

非可換調和振動子の数論

九大数理 若山正人

October 10, 2010

以下で与えられる $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ 上の行列型微分作用素 $Q = Q_{\alpha, \beta}$ で定まる常微分方程式系を非可換調和振動子 (NCHO: *non-commutative harmonic oscillator*) という:

$$Q := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 \right) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \right),$$

ここで、パラメータ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ は $\alpha\beta > 1$ を満たすとする。このとき Q は自己共役な正定値作用素を定め、重複度が一様有界な (実際 ≤ 3 が示される) 離散スペクトルのみを持つ:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \nearrow +\infty.$$

定義式のパラメータが $\alpha = \beta$ を満たすとき、 Q は通常の調和振動子の (スケールを変更した) 組にユニタリ同値であることが知られるが、一般には、固有値の具体的姿はまったく判らない。(生成・消滅演算子が存在するのかどうかは不明。)

そこで、スペクトル構造 (たとえば、十分大きな正の数 T に対し、 T 以下の固有値は何個くらいあるか?、など) を調べるために、次のディリクレ級数 (スペクトルのゼータ関数) を考える:

$$\zeta_Q(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$$

この級数は $\operatorname{Re}(s) > 1$ で絶対収束し全平面に有理型関数として解析接続される。さらに、リーマンゼータ $\zeta(s)$ と同様に $s = 1$ で一位の極を、 $s = 0, -2, -4, -6, \dots$ において自明な零点を持つことも示される。($\alpha = \beta = \sqrt{2}$ のときには $\zeta_Q(s) = 2(2^s - 1)\zeta(s)$ である。そのため $s = 0$ が自明零点に加わっていることに注意。)

今回お話しすることは、遙か10年以上前に始めた Alberto Parmeggiani との非可換調和振動子の導入とスペクトルの研究、そしてそのスペクトルゼータ関数 $\zeta_Q(s)$ の解析接続と $s = 2, 3$ における特殊値についての一瀬孝との共同研究、その後の特殊値の数論に関係し今に続く木本一史との共同研究についてである。そこでは、Roger Apéry が $\zeta(2)(= \pi^2/6)$ と $\zeta(3)$ の無理数性を証明した際に用いた、所謂アペリ数の類似を扱うことになる。この類似数列はアペリ数の場合と似た3項間漸化式を満たすことが示される (このことやその積分表示の形に加え、実際にそれが有する合同関係などの数論的性質から、Apéry numbers と命名した)。なお、一つの顕著な、しかしアペリ数の場合と異なる点は、 $s = 3$ の場合の漸化式が $s = 2$ のときの漸化式 of 非斉次版として与えられることである。

さて $s = 2$ の場合に、このアペリ数の類似物の母関数 $w_2(t)$ を考えると、F. Beukers によるアペリ数の場合のテクニックを真似て、それが満たす微分方程式が、rational 4-torsion をもつ楕円曲線の普遍族に対する Picard-Fuchs 方程式であること、またその族を規定するパラメー

タ t は合同部分群 $\Gamma_0(4)$ の保型関数と考えられること、さらには、 t を古典的なルジャンドル関数 $\lambda(\tau)$ にとれば、 $w_2(t)$ が、 τ の関数として、重さ 1 の $\Gamma_0(4)$ に関する保型形式であることなどが示される。実際この $w_2(t)$ は、D. Zagier がまったく別の興味から研究し得た (別の意味での) アペリ数の類似漸化式の階の分類リストにある一つである。さらに、木本によって得られた高次の特殊値 $\zeta_Q(n)$ ($n = 4, 5, \dots$) の明示的表示を用いることにより、対応する母関数が、 $w_2(t)$ が満たす、上記の Picard-Fuchs 方程式 (合流型の Heun で与えられる斉次の微分方程式) の非斉次版で与えられることが判り、そのことを利用して、それらの母関数が、やはり、保型形式に “極めて近い” ことなどが導かれる。これらの事実から、アペリ数の類似物が、際立った合同関係式を満たすこと等も導かれる (と知っている: 10月10日現在)。

なお、非可換調和振動子をテーマにして行われた研究 (及び、携った研究者) は、未だ僅かである。実際、顕著な結果は、そのスペクトル問題を、Heun の常微分方程式の解の存在に言い換えたこと及び、それに続き Heun 方程式の接続問題を研究した落合啓之の仕事、また、 $\zeta_Q(2)$ が、ある意味で楕円積分を用いて書けるとい程度にとどまっていた一瀬との結果を、ガウスの超幾何を用いて明示的に書いた同じく落合の研究、Parmeggiani によるスペクトルに関する幾何学的観点を用いた解析的研究、などが主なものである。

ところで、 $\alpha = \beta$ のときに、非可換調和振動子が調和振動子の組に同値なことは、Parmeggiani との最初の研究において、インタートワイニング作用素を \mathfrak{sl}_2 の oscillator 表現を利用して具体的に構成することで示したが、最近、谷口説男が、確率微分方程式の視点から再証明を行った。ただし谷口によると、パラメータが一般の場合に、同様の方法でスペクトルに関し新しいことを付け加えるのは容易でなかろうとのことである。また、中尾充宏・長藤かおりとの共同研究では、固有値の数値計算を行ったが、固有値の具体的姿 (パラメータに関する固有値分布の様子) は判らないことばかりである。

関連文献については、最近出版 (2010 年) された A. Parmeggiani 著 “Introduction to the spectral theory of non-commutative harmonic oscillators” (Springer LN,1992) の文献表をご覧ください。