

Intertwining 作用素と Iwahori-Hecke algebra

中筋麻貴 (Maki Nakasuji)
津田塾大学数学・計算機科学研究所

1. はじめに

1956 年, Bruhat によって Lie 群や p -進群の誘導表現の理論に Intertwining 積分が導入され, それ以降, 積分の解析接続など, いくつかの結果が報告されている (詳しいことについては [2], [5], [6] 参照). 特に, この積分を spherical function に関して用いることによって得られる Macdonald の公式や spherical Whittaker 関数に用いることによって得られる Shintani-Casselman-Shalika の公式は, p -進群の表現論において代表される美しい公式である. ([6], [7]). 本講演では, Iwahori fixed vector の自然な基底 ψ_u に Intertwining 作用素 M_v を作用させて得られた以下の結果を紹介する.

Theorem 1.1. ワイル群の元 u, v に対して, $u \leq v$ (Bruhat order) を満たしているとする. このとき, v が u に対して “good word” であると仮定すると,

$$(M_v \psi_u)(1) = \prod_{\alpha} \frac{1 - q^{-1} \mathbf{z}^{\alpha}}{1 - \mathbf{z}^{\alpha}}$$

が成り立つ. ここで, $\mathbf{z}$ は Langlands parameter であり, 積は $u \leq vr_{\alpha} < v$ を満たす positive root $\alpha \in \Phi^+$ を渡るものとする.

本結果を用いることにより, Casselman[6] が Intertwining 作用素を用いて定義した Iwahori fixed vector の基底 (Casselman 基底) の明示公式に関する Bump-Nakasuji [3] の予想の一部を証明することができる.

2. INTERTWINING 作用素

G を non-archimedean な体 F 上の split semisimple 代数群とする. また, $\mathfrak{o}$ を F の整数環, $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{o}$ の極大イデアル, q を剰余体の cardinality とする. このとき, $G(F)$ の Borel 部分群 $B(F)$ は, 極大 split torus $T(F)$ と unipotent radical $N(F)$ を用いて $B(F) = T(F)N(F)$ と表すことができる.

$T(F)$ の指標 χ に対し, χ から誘導される $G(F)$ の表現で, $f(bg) = (\delta^{1/2} \chi)(bg)$ を満たす locally constant な関数で構成される space を

$$V(\chi) = \{f : G(F) \rightarrow \mathbb{C} \mid f(bg) = (\delta^{1/2} \chi)(b)f(g)\}$$

とする. ここで, $\delta : B(F) \rightarrow \mathbb{C}$ は modular quasicharacter とし, χ は $\chi(tn) = \chi(t)$ として, $N(F)$ 上 trivial となるように B 上に拡張しておく. また, $G(F)$ の作用は right translation とする. K を G の極大コンパクト部分群, J を K の Iwahori 部分群とすると, χ が general position のとき, $V(\chi)$ は既約であり, χ が unramified のとき, $V(\chi)^J$ (J -fixed vectors) の次元はワイル群 W の order に等しい. このことから, $V(\chi)^J$ の基底が W で parametrize され

ることは自然なことであり、その自然な基底の1つ $\{\phi_w | w \in W\}$ を次を満たすものとして定義する。 $b \in B(F)$, $u \in W$, $k \in J$ に対し、

$$\phi_w(buk) = \begin{cases} \delta^{1/2} \chi(b) & u = w \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

また、 $u, v \in W$ に対し、 $\psi_u = \sum_{v \geq u} \phi_v$ と定義する。

$\hat{\Phi}$ を G の dual root system とする。 semisimple Lie algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_F$ は T の Lie algebra $\mathfrak{t}$ と root eigenspace $\mathfrak{g}_\alpha$ ($\alpha \in \hat{\Phi}$) を用いて、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus_{\alpha \in \hat{\Phi}} \mathfrak{g}_\alpha$ に分解できる。 $H_\alpha \in \mathfrak{t}$ を coroot とし、 $\mathfrak{g}_\alpha$ の element X_α を $[X_\alpha, X_\beta] = \pm(p+1)X_{\alpha+\beta}$ となるように選ぶ。 ここで、 $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \hat{\Phi}$, p は $\beta - p\alpha \in \hat{\Phi}$ を満たす最大の整数とする。 このとき、 $\alpha \in \Phi^+$ に対し、 その differential $di_\alpha : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{g}$ が次を満たす homomorphism $i_\alpha : SL_2 \rightarrow G$ が存在する：

$$di_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = X_\alpha, \quad di_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X_{-\alpha}, \quad di_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = H_\alpha.$$

さて、 $w \in W$ に対し、 Intertwining 作用素 $M_w : V(\chi) \rightarrow V({}^w\chi)$ を次で定義する：

$$(M_w f)(g) = \int_{N \cap w N w^{-1}} f(w^{-1} n g) dn = \int_{(N \cap w N w^{-1}) \setminus N} f(w^{-1} n g) dn. \quad (2.1)$$

Proposition 2.1. $w^{-1}\alpha \in \Phi^-$ を満たすすべての positive root α に対し、 積分 (2.1) は、

$$\left| \chi \left(i_\alpha \begin{pmatrix} \varpi & \\ & \varpi^{-1} \end{pmatrix} \right) \right| < 1 \quad (2.2)$$

で絶対収束する。 ここで ϖ は $\mathfrak{p}$ の fixed generator である。 また、 length function $l : W \rightarrow \mathbf{Z}$ が、 $l(w w') = l(w) + l(w')$ を満たすとき、 $M_{w w'} = M_w \circ M_{w'}$ が成り立つ。

Proof. 後者の証明から始める。 $w_1, w_2 \in W$ に対し、

$$\begin{aligned} M_{w_1 w_2} f(g) &= \int_{N \cap (w_1 w_2) N (w_1 w_2)^{-1}} f((w_1 w_2)^{-1} n g) dn \\ &= \int_{N \cap w_1 N w_1^{-1}} \int_{w_1 (N \cap w_2 N w_2^{-1}) w_1^{-1}} f(w_2^{-1} w_1^{-1} n_2 n_1 g) dn_2 dn_1 \\ &= \int_{N \cap w_1 N w_1^{-1}} \int_{N \cap w_2 N w_2^{-1}} f(w_2^{-1} w_1^{-1} w_1 n_2 w_1^{-1} n_1 g) dn_2 dn_1 \\ &= \int_{N \cap w_1 N w_1^{-1}} \int_{N \cap w_2 N w_2^{-1}} f(w_2^{-1} n_2 w_1^{-1} n_1 g) dn_2 dn_1 \\ &= M_{w_1} \circ M_{w_2} f(g). \end{aligned}$$

次に前者の証明を行う。 これは $w = s_\alpha$ (α は simple root) の場合を証明すればよい。 $w = s_\alpha = i_\alpha \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ のとき、 $N \cap w N w^{-1} = i_\alpha(F)$ なので、 積分は

$$\int_F f \left(s_\alpha i_\alpha \begin{pmatrix} 1 & v \\ & 1 \end{pmatrix} g \right) dv$$

と表される． $v \neq 0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v^{-1} \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{-1} & \\ & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ v^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

となることから，

$$\begin{aligned} \int_F f \left(s_\alpha i_\alpha \begin{pmatrix} 1 & v \\ & 1 \end{pmatrix} g \right) dv &= \int_F f \left(i_\alpha \begin{pmatrix} 1 & -v^{-1} \\ & 1 \end{pmatrix} i_\alpha \begin{pmatrix} v^{-1} & \\ & v \end{pmatrix} i_\alpha \begin{pmatrix} 1 & \\ v^{-1} & 1 \end{pmatrix} g \right) dv \\ &= \int_F |v|^{-1} \chi \left(i_\alpha \begin{pmatrix} v^{-1} & \\ & v \end{pmatrix} \right) f \left(i_\alpha \begin{pmatrix} 1 & \\ v^{-1} & 1 \end{pmatrix} g \right) dv \end{aligned}$$

を得る．ここで， $|v|^{-1}$ は $\delta^{1/2}$ から得られた値である． f が locally constant なので， v が十分大きいなら， f の値は定数となる．すなわち，絶対収束は，ある 0 でない定数 C に対して，

$$\int_{|v|>C} |v|^{-1} \left| \chi \left(i_\alpha \begin{pmatrix} v^{-1} & \\ & v \end{pmatrix} \right) \right| dv$$

の収束に依存する． χ の絶対値は $\varpi^{-k} \mathfrak{o}^\times$ 上定数であり，その値は $q^k(1-q^{-1})$ であること，および $|v|^{-1} = q^{-k}$ を考えると，

$$\sum_{|q^k|>C} \left| \chi \left(i_\alpha \begin{pmatrix} \varpi^k & \\ & \varpi^{-k} \end{pmatrix} \right) \right|^k$$

の収束を考えればよいことがわかる．よって，仮定 (2.2) が成立するとき，積分の収束が成立する． $\square$

3. IWAHORI HECKE ALGEBRA

Iwahori Hecke algebra $\mathcal{H}_J$ は G 上 compact support を持つ関数 f で， $f(kgk') = f(g)$ ($k, k' \in J$) を満たす J -biinvariant 関数の convolution ring である．（その構造は，Iwahori-Matsumoto [11] を参照）．ここでは，Haar measure を normalize し， J の volume を 1 とする．また， t_w を JwJ の characteristic function とすると（簡単のため， t_{σ_i} を t_i ($1 \leq i \leq r$) と書く）， t_i は braid relation $t_i t_j t_i t_j \cdots = t_j t_i t_j t_i \cdots$ ，および $t_i^2 = (q-1)t_i + q$ を満たす．このとき， $K = G(\mathfrak{o})$ で support を持つ関数で定義される部分環 $\mathcal{H}(W)$ は， $\dim(\mathcal{H}(W)) = |W|$ であり， $\{t_1, \dots, t_r\}$ を generator に持つ．

今，vector isomorphism $\alpha = \alpha(\chi) : V(\chi)^J \longrightarrow \mathcal{H}(W)$ を $f \in V(\chi)^J$ に対し，

$$\alpha(f)(g) = \begin{cases} f(g^{-1}) & g \in K \text{ の場合,} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

と定義する．

Proposition 3.1. α は left $\mathcal{H}(W)$ -module の isomorphism である．

Proof. $\mathcal{H}(W)$ のそれ自身への作用は left multiplication (convolution) であり, $V(\chi)^J$ 上への作用は, $\phi \in \mathcal{H}_J, f \in V(\chi)^J$ に対し,

$$(\phi \cdot f)(x) = \pi(\phi)f(x) = \int_G \phi(g)f(xg)dg$$

である. よって, $g \in K$ とすると,

$$\alpha(\phi \cdot f)(g) = (\phi \cdot f)(g^{-1}) = \int_G \phi(h)f(g^{-1}h)dh = \int_G \phi(gh)f(h)dh$$

となる. ここで, ϕ が K で support を持つことより, 積分の範囲を K に制限し, $h \mapsto h^{-1}$ と変数変換すると,

$$\int_K \phi(gh^{-1})f(h^{-1})dg = \int_K \phi(gh^{-1})\alpha(f)(h)dh = \int_G \phi(gh^{-1})\alpha(f)(h)dh$$

を得る. 右辺は $\phi \cdot \alpha(f)(g)$ であることから, 演算記号「 $\cdot$ 」は left convolution であることがわかる. よって, $\alpha(\phi \cdot f)$ と $\phi \cdot \alpha(f)$ は K 上等しい. $\square$

次に, $w \in W$ に対し, 写像 $\mathcal{M}_w = \mathcal{M}_{w,\mathbf{z}} : \mathcal{H}(W) \longrightarrow \mathcal{H}(W)$ を次の diagram が可換となるように定義する:

$$\begin{array}{ccc} V(\chi)^J & \xrightarrow{M_w} & V({}^w\chi)^J \\ \downarrow \alpha(\chi) & & \downarrow \alpha({}^w\chi) \\ \mathcal{H}(W) & \xrightarrow{\mathcal{M}_w} & \mathcal{H}(W) \end{array}$$

ここで, $\mathcal{H}(W)$ の unit element $1_{\mathcal{H}}$ に対し, $\mu_{\mathbf{z}}(w) = \mathcal{M}_w(1_{\mathcal{H}}) \in \mathcal{H}(W)$ とすると, $\alpha_{\chi}(\phi_1) = 1_{\mathcal{H}}$ であることから,

$$\mu_{\mathbf{z}}(w) = \alpha({}^w\chi)\phi_1$$

と表すことができる.

Proposition 3.2. 任意の $h \in \mathcal{H}(W)$ に対して,

$$\mathcal{M}_w(h) = h \cdot \mu_{\mathbf{z}}(w)$$

が成り立つ.

Proof. $\mathcal{M}_w$ は left $\mathcal{H}(W)$ -module なので,

$$\mathcal{M}_w(h) = \mathcal{M}_w(h \cdot 1) = h\mathcal{M}_w(1) = h \cdot \mu_{\mathbf{z}}(w).$$

$\square$

Lemma 3.3. $l(w_1w_2) = l(w_1) + l(w_2)$ のとき,

$$\mu_{\mathbf{z}}(w_1w_2) = \mu_{\mathbf{z}}(w_2)\mu_{w_2\mathbf{z}}(w_1).$$

Proof. Proposition 2.1 より, $M_{w_1 w_2} = M_{w_1} \circ M_{w_2}$. よって, 次の diagram の可換性を用いればよい.

$$\begin{array}{ccccc} V(\chi)^J & \xrightarrow{M_{w_2}} & V(w_2 \chi)^J & \xrightarrow{M_{w_1}} & V(w_1 w_2 \chi)^J \\ \downarrow \alpha(\chi) & & \downarrow \alpha(w_2 \chi) & & \downarrow \alpha(w_1 w_2 \chi) \\ \mathcal{H}(W) & \xrightarrow{\mathcal{M}_{w_2}} & \mathcal{H}(W) & \xrightarrow{\mathcal{M}_{w_1}} & \mathcal{H}(W) \end{array}$$

□

Lemma 3.4. $w = \sigma_i$ を *simple reflection* とする. このとき,

$$\mu_{\mathbf{z}}(w) = \frac{1}{q} t_i + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{\mathbf{z}^{\alpha_i}}{1 - \mathbf{z}^{\alpha_i}}.$$

Proof. Casselman[6] Theorem 3.4 より

$$M(s_k) \phi_1 = \frac{1}{q} \phi_{s_k} + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{\mathbf{z}^{\alpha_k}}{1 - \mathbf{z}^{\alpha_k}} \phi_1$$

が成り立つ. 写像 α によって, ϕ_1, ϕ_{s_k} はそれぞれ $1_{\mathcal{H}}, t_k \in \mathcal{H}(W)$ に移る.

□

以後, 簡単のため, $\alpha_{\chi}(\psi_u)$ を $\psi(u)$ と書く. $\psi(u)$ の性質として以下が得られる.

Proposition 3.5. s を *simple reflection* とする. $us > u$ を満たす $u \in W$ に対し,

$$\psi(u) t_s = q \psi(u)$$

$$\psi(u) \mu_{\mathbf{z}}(s) = \left(\frac{1 - q^{-1} \mathbf{z}^{\alpha}}{1 - \mathbf{z}^{\alpha}} \right) \psi(u)$$

が成り立つ.

Proof. Bump-Nakasuji[3] Proposition 14 参照.

□

また, $f, g \in \mathcal{H}(W)$, $x \in W$ に対し, $f - g$ において係数が 0 でないのが $t_w (w \in W, w \geq x)$ の係数であるとき, $f \equiv g \pmod{x}$ と書くと, 次の命題が成り立つ.

Proposition 3.6. s を *simple reflection* とする. $us > u$ を満たす $u \in W$ に対し,

$$\psi(us) t_s \equiv q \psi(u) \pmod{us}, \quad \psi(us) \mu_{\mathbf{z}}(s) \equiv \psi(u) \pmod{us} \quad (3.1)$$

が成り立つ.

Proof. Bump-Nakasuji [3], Proposition 15 参照.

□

4. 定理の証明

まず、定理の仮定である “good word” の説明からはじめる.

$\hat{\Phi}$ を T の dual torus $\hat{T}$ に関する root system とする. $\alpha \in \Phi^+$ のとき, r_α を α に関する reflection とする. たとえば, α が simple なとき, r_α は simple reflection s_α となる. このとき, 任意の $u \leq y \leq v$ に対し,

$$\#\{\alpha \in \Phi^+ | u \leq yr_\alpha \leq v\} \geq l(v) - l(u)$$

が成立する. これは「Deodhar の予想」と呼ばれ, Deodhar [10] によって予想され, いくつかの場合については Deodhar 自身によって証明された. その後, 一般の場合について, Dyer [9], Polo [12], Carrell, Paterson [4] 等によって, 独立に証明された. ここで, $y = v$ ととったものを

$$S(u, v) = \{\alpha \in \Phi^+ | u \leq vr_\alpha < v\}$$

とおく. Deodhar の予想より, cardinality は $|S(u, v)| \geq l(v) - l(u)$ である.

さて, $u, v \in W$, $u \leq v$ (Bruhat order) とする. v を simple reflection の積に既約分解したものを $v = s_1 \cdots s_n$ とする. すなわち, $n = l(v)$. “hat” がその項を省くことを意味する記号とし, S を $u \leq s_1 \cdots \hat{s}_j \cdots s_n$ を満たす整数 j の集合とする:

$$S = \{j_1, \dots, j_d\} \quad (j_1 < \dots < j_d).$$

このとき, $v = s_1 \cdots s_n$ に対して, $u = s_1 \cdots \hat{s}_{j_1} \cdots \hat{s}_{j_d} \cdots s_n$ と表せるならば, 「 v は u に対して “good word” である」と定義する. また, このとき d は $u \leq vr < v$ を満たす reflection $r \in W$ の数となる. 実際, 与えられた $u \leq vr < v$ を満たす reflection r に対して,

$$r = s_n s_{n-1} \cdots s_{j+1} s_j s_{j+1} \cdots s_n$$

を満たす j は一意に定まる. すなわち, このとき

$$vr = s_1 \cdots \hat{s}_j \cdots s_n$$

と表される. よって, $d = |S(u, v)|$ である, つまり, Deodhar の予想から $d \geq l(v) - l(u)$ であることを考えると, v が u に対して “good word” であるとき, $d = l(v) - l(u)$ が成立する.

今, 定理の仮定より, v が u に対して “good word” であるとする. ここでは, $v = s_1 \cdots s_n$, $u = s_1 \cdots \hat{s}_{i_1} \cdots \hat{s}_{i_m} \cdots s_n$ とする. 添字の $\mathbf{z}$ を省略して $\mu(s_n) = \mu_{\mathbf{z}}(s_n)$ と書くことにすると, Lemma 3.3 より, $\mu(v) = \mu(s_n)\mu(s_{n-1})\cdots\mu(s_1)$ と書ける. このことに注意し, Proposition 3.5

を用いれば,

$$\begin{aligned}
\psi(u)\mu_{\mathbf{z}}(v) &= [\psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_m}} \cdots s_n)\mu(s_n) - \psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_m}} \cdots s_{n-1})]\mu(s_{n-1}) \cdots \mu(s_1) \\
&+ [\psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_m}} \cdots s_{n-1})\mu(s_{n-1}) - \psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_m}} \cdots s_{n-2})]\mu(s_{n-2}) \cdots \mu(s_1) \\
&\vdots \\
&+ [\psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_m}})\mu(s_{i_m}) - C(m)\psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_m}})]\mu(s_{i_m-1}) \cdots \mu(s_1) \\
&+ C(m)[\psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots s_{i_m-1})\mu(s_{i_m-1}) - \psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots s_{i_m-2})]\mu(s_{i_m-2}) \cdots \mu(s_1) \\
&\vdots \\
&+ C(m) \cdots C(1)[\psi(s_1)\mu(s_1) - \psi(1)] \\
&+ C(m) \cdots C(1)\psi(1)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

を得る. ここで,

$$C(k) = \frac{1 - q^{-1}\mathbf{z}^{\gamma_k}}{1 - \mathbf{z}^{\gamma_k}}, \quad \gamma_k = s_n s_{n-1} \cdots s_{i_k+1}(\alpha_{i_k}),$$

α_i は simple reflection s_i に対応する simple root を意味する.

さて, $f \in \mathcal{H}(W)$ に対して, $\Lambda(f)$ を f を basis element に展開したときの 1 の係数と定義する. このとき, Λ によって, (4.1) は最後の項を残し, すべて 0 となることを次に示す. 実際, これが成りたてば,

$$(M_v \psi_u)(1) = \Lambda(\psi(u)\mu_{\mathbf{z}}(v)) = C(m) \cdots C(1)$$

が得られる. $\mu(s_{i_k})$ の spectral parameter は $s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_n}(\mathbf{z})$ なので,

$$C(k) = \frac{1 - q^{-1}\mathbf{z}^{\gamma_k}}{1 - \mathbf{z}^{\gamma_k}} = \frac{1 - q^{-1}(s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_n}(\mathbf{z}))^{\alpha_{i_k}}}{1 - (s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_n}(\mathbf{z}))^{\alpha_{i_k}}}$$

となり, 定理が証明できる.

ここで, 記号を 1 つ導入する. s を simple reflection とし,

$$u \ominus s = \begin{cases} u & \text{if } u < us, \\ us & \text{if } us < u \end{cases}$$

と定義する. また, $us < u$ が成り立つ状態を “descent” と呼ぶ.

Proposition 4.1. $x \geq u, y \leq s$ のとき, $xy \geq u \ominus s$ が成り立つ.

Proof. Bump-Nakasuji [3] の Propotision 13 参照. □

まず,

$$\prod_{j>k} C(j)[\psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_k}})\mu(s_{i_k}) - C(k)\psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_k}})]\mu(s_{i_k+1}) \cdots \mu(s_1)$$

の項を考える. Proposition 3.5 より, これが 0 となることは容易にわかる. 一方, 最終項を除く残りの項はすべて,

$$[\psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_2}} \cdots s_j) \mu(s_j) - \psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_2}} \cdots s_{j-1})] \mu(s_{j-1}) \cdots \mu(s_1)$$

の定数倍となる. 再び Proposition 3.5 より,

$$\psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_2}} \cdots s_j) \mu(s_j) - \psi(s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_2}} \cdots s_{j-1}) \geq s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_2}} \cdots s_j$$

が得られる. ここで Proposition 4.1 より, 右辺は $\geq s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_2}} \cdots s_j \ominus s_{j-1} \ominus s_{j-2} \ominus \cdots \ominus s_1$ と書ける. すなわち,

$$s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_2}} \cdots s_j \ominus s_{j-1} \ominus s_{j-2} \ominus \cdots \ominus s_1 = 1 \quad (4.2)$$

でなければ, Λ によってこの項も 0 となる. よって, (4.2) が成立しないことを示す. (4.2) が成立すると仮定すると,

$$s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_2}} \cdots s_j s_{j-1} \cdots \widehat{s_{j_k}} \cdots \widehat{s_{j_1}} \cdots s_1 = 1$$

を満たす. ここで, $j_k, j_{k-1}, \dots, j_1$ は $\ominus$ が descent でない状態のときを表す. これより,

$$s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_2}} \cdots s_j = s_1 \cdots \widehat{s_{j_1}} \cdots \widehat{s_{j_k}} \cdots s_{j-1} \quad (4.3)$$

が成り立つ. よって,

$$u = s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots s_n = s_1 \cdots \widehat{s_{j_1}} \cdots \widehat{s_{j_k}} \cdots s_{j-1} \widehat{s_j s_{j+1}} \cdots \widehat{s_{i_{k+1}}} \cdots s_n \quad (4.4)$$

と表すことができる. 今, $\delta = s_n s_{n-1} \cdots s_{j+1}(\alpha_j)$ とすると, vr_δ は s_j のみを除いた

$$vr_\delta = s_1 \cdots \widehat{s_j} \cdots s_n$$

となる. $vr_\delta < v$ は明らか. また, (4.4) より, $u \leq vr_\delta$ も成立する. よって, $\delta \in S(u, v)$ であるが, $v(\alpha) \in \hat{\Phi}^-$ を満たす positive root α のリスト

$$s_n \cdots s_{k+1}(\alpha_k)$$

は重複を許さない (Corollary 2 to Proposition 17 in VI.1.6 of Bourbaki [1]). すなわち, j は $\{j_1, \dots, j_m\}$ に含まれない. よって矛盾.

REFERENCES

- [1] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4-6*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 2002. Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley.
- [2] D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge university press, Cambridge, 1997.
- [3] D. Bump and M. Nakasuji, Casselman's Basis of Iwahori vectors and Kazhdan-Lusztig Polynomials. (*preprint*)
- [4] James B. Carrell. The Bruhat graph of a Coxeter group, a conjecture of Deodhar, and rational smoothness of Schubert varieties. In *Algebraic groups and their generalizations: classical methods (University Park, PA, 1991)*, volume 56 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 53–61. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [5] W. Casselman, *Introduction to admissible representation of p-adic groups*, liked from the class web page.
- [6] W. Casselman, The unramified principal series of p-adic groups. I. The spherical function. *Compositio Math.*, 40 (3) : 387–406, 1980.

- [7] W. Casselman and J. Shalika, The unramified principal series of p -adic groups. II. The Whittaker function. *Compositio Math.*, 41 (2) : 207–231, 1980.
- [8] V. Deodhar, On some geometric aspects of Bruhat orderings. I. A finer decomposition of Bruhat cells. *Invent. Math.*, 79 (3) : 499–511, 1985.
- [9] M. J. Dyer. The nil Hecke ring and Deodhar’s conjecture on Bruhat intervals. *Invent. Math.*, 111(3):571–574, 1993.
- [10] Vinay V. Deodhar. Local Poincaré duality and nonsingularity of Schubert varieties. *Comm. Algebra*, 13(6):1379–1388, 1985.
- [11] N.Iwahori and H.Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p -adic Chevalley groups. *Inst. Hautes Etudes sci. Publ. Math.*, (25) : 5–48, 1965.
- [12] Patrick Polo. On Zariski tangent spaces of Schubert varieties, and a proof of a conjecture of Deodhar. *Indag. Math. (N.S.)*, 5(4):483–493, 1994.

E-mail address: nakasuji@tsuda.ac.jp