mathbb{P}$ に対し, $\text{wt}(\pi) = \pi(1)$, $\varepsilon_i(\pi) = \max\{k \mid \tilde{e}_i^k(\pi) \neq 0\}$, $\varphi_i(\pi) = \max\{k \mid \tilde{f}_i^k(\pi) \neq 0\}$ と定めるとき, $(\mathbb{P}, \text{wt}, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i, \varepsilon_i, \varphi_i \ (i \in \widehat{I}))$ は $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -crystal となる. $\square$

$\pi \in \mathbb{P}$ に対し, π を含む $\mathbb{P}$ の connected component を $\mathbb{B}\pi$ と表すことにする. また, $\Lambda \in \widehat{P}$ に対し, π_{Λ} で straight line path $\pi_{\Lambda}(t) = t\Lambda$ を表すことにする.

定理 8.

(1) ([L]) $\pi, \pi' \in \mathbb{P}$ に対し, $\pi * \pi' \in \mathbb{P}$ を

$$\pi * \pi'(t) = \begin{cases} \pi(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \pi(1) + \pi'(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

でさだめる. このとき $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \widehat{P}$ に対し, $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -crystal の同型

$$\mathbb{B}\pi_{\Lambda_1} \otimes \mathbb{B}\pi_{\Lambda_2} \cong \mathbb{B}\pi_{\Lambda_1} * \mathbb{B}\pi_{\Lambda_2} := \{\pi * \pi' \mid \pi \in \mathbb{B}\pi_{\Lambda_1}, \pi' \in \mathbb{B}\pi_{\Lambda_2}\}$$

が $\pi \otimes \pi' \mapsto \pi * \pi'$ により与えられる,

(2) ([L]) $\pi \in \mathbb{P}$ が任意の $i \in \widehat{I}$ に対し

$$\langle \pi(t), \alpha_i^{\vee} \rangle \geq 0 \text{ for } t \in [0, 1]$$

を満たすとき, $\Lambda = \pi(1)$ とおくと $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -crystal の同型 $\mathbb{B}\pi \rightarrow \mathbb{B}\pi_{\Lambda}$ で π を π_{Λ} に写すものがただ一つ存在する,

(3) ([K2], [J1]) $\Lambda \in \widehat{P}_+$ のとき, $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -crystal として $\mathbb{B}\pi_{\Lambda} \cong \mathcal{B}(\Lambda)$ となる. $\square$

$\Lambda \in \widehat{P}_+, \lambda \in P_+(\subset \widehat{P})$ に対し, $\mathbb{B}\pi_{\lambda}$ の部分集合 $(\mathbb{B}\pi_{\lambda})^{\Lambda}$ を

$$(\mathbb{B}\pi_{\lambda})^{\Lambda} = \{\pi \in \mathbb{B}\pi_{\lambda} \mid \langle \Lambda + \pi(t), \alpha_i^{\vee} \rangle \geq 0 \text{ for } t \in [0, 1]\}$$

と定める. このとき, 定理 8 を用いることで以下が示せる:

命題 9. $\Lambda \in \widehat{P}_+, \lambda \in P_+$ に対し, $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -crystal として

$$\mathcal{B}(\Lambda) \otimes \mathbb{B}\pi_{\lambda} \cong \coprod_{\pi \in (\mathbb{B}\pi_{\lambda})^{\Lambda}} \mathcal{B}(\Lambda + \pi(1))$$

となる.

(命題 9 の証明の skecth) $\pi \in (\mathbb{B}\pi_\lambda)^\Lambda$ のとき,

$$\langle \pi_\Lambda * \pi(t), \alpha_i^\vee \rangle \geq 0 \text{ for } t \in [0, 1]$$

となるから, 定理 8 より $\mathbb{B}(\pi_\Lambda * \pi) \cong \mathcal{B}(\Lambda + \pi(1))$ となる. よって

$$\mathbb{B}\pi_\Lambda * \mathbb{B}\pi_\lambda = \coprod_{\pi \in (\mathbb{B}\pi_\lambda)^\Lambda} \mathbb{B}(\pi_\Lambda * \pi)$$

を示せばよい. これは任意の $\pi_1 \in \mathbb{B}\pi_\Lambda, \pi_2 \in \mathbb{B}\pi_\lambda$ に対し, ある列 $i_1, \dots, i_k \in \widehat{I}$ が存在して

$$\tilde{e}_{i_k} \dots \tilde{e}_{i_1}(\pi_1 * \pi_2) \in \pi_\Lambda * (\mathbb{B}\pi_\lambda)^\Lambda$$

とできることと同値である. この主張は $\mathbb{B}\pi_\Lambda \cong \mathcal{B}(\Lambda)$ と, $\mathbb{B}\pi_\lambda$ の定義から示すことができる. $\square$

$\pi \in \mathbb{P}$ に対し, $\text{cl}(\pi) : [0, 1] \rightarrow \widehat{P}/\mathbb{Z}\delta$ を

$$\text{cl}(\pi)(t) = \text{cl}(\pi(t))$$

と定める. $\lambda \in P_+$ に対し,

$$\text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda) := \{\text{cl}(\pi) \mid \pi \in \mathbb{B}\pi_\lambda\}$$

は有限集合であり,

$$\text{wt}(\text{cl}(\pi)) := \text{cl}(\text{wt}(\pi)) \in \widehat{P}/\mathbb{Z}\delta, \quad \tilde{e}_i \text{cl}(\pi) := \text{cl}(\tilde{e}_i \pi), \quad \tilde{f}_i \text{cl}(\pi) := \text{cl}(\tilde{f}_i \pi)$$

と定めると, $\text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda)$ は $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -crystal となる.

定理 10. [NS1] $\lambda \in P_+$ が $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \varpi_i$ と表されるとき, $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -crystal として

$$\text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda) \cong \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}'(\varpi_i)^{\otimes \lambda_i}$$

となる. $\square$

以下,

$$\mathcal{B}'(\lambda) := \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}'(\varpi_i)^{\otimes \lambda_i}$$

と表すことにする.

7 $\mathcal{B}'(\lambda)$ と Demazure crystal の関係

$\pi \in \mathbb{P}$ に対し, π の initial direction $\iota(\pi) \in \widehat{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}^*$ を

$$\pi(t) = t\iota(\pi) \text{ for } 0 \leq t \leq \varepsilon$$

($0 < \varepsilon \ll 1$) を満たす元とする. $\lambda \in P_+$ のとき, 任意の $\eta \in \text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda)$ に対し $\text{cl}(\pi) = \eta$ かつ $\iota(\pi) \in P$ となる $\pi \in \mathbb{B}\pi_\lambda$ がただ 1 つ存在することが知られている ([NS2]). $\eta \in \text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda)$ に対しこの $\pi \in \mathbb{B}\pi_\lambda$ を π_η と表すことにする.

定義. ([NS2]) $\eta \in \text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda)$ に対し, $\pi_\eta(1) \in \widehat{P}$ が $\gamma \in P$ と $k \in \mathbb{Z}$ によって

$$\pi_\eta(1) = \gamma + k\delta$$

と表されるとき, η の degree $\text{Deg}(\eta) \in \mathbb{Z}$ を $\text{Deg}(\eta) = -k$ と定義する. (任意の η に対し, $\text{Deg}(\eta) \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ であることが知られている).

$E : \mathcal{B}'(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}$ を $\mathcal{B}'(\lambda)$ 上の energy function (cf. [HKOTY], [HKOTT]) とする. 以下の定理は, degree が energy function の path crystal における対応物であることを示している:

定理 11. ([NS2]) $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \varpi_i \in P_+$ とする. 定理 10 の同型を $T : \text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda) \cong \mathcal{B}'(\lambda)$ と表すとき, ある定数 $C \in \mathbb{Z}$ が存在して, 任意の $\eta \in \text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda)$ に対し

$$\text{Deg}(\eta) = E(T(\eta)) + C$$

が成り立つ. □

$\lambda \in P_+$ とすると, 命題 9 より

$$\mathcal{B}(\Lambda_0) \otimes \mathbb{B}\pi_\lambda \cong \coprod_{\pi \in (\mathbb{B}\pi_\lambda)^{\Lambda_0}} \mathcal{B}(\Lambda_0 + \pi(1)) \quad (2)$$

である. このとき, 以下が示せる:

命題 12. $\lambda \in P_+$ に対し写像 $\kappa : u_{\Lambda_0} \otimes \text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda) \rightarrow u_{\Lambda_0} \otimes \mathbb{B}\pi_\lambda$ (u_{Λ_0} は $\mathcal{B}(\Lambda_0)$ の highest weight element) を

$$\kappa(u_{\Lambda_0} \otimes \eta) = u_{\Lambda_0} \otimes \pi_\eta$$

とおくとき, 任意の $i \in \widehat{I}$, $\eta \in \text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda)$ に対し

$$\kappa(\tilde{e}_i(u_{\Lambda_0} \otimes \eta)) = \tilde{e}_i \kappa(u_{\Lambda_0} \otimes \eta)$$

($\kappa(0) = 0$ とおく) が成り立ち, また

$$\text{wt}(\kappa(u_{\Lambda_0} \otimes \eta)) = \text{wt}(u_{\Lambda_0} \otimes \eta) - \delta \text{Deg}(\eta)$$

が従う (上の等式の右辺では, $\text{wt}(u_{\Lambda_0} \otimes \eta) \in \widehat{P}/\mathbb{Z}\delta$ を $P + \mathbb{Z}\Lambda_0$ の元と同一視している). しかも, $\text{Im } \kappa = u_{\Lambda_0} \otimes \{\pi_\eta \mid \eta \in \text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda)\}$ は ((2) の同型のもとで) 有限個の Demazure crystal の直和となる. □

命題 12 から以下が従う:

系 13. 有限個の列 $\mu_1, \dots, \mu_k \in P_+$ と $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$ が存在して,

$$\sum_{\eta \in \text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda)} e(\text{wt}(\eta) - \delta \text{Deg}(\eta)) = \sum_i \text{ch } D(1, \mu_i)[m_i]$$

と表せる. □

$\text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda)$ の部分集合 S を

$$S = \{\eta \in \text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda) \mid \text{wt}(\eta) \in \lambda - \sum_{i \in I^{\text{sh}}} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i\}$$

とおく. このとき, 以下が示せる:

補題 14. $\lambda \in P_+$ とし, $\lambda' = p_1(\lambda), \lambda'' = p_2(\lambda)$ とおく (cf. 4 節). このとき,

$$\sum_{\eta \in S} e(\text{wt}(\eta) - \delta \text{Deg}(\eta)) = e(\lambda'') \text{ch } D_{\text{sh}}(1, \lambda')[0].$$

(4 節で述べたように $(\mathfrak{h}^{\text{sh}})^*$ を $\mathfrak{h}^*$ の部分空間とみなしていることに注意).

(証明の sketch) $\mathfrak{g}^{\text{sh}}$ の highest root を $\theta^{\text{sh}} \in \langle \Pi^{\text{sh}} \rangle (\subset \Delta)$ とおき, $\alpha_0^{\text{sh}} := \delta - \theta^{\text{sh}} \in \widehat{\Delta}$ とおく. $\mathbb{P}$ 上への $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ ($i \in \widehat{I}$) の作用は α_i に関する reflection s_i を用いて定義されていた [L]. これと同様にして, α_0^{sh} に関する reflection $s_{\alpha_0^{\text{sh}}}$ を用いて $\mathbb{P}$ 上への作用素 $\tilde{e}_{\alpha_0^{\text{sh}}}, \tilde{f}_{\alpha_0^{\text{sh}}}$ が定義できる. $\tilde{e}_{\alpha_0^{\text{sh}}}, \tilde{f}_{\alpha_0^{\text{sh}}}$ は $\mathbb{B}\pi_\lambda$ を一般には保たない. しかし以下の事実が示せる: $\pi \in \mathbb{B}\pi_\lambda$ が $\text{cl}(\text{wt}(\pi)) \in \lambda - \sum_{i \in I^{\text{sh}}} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ ならば $\tilde{e}_{\alpha_0^{\text{sh}}}(\pi), \tilde{f}_{\alpha_0^{\text{sh}}}(\pi) \in \mathbb{B}\pi_\lambda$ となる. 上の事実から, π_λ に $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ ($i \in I$) および $\tilde{e}_{\alpha_0^{\text{sh}}}, \tilde{f}_{\alpha_0^{\text{sh}}}$ を繰り返し施して得られる path の集合を $\mathbb{B}'\pi_\lambda$ とおくと, $\mathbb{B}'\pi_\lambda \subseteq \mathbb{B}\pi_\lambda$ となることから証明できる. このことから,

$$\{\pi_\eta \mid \eta \in S\} = \mathbb{B}\pi'_\lambda \cap \{\pi_\eta \mid \eta \in \text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda)\} \quad (3)$$

が示せる. 一方 (3) の右辺を S_0 とおくと, [FoLi] による simply laced type の結果から

$$\sum_{\pi \in S_0} e(\text{wt}(\pi)) = e(\lambda'') \text{ch } D_{\text{sh}}(1, \lambda')[0]$$

が従う. よって (3) から補題が従う. $\square$

系 13 と補題 14 から以下の不等式が導かれる:

命題 15. $\lambda \in P_+$ とし, $\lambda' = p_1(\lambda), \lambda'' = p_2(\lambda)$ とおく. また $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ を命題 3 と同様に定義する. このとき

$$\begin{aligned} \sum_{\eta \in \text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda)} e(\text{wt}(\eta) - \delta \text{Deg}(\eta)) \\ \geq \sum_{\substack{\mu \in (\mathfrak{h}^{\text{sh}})^* \\ m \in \mathbb{Z}}} (D_{\text{sh}}(1, \lambda')[0] : D_{\text{sh}}(r, \mu)[m]) \text{ch } D(1, \mu + \lambda'')[m] \end{aligned}$$

となる. $\square$

8 主定理

定理 6 および定理 10 と, Feigin, Loktev による fusion product の理論 ([FeLo]) から以下が成り立つ:

補題 16. $\lambda = \sum_i \lambda_i \varpi_i$ のとき, $\dim W(\lambda) \geq \#\text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda)$ が成り立つ. $\square$

命題 3 と命題 15 の右辺は全く同じものである. 一方, 上の補題は二つの命題の左辺について, 係数の総和に関する大小関係を示している. よってこれらの結果を総合することで, 二つの命題の不等式はともに等号となることがわかる. すなわち, 以下の定理が示されたことになる:

定理 17. $\lambda \in P_+$ とし $\lambda' = p_1(\lambda)$, $\lambda'' = p_2(\lambda)$ とおく. また $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ を long root と short root の square length の比とする. このとき

$$\begin{aligned} \text{ch } W(\lambda)[0] &= \sum_{\eta \in \text{cl}(\mathbb{B}\pi_\lambda)} e(\text{wt}(\eta) - \delta \text{Deg}(\eta)) \\ &= \sum_{\substack{\mu \in (\mathfrak{h}^{\text{sh}})^* \\ m \in \mathbb{Z}}} (D_{\text{sh}}(1, \lambda')[0] : D_{\text{sh}}(r, \mu)[m]) \text{ch } D(1, \mu + \lambda'')[m] \end{aligned}$$

となる. $\square$

系 18. $W(\lambda)[0]$ は各 subquotient が level 1 の Demazure module と同型となるような $\mathbb{Z}$ -graded $C\mathfrak{g}$ -module の filtration をもち, $\mu \in P_+$, $m \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$(W(\lambda)[0] : D(1, \mu)[m]) = \begin{cases} (D_{\text{sh}}(1, \lambda')[0] : D_{\text{sh}}(r, p_1(\mu))[m]) & \text{if } p_2(\mu) = \lambda'', \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる. $\square$

定理 11 と定理 17 から以下も従う:

系 19. $E : \mathcal{B}'(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}$ を $\mathcal{B}'(\lambda)$ 上の energy function とするとき, ある $C \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$\begin{aligned} e(C\delta) \sum_{b \in \mathcal{B}'(\lambda)} e(\text{wt}(b) - \delta E(b)) \\ = \sum_{\substack{\mu \in (\mathfrak{h}^{\text{sh}})^* \\ m \in \mathbb{Z}}} (D_{\text{sh}}(1, \lambda')[0] : D_{\text{sh}}(r, \mu)[m]) \text{ch } D(1, \mu + \lambda'')[m] \end{aligned}$$

となる. $\square$

参考文献

- [CP] V. Chari and A. Pressley, *Weyl modules for classical and quantum affine algebras*, Representation Theory **5** (2001), 191–223.
- [FeLo] B. Feigin and S. Loktev, *On Generalized Kostka Polynomials and the Quantum Verlinde Rule*, Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 194 (1999), 61–79.
- [FoLi] G. Fourier and P. Littelmann, *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Adv. Math. **211** (2007), no. 2, 566–593.

- [HKOTT] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Z. Tsuboi, *Paths, crystals and fermionic formulae*, in *MathPhys Odyssey 2001: Integrable Models and Beyond*, (M. Kashiwara and T. Miwa, Eds.), Prog. Math. Phys. Vol. 23, 205–272, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Y. Yamada, *Remarks on fermionic formula*, in *Recent Developments in Quantum Affine Algebras and Related Topics*, (N. Jing and K.C. Misra, Eds.), Contemp. Math. Vol. 248, 243–291, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [J1] A. Joseph, *Quantum Groups and Their Primitive Ideals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) Vol. **29**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [J2] A. Joseph, *Modules with a Demazure flag*, Studies in Lie theory, Progr. Math., **243**, 131–169, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.
- [K1] M. Kashiwara, *the crystal base and Littelmann’s refined Demazure character formula*, Duke Math. J. **71** (1993), no.3, 839–858.
- [K2] M. Kashiwara, *Similarity of crystal bases*, Lie algebras and Their Representations (Seoul, 1995) (S.-J. Kang, M-H. Kim, and I. Lee, eds.), Contemp. Math., vol. **194**, Americal Mathematical Society. Rhode Island, 1996, 177–186.
- [K3] M. Kashiwara, *On level zero representations of quantized affine algebras*, Duke Math. J. **112** no. 1 (2002), 117–175.
- [K4] M. Kashiwara, *Level zero fundamental representations over quantized affine algebras and Demazure modules*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), no. 1. 223–250.
- [L] P. Littelmann, *Paths and root operators in representation theory*, Ann. of Math. (2) **142** (1995), 499–525.
- [M] O. Mathieu, *Construction du groupe de Kac-Moody et applications*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **306** (1988), 227–330.
- [NS1] S. Naito and D. Sagaki, *Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra*, Int. Math. Res. Not. **2003** (2003), 1731–1754.
- [NS2] S. Naito and D. Sagaki, *Crystal of Lakshmibai-Seshadri paths associated to an integral weight of level zero for an affine Lie algebra*, Int. Math. Res. Not. **2005** (2005), 815–840.
- [S] M. Shimozono, *Affine type A crystal structure on tensor products of rectangles, Demazure characters, and nilpotent varieties*, J. Algebraic Combin. **15** (2002), no. 2, 151–187.