導来関手加群の離散的分岐則

東京大学数理科学研究科　大島 芳樹 (Yoshiki Oshima)
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

1　序

「群 G の既約ユニタリ表現を部分群 G' に制限して，G' の既約表現へ分解せよ」というユニタリ表現の分岐則の問題を考える．この問題に対する結果として次の 3 つがある．

(1) 分解に現れる G' の表現の中で特別なもの

(2) 重複度の上からの評価

(3) 分岐則の明示公式

(3) は (2) の結果を含むように思えるが，(3) は交代和や組み合わせ論的な量を含むのに対して，(2) は比較的容易に計算できるという状況がしばしばある．また表現の分解が無重複な場合，(3) よりも (2) の方が，それが見やすい場合がある．(1) は，最高ウェイト，極小 K-type などもとの表現の特徴づけに使われたり，応用上重要な役割を果たしたりする．

まずは，G が連結コンパクトリー群で G' が極大トーラスの場合について上の 3 つを見てみよう．この場合，分岐則の問題は有限次元表現のウェイト分解である．(1) は表現の最高ウェイトにあたり，(3) は Kostant の公式が知られている．(2) としては，例えば有限次元表現のウェイト分解は Verma 加群のウェイト分解で上から抑えられるという事実がある．

本講演では (G, G') を実簡約リー群の対称対として，G についての Vogan-Zuckerman 導来関手加群 $\overline{A_{\mathfrak{q}}(\lambda)}$ が代数的に離散分解する場合にその分岐則を求めたい．この枠組みは小林 [4][5][6] によって与えられた．また [7] では，最高ウェイト理論，K-type の理論などとの比較が行われている．

2　導来関手加群

Vogan-Zuckerman 導来関手加群について簡単に述べる．詳しいことは [3] などに書かれている．

G を連結な線型簡約リー群とする．すなわち G を $GL(N, \mathbb{R})$ の連結な閉部分群とし，転置で閉じている (${}^tG = G$) とする．G の極大コンパクト部分群を K とし，対応する Cartan 対合を θ で表す．G のリー環を $\mathfrak{g}_0$，その複素化を $\mathfrak{g}$ とする．$\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}$ なども同様に定める．Cartan 対合の微分も θ で表し，Cartan

分解を $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ とする．$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{g}$ の θ 不変な放物型部分代数とする．$\mathfrak{q}$ の G における正規化群を $L = N_G(\mathfrak{q})$ とすると，L は連結な線型簡約リー群になる．$\mathfrak{q}$ の nilradical を $\mathfrak{u}$ とすると，$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ は $\mathfrak{q}$ の Levi 分解になる．

Zuckerman 関手とは $(\mathfrak{g}, L\cap K)$ 加群のなす圏 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, L\cap K)$ から $(\mathfrak{g}, K)$ 加群のなす圏 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ への共変関手である．$(\mathfrak{g}, L\cap K)$ 加群 V に対して，その K 有限ベクトルのなす空間 $V_K = \{v \in V \mid \dim U(\mathfrak{k})v < \infty\}$ は自然に $(\mathfrak{g}, K)$ 加群になる．$\Gamma^K_{L\cap K} : V \mapsto V_K$ は Zuckerman 関手と呼ばれ，左完全である．自然数 i に対してその i 次右導来関手 $\Gamma^{K,i}_{L\cap K}$ が存在する．

W を $(\mathfrak{l}, L\cap K)$ 加群とする．1 次元空間 $\bigwedge^{\dim \mathfrak{u}} \mathfrak{u}$ を随伴表現で $(\mathfrak{l}, L\cap K)$ 加群とみなして $W \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^{\dim \mathfrak{u}} \mathfrak{u}$ に $(\mathfrak{l}, L\cap K)$ 加群の構造が入る．さらに，$\bar{\mathfrak{u}}$ を 0 で作用させて $(\bar{\mathfrak{q}}, L\cap K)$ 加群とみなせる．ここで実形 $\mathfrak{g}_0$ に対する $\mathfrak{q}, \mathfrak{u}$ の複素共役をそれぞれ $\bar{\mathfrak{q}}, \bar{\mathfrak{u}}$ で書いた．すると $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\bar{\mathfrak{q}})} (W \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^{\dim \mathfrak{u}} \mathfrak{u})$ は $(\mathfrak{g}, L\cap K)$ 加群になる．Vogan-Zuckerman 導来関手加群とは

$$\mathcal{L}^i(W) = \Gamma^{K,i}_{L\cap K}\left(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\bar{\mathfrak{q}})} (W \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^{\dim \mathfrak{u}} \mathfrak{u})\right)$$

で定義される $(\mathfrak{g}, K)$ 加群である．特に L のユニタリ指標 λ に対応する 1 次元 $(\mathfrak{l}, L\cap K)$ 加群を $\mathbb{C}_\lambda$ として，

$$A_{\mathfrak{q}}(\lambda) = \mathcal{L}^s(\mathbb{C}_\lambda)$$

と定義する．ただし，$s = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})$.

$\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}_0$ を固定する．中心化環 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{l}_0}(\mathfrak{t}_0)$ は，$\mathfrak{l}_0$ の Cartan 部分代数になる．$\mathfrak{h}$ を含み，$\mathfrak{q}$ に含まれる $\mathfrak{g}$ の θ 不変な Borel 部分代数をとり，$\mathfrak{b}$ とする．$\mathfrak{b}$ の $\mathfrak{h}$ ルートを正ルートとし，正ルートの和の半分を $\rho \in \mathfrak{h}^*$ とする．同様に，$\mathfrak{b} \cap \mathfrak{k}$ の $\mathfrak{t}$ ルートを正ルートとし，正ルートの和の半分を $\rho_c \in \mathfrak{t}^*$ とする．$\mathfrak{u}$ のルートの和の半分を $\rho(\mathfrak{u}) \in \mathfrak{h}^*$ とする．L のユニタリ指標 λ について，その微分を制限して，$\lambda \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0^*$ とみなす．次のように定義する．

$$\lambda \text{ は good} \iff \mathrm{Re}\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle > 0 \qquad \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})$$

$$\lambda \text{ は fair} \iff \mathrm{Re}\langle \lambda + \rho(\mathfrak{u}), \alpha \rangle > 0 \qquad \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})$$

等号つきなら成立するときは，それぞれ weakly good，weakly fair という．good なら fair であり，weakly good なら weakly fair である．

次の性質が知られている ([3], [8]).

事実 2.1. (i) $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は有限長の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群でその無限小指標の Harish-Chandra パラメータは $\lambda + \rho$ に等しい．

(ii) λ が weakly good のとき，$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群か 0.

(iii) λ が good のとき，$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は 0 でない．

(iv) λ が weakly fair のとき，$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ はユニタリ．($(\mathfrak{g}, K)$ 加群は $\mathfrak{g}_0$ が歪エルミートで作用するような正定値内積があるときユニタリという)

(v) $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{k}$ のランクが等しく，$\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数になっているとする．λ が good のとき，$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は離散系列表現になる．λ が weakly good だが good でないとき，$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は 0 か離散系列表現の極限である．逆にすべての離散系列表現とその極限はこのようにして得られる．

$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ がユニタリのとき，その完備化 $\overline{A_{\mathfrak{q}}(\lambda)}$ は G のユニタリ表現になる．λ を weakly fair として $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の K への制限についての分岐則を考えよう．

事実 2.2 ([3], [8])． (i) $\mu_0 = \lambda|_{\mathfrak{t}} + 2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ が dominant ならば μ_0 を最高ウェイトにもつ K の表現は重複度 1 で $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)|_K$ に現れる．(この K-type は bottom layer とよばれる)

(ii) $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の分解に現れる K-type の最高ウェイトは

$$\mu = \mu_0 + \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})} m_\alpha \alpha \qquad m_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

の形で表せる．この表示の方法が $p(\mu - \mu_0)$ 通りあるとき，重複度は $p(\mu - \mu_0)$ 以下である．

(iii) λ を weakly fair とする．最高ウェイト μ の K-type の $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ における重複度は $\sum_{w \in W_c} (-1)^{l(w)} p(w(\mu + \rho_c) - \rho_c - \mu_0)$ と等しい．ただし，W_c は $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ に関する Weyl 群とする．

λ が good なら (i) の μ_0 は dominant になる．(i), (ii), (iii) は序の (1), (2), (3) に相当している．

$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の実現として $\mathcal{D}$ 加群を使ったものがある．$G_{\mathbb{C}}$ を G の複素化とする．$\overline{Q}$ を $\bar{\mathfrak{q}}$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の部分群とする．$X = G_{\mathbb{C}}/\overline{Q}$ は一般旗多様体になる．$\mathfrak{q}$ が θ 不変であることから，自然な写像 $i : Y = K_{\mathbb{C}}/(\overline{Q} \cap K_{\mathbb{C}}) \to G_{\mathbb{C}}/\overline{Q} = X$ は閉うめこみになる．$\lambda \in (\bar{\mathfrak{q}})^*$ に対応する X 上のねじれ微分作用素環を $\mathcal{D}_{X,\lambda}$ で表す ([2])．$\mathcal{D}_{X,0}$ が普通の微分作用素環である．$G_{\mathbb{C}}$ の X への作用から環準同型 $U(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_{X,\lambda})$ が定まっている．λ は L の指標であるから，$\lambda|_{\bar{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{k}}$ は $\overline{Q} \cap K_{\mathbb{C}}$ 上の指標に持ちあがり，Y 上の正則直線束 $K_{\mathbb{C}} \times_{\overline{Q} \cap K_{\mathbb{C}}} \mathbb{C}_\lambda = \mathcal{O}_Y(\lambda)$ を定める．$\mathcal{O}_Y(\lambda)$ は Y 上のねじれ微分作用素環の加群とみなすことができる．$\mathcal{O}_Y(\lambda)$ の $\mathcal{D}$ 加群の意味での押し出しを $i_+\mathcal{O}_Y(\lambda)$ とすると，$U(\mathfrak{g})$ 加群として $A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \simeq \Gamma(X, i_+\mathcal{O}_Y(\lambda))$ が成り立つ ([1])．

$i_+\mathcal{O}_Y(\lambda)$ の切断がどのようなものか局所的に見てみよう．X の局所座標 $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n$ を Y が $q_1, \ldots, q_n$ の共通零点になるようにとる．局所的に自明化すると，$i_+\mathcal{O}_Y(\lambda)$ の切断は $f(p_1, \ldots, p_m)(\partial_{q_1})^{i_1} \cdots (\partial_{q_n})^{i_n}$ という形をしている．また $\mathfrak{g}$ の元は 1 階の微分作用素に対応して $i_+\mathcal{O}_Y(\lambda)$ の切断に作用する．

3　離散分解性

(G, G', σ) を連結な線型簡約リー群の対称対とする．すなわち，G の対合 σ についてその固定部分群 G^σ の単位元を含む連結成分を G' とする．θ を σ と可換な G の Cartan 対合とし，$K = G^\theta$, $K' = (G')^\theta$ とおく．Cartan 分解はそれぞれ $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$，$\mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{k}'_0 + \mathfrak{p}'_0$ とする．

$(\mathfrak{g}, K)$ 加群の離散分解性の概念は小林 [4][5][6] により導入された．

定義 3.1. $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 V が $(\mathfrak{g}', K')$ 加群として離散分解するとは，フィルトレーション $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ かつ V_n が有限長 $(\mathfrak{g}', K')$ 加群となるものが存在することとする．

V が既約ユニタリ $(\mathfrak{g}, K)$ 加群で $(\mathfrak{g}', K')$ 加群として離散分解する場合，V は既約 $(\mathfrak{g}', K')$ 加群の直和にわかれる: $V = \bigoplus W_i$．既約ユニタリ $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 V の完備化 $\overline{V}$ は自然に G の既約表現とみなせる．すると $\overline{V}$ の G' への制限の分岐則は $\overline{V} = \bigoplus \overline{W_i}$ となる ([7])．すなわち，$(\mathfrak{g}, K)$ 加群が離散分解する場合にはその分岐則から，対応する G の既約ユニタリ表現の分岐則もわかる．

特に $V = A_\mathfrak{q}(\lambda)$ で λ が weakly fair の場合には，離散分解のための判定条件が知られている ([6])．

事実 3.2. (G, G', σ) を対称対とする．$\mathfrak{q}$ を θ 不変な $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数として $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}^{-\sigma} = 0$ とする．λ は weakly fair で $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ は 0 でないとする．このとき，$A_\mathfrak{q}(\lambda)$ が $(\mathfrak{g}', K')$ 加群として離散分解するための必要十分条件は $\sigma(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) \subset \mathfrak{q}$ である．

$\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}^{-\sigma} = 0$ という仮定は，適当な元 $k \in K$ をとって $\mathfrak{q}$ を $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{q}$ で置き換えて成立するようにできる．また $\mathfrak{q}$ を $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{q}$ で置き換えてできる $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ は自然にもとのものと同型になる．したがって与えられた $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ の離散分解性を判定したければ，$\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}^{-\sigma} = 0$ をみたすように $\mathfrak{q}$ を $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{q}$ で置き換えてから $\sigma(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) \subset \mathfrak{q}$ が成り立つかどうかを見ればよい．

この事実を使うと，次が示せる．

補題 3.3. 事実 3.2 の仮定の下で，λ は weakly fair で $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ は 0 でなく，$(\mathfrak{g}', K')$ 加群として離散分解すると仮定する．このとき，$\mathfrak{g}'$ の θ 不変な放物型部分代数 $\mathfrak{q}'$ で $\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{p}' = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{p}'$ をみたすものが存在する．

4　分岐則

前節の設定で $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ が離散分解する場合の分岐則について考える．(G, G', σ) を連結線形簡約リー群の対称対，$\mathfrak{q}$ を θ 不変な $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数とする．λ は weakly fair で $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ は 0 でなく，$(\mathfrak{g}', K')$ 加群として離散分解すると仮定する．

序の (1),(2) に対応する定理を順に述べよう．

定理 4.1. 事実 2.2(i) の μ_0 が dominant であるとする．τ を対応する K の既約表現とする．τ の既約 K' 表現への分解を

$$\tau|_{K'} = \bigoplus m_\delta \delta \qquad m_\delta \in \mathbb{N}$$

とする．このとき，ある $\mathfrak{g}'$ の θ 不変な放物型部分代数 $\mathfrak{q}'_1$ と $m_\delta > 0$ なる各 δ に対応してユニタリ指標 λ_δ が存在して，以下が成立する．

(i) $A_{\mathfrak{q}'_1}(\lambda_\delta)$ は bottom layer をもち，その K'-type は δ と等しい．

(ii) $A_{\mathfrak{q}'_1}(\lambda_\delta)$ の bottom layer で生成される $(\mathfrak{g}', K')$ 加群 $V(\lambda_\delta)$ は既約ユニタリになる．

(iii) $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V(\lambda_\delta), A_{\mathfrak{q}}(\lambda)) \geq m_\delta$.

定理 4.2. あるユニタリ指標 λ_i と自然数 m_i が存在して，$(\mathfrak{g}', K')$ 加群として

$$A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \leq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} m_i A_{\mathfrak{q}'_1}(\lambda_i)$$

が成り立つ．

注意 4.3.

- $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}^{-\sigma} = 0$ のとき，$\mathfrak{q}'_1$ は補題 3.3 の条件 $\mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{p}' = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{p}'$ をみたすようにとれる．λ_i, m_i は有限次元表現の分岐則を使って計算可能な値である．一般に λ_i が weakly fair になるとは限らない．
- 不等式の意味は，任意の既約 $(\mathfrak{g}', K')$ 加群についてその左辺に現れる重複度が右辺に現れる重複度以下になるという意味である．

2 つの定理の証明には $\mathcal{D}$ 加群が用いられ，分類によらずに示される．(3) にあたる分岐公式を得るには，ケースバイケースに不等式と K'-type などの情報を組み合わせることですべて計算できる．その際，分岐則に現れる λ_i が weakly fair でなければ $\mathfrak{q}'_1$ をうまくとりかえて weakly fair なパラメータで表すことが可能である．

5 例

$G = SO^*(2n)$，$G' = SO^*(2n-2) \times SO(2)$ とする $(n \geq 3)$．$\mathfrak{k}_0$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}_0$ と，$\mathfrak{t}^*$ の基底 $e_1, \ldots, e_n$ を

$$\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{e_i - e_j | 1 \leq i \neq j \leq n\}$$
$$\Delta(\mathfrak{p}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i + e_j) | 1 \leq i < j \leq n\}$$

となるように定める．$\mathfrak{t}$ を含む放物型部分代数 $\mathfrak{q}$ を，

$$
\begin{aligned}
&\Delta(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{e_i - e_j | 1 \le i \ne j \le n-1\} \cup \{\pm(e_i + e_n) | 1 \le i \le n-1\} \\
&\Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{t}) = \{e_i + e_j | 1 \le i < j \le n-1\} \cup \{e_i - e_n | 1 \le i \le n-1\} \\
&\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}
\end{aligned}
$$

となるようにとる．$L = U(n-1,1)$ となる．このとき，$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は $(\mathfrak{g}', K')$ 加群として離散分解することが確かめられる．$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は $X = G_{\mathbb{C}}/\overline{Q}$ 上の $\mathcal{D}$ 加群として実現される．$K_{\mathbb{C}} = GL(n,\mathbb{C})$ で $Y = K_{\mathbb{C}}/(\overline{Q} \cap K_{\mathbb{C}})$ は射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ と同型になる．$K'_{\mathbb{C}} = GL(n-1,\mathbb{C}) \times GL(1,\mathbb{C})$ のこの同型を通じた作用は $\mathbb{P}^{n-1} = \{[x_1 : \cdots : x_n]\}$ の成分への自然な作用になるとする．$K'_{\mathbb{C}}$ 軌道への分解は，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}^{n-1} = &\{[x_1 : \cdots x_{n-1} : x_n] \,|\, (x_1, \ldots, x_{n-1}) \ne (0, \ldots, 0), x_n \ne 0\} \\
&\cup \{[x_1 : \cdots : x_{n-1} : 0] \,|\, (x_1, \ldots, x_{n-1}) \ne (0, \ldots, 0)\} \\
&\cup \{[0 : \cdots : 0 : x_n] \,|\, x_n \ne 0\}
\end{aligned}
$$

となる．一般性を失うことなく，Y の原点 $e(\overline{Q} \cap K_{\mathbb{C}})$ は $[1:0:\cdots:0:1]$ と対応しているとしてよい．すると $Y^o = K'_{\mathbb{C}}/(\overline{Q} \cap K'_{\mathbb{C}})$ は Y の中で開軌道になる．また自然な写像 $X^o = G'_{\mathbb{C}}/(\overline{Q} \cap G'_{\mathbb{C}}) \to X$ は開うめこみになっている．

次に，$\mathfrak{k}'_0$ の Cartan 部分代数 を $\mathfrak{t}'_0$ として，$(\mathfrak{t}')^*$ の基底 $f_1, \ldots, f_n$ を，

$$
\begin{aligned}
&\Delta(\mathfrak{k}',\mathfrak{t}') = \{f_i - f_j | 1 \le i \ne j \le n-1\} \\
&\Delta(\mathfrak{p}',\mathfrak{t}') = \{\pm(f_i + f_j) | 1 \le i < j \le n-1\}
\end{aligned}
$$

となるように定める．ただし，f_n が $\mathfrak{so}(2,\mathbb{C})$ 成分と対応するようにする．$\mathfrak{t}'$ を含む $\mathfrak{g}'$ の放物型部分代数 $\mathfrak{q}'_1$ を，

$$
\begin{aligned}
&\Delta(\mathfrak{l}'_1,\mathfrak{t}') = \{f_i - f_j | 1 \le i \ne j \le n-2\} \\
&\Delta(\mathfrak{u}'_1,\mathfrak{t}') = \{f_i + f_j | 1 \le i < j \le n-1\} \cup \{f_i - f_{n-1} | 1 \le i \le n-2\} \\
&\mathfrak{q}'_1 = \mathfrak{l}'_1 + \mathfrak{u}'_1
\end{aligned}
$$

となるようにとる．$\bar{\mathfrak{q}}'_1$ をリー環にもつ $G'_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群を $\overline{Q}'_1$ とすると，$\overline{Q} \cap G'_{\mathbb{C}} \subset \overline{Q}'_1$ より，次の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
Y = K_{\mathbb{C}}/(\overline{Q} \cap K_{\mathbb{C}}) \arrow[r, "i"] & X = G_{\mathbb{C}}/\overline{Q} \\
Y^o = K'_{\mathbb{C}}/(\overline{Q} \cap K'_{\mathbb{C}}) \arrow[r, "i^o"] \arrow[u] \arrow[d] & X^o = G'_{\mathbb{C}}/(\overline{Q} \cap G'_{\mathbb{C}}) \arrow[u] \arrow[d, "\pi"'] \\
Y' = K'_{\mathbb{C}}/(\overline{Q}'_1 \cap K'_{\mathbb{C}}) \arrow[r, "i'"] & X' = G'_{\mathbb{C}}/\overline{Q}'_1
\end{tikzcd}
$$

横向きの写像はすべて閉うめこみになっている．また，下の可換図式において $\pi^{-1}i'(Y') = i^o(Y^o)$ が成り立っている．π は $G'_{\mathbb{C}}$ の $SO(2,\mathbb{C})$ 成分の作用による商写像になっている．同型 $Y' \simeq \mathbb{P}^{n-2}$ で，写像 $Y^o \to Y'$ は $[x_1 : \cdots : x_n] \mapsto [x_1 : \cdots : x_{n-1}]$ となる．

$A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \simeq \Gamma(X, i_+\mathcal{O}_Y(\lambda))$ であったが，X^oは X の開集合とみなすと制限により

$$\Gamma(X, i_+\mathcal{O}_Y(\lambda)) \subset \Gamma(X^o, i_+\mathcal{O}_Y(\lambda)|_{X^o})$$

となる．ただし右辺は $K'_{\mathbb{C}}$ 有限な切断 (あるいは代数的切断) のみをとる．$\Gamma(X^o, i_+\mathcal{O}_Y(\lambda)|_{X^o})$ には $SO(2,\mathbb{C})$ の作用があり，その固有値により

$$\Gamma(X^o, i_+\mathcal{O}_Y(\lambda)|_{X^o}) = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} V_l$$

と分解する．各 V_l は底空間 X' 上の $\mathcal{D}$ 加群の切断 $\Gamma(X', i'_+\mathcal{O}_{Y'}(\mu_l))$ の形で書ける．$\Gamma(X', i'_+\mathcal{O}_{Y'}(\mu_l)) \simeq A_{\mathfrak{q}'_1}(\mu_l)$ であるから，このようにして定理 4.2 の形の不等式を得る．

$\lambda = k(e_1 + \cdots + e_{n-1} - e_n)(k \geq -\frac{n-1}{2}, k \in \mathbb{Z})$ として，実際に計算すると

$$A_{\mathfrak{q}}(k(e_1 + \cdots + e_{n-1} - e_n)) \leq \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} A_{\mathfrak{q}'_1}(k(f_1 + \cdots + f_{n-2}) + l(-f_{n-1} + f_n))$$

となる．$\mathfrak{g}' = \mathfrak{so}(2n-2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2,\mathbb{C})$ に応じて $\mathfrak{q}'_1 = \mathfrak{q}''_1 \oplus \mathfrak{so}(2,\mathbb{C})$ と分解すると

$$A_{\mathfrak{q}}(k(e_1 + \cdots + e_{n-1} - e_n)) \leq \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} A_{\mathfrak{q}''_1}(k(f_1 + \cdots + f_{n-2}) - lf_{n-1}) \otimes \mathbb{C}_l$$

と書ける．

注意 5.1. この例では X^o が X の開集合になったが，これは一般には不成立である．開でない場合，X^o の X における余方向にフィルトレーションを入れる必要がある．

注意 5.2. 定理 4.1 にある $V(\lambda_\delta)$ は，この場合 $-k \leq l \leq k+n-2$ に対する $A_{\mathfrak{q}'_1}(k(f_1 + \cdots + f_{n-2}) + l(-f_{n-1} + f_n))$ である．

上の不等号の右辺はパラメータが悪いものも含んでいる．$\mu_l = k(f_1 + \cdots + f_{n-2}) - lf_{n-1}$ とすると $A_{\mathfrak{q}''_1}(\mu_l)$ は l の値によって次のように変化する．

$$l < -k \Rightarrow A_{\mathfrak{q}''_1}(\mu_l) = 0$$

$$-k \leq l \leq k \Rightarrow A_{\mathfrak{q}''_1}(\mu_l) \text{ は正則離散系列表現}$$

$$l = k+1 \Rightarrow A_{\mathfrak{q}''_1}(\mu_l) \text{ は正則離散系列表現の極限 } (k \geq 0)$$

$$-k \leq l \leq k + \frac{1}{2}(n-1) \Rightarrow \mu_l \text{は weakly fair で } A_{\mathfrak{q}''_1}(\mu_l) \text{ は既約ユニタリ}$$

$$-k \leq l \leq k+n-2 \Rightarrow A_{\mathfrak{q}''_1}(\mu_l) \text{ は既約ユニタリ}$$

$$k+n-1 \leq l \Rightarrow A_{\mathfrak{q}''_1}(\mu_l) \text{ は可約}$$

ここで，$\mathfrak{so}(2n-2,\mathbb{C})(\subset \mathfrak{g}')$ の放物型部分代数 $\mathfrak{q}_2''$ を，

$$\begin{aligned}
&\Delta(\mathfrak{l}_2'') = \{f_i - f_j | 2 \le i \ne j \le n-2\} \cup \{\pm(f_i + f_{n-1}) | 2 \le i \le n-2\} \\
&\Delta(\mathfrak{u}_2'') = \{f_1 \pm f_i | 2 \le i \le n-1\} \cup \{f_i + f_j | 2 \le i < j \le n-2\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup \{f_i - f_{n-1} | 2 \le i \le n-2\} \\
&\mathfrak{q}_2'' = \mathfrak{l}_2'' + \mathfrak{u}_2''
\end{aligned}$$

となるようにとる．$k+n-1 \le l$ のとき，$A_{\mathfrak{q}_1''}(\mu_l)$ は $A_{\mathfrak{q}_2''}((l-n+2)f_1 + (k+1)(f_2 + \cdots + f_{n-2} - f_{n-1}))$ を部分加群として含んでいる．実は $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の分岐則に現れるのは $A_{\mathfrak{q}_1''}(\mu_l)$ 全体ではなく，この部分加群である．これは $A_{\mathfrak{q}_1''}(\mu_l)$ の元を X^o 上の $\mathcal{D}$ 加群の切断とみなしたとき，Y の余次元 1 の閉 $K_{\mathbb{C}}'$ 軌道 $\{[x_1 : \cdots : x_{n-1} : 0]\}$ に沿って極を持つものがあるためである．また，$k + (n-1)/2 < l \le k+n-2$ のとき μ_l は weakly fair でないが，$\mathfrak{q}_2''$ を使うと $A_{\mathfrak{q}_1''}(\mu_l)$ と同型な表現が weakly fair なパラメータで書ける．以上を合わせて，$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の分岐則は

$$\begin{aligned}
&A_{\mathfrak{q}}(k(e_1 + \cdots + e_{n-1} - e_n)) \\
&= \bigoplus_{-k \le l \le k+(n-1)/2} A_{\mathfrak{q}_1''}(k(f_1 + \cdots + f_{n-2}) - l f_{n-1}) \otimes \mathbb{C}_l \\
&\oplus \bigoplus_{k+(n-1)/2 < l} A_{\mathfrak{q}_2''}((l-n+2)f_1 + (k+1)(f_2 + \cdots + f_{n-2} - f_{n-1})) \otimes \mathbb{C}_l
\end{aligned}$$

となる．

参考文献

[1] H. Hecht, D. Miličić, W. Schmid, J. A. Wolf, *Localization and standard modules for real semisimple Lie groups. I. The duality theorem*, Invent. Math. 90 (1987), 297–332.

[2] M. Kashiwara, *Representation Theory and D-modules on flag varieties*, Astérisque No. 173–174, Orbites Unipotentes et Représentations (1989), 55–109

[3] A. W. Knapp, D. Vogan, Jr., “Cohomological Induction and Unitary Representations”, Princeton U.P., 1995.

[4] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of* $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ *with respect to reductive subgroups and its applications*, Invent. Math. 117 (1994), 181–205.

[5] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of* $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$*, II. —micro-local analysis and asymptotic* K*-support*, Ann. of Math. 147 (1998), 709–729.

[6] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of* $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$*. III. —restriction of Harish-Chandra modules and associated varieties*, Invent. Math. 131 (1998), 229–256.

[7] T. Kobayashi, *Restrictions of unitary representations of real reductive groups*, Lie Theory: Unitary Representations and Compactifications of Symmetric Spaces (J. P. Anker and B. Ørsted, eds.), Prog. Math. 229, Birkhäuser, 2005, 139–207.

[8] N. Wallach, "Real Reductive Groups I", Pure and Appl. Math., Academic Press, 1988.