互いに固有に作用する半単純対称対の組の分類

東京大学大学院数理科学研究科 奥田隆幸

1 はじめに

局所コンパクト群 G の部分集合族に対して, 関係 $\pitchfork$ を以下の様に定義する.

定義 1.1 (小林 [8]). *G を局所コンパクト群とする. G の部分集合 L, H が $L \pitchfork H$ in G であるとは, G の任意のコンパクト部分集合 S に対して, $L \cap SHS^{-1} \subset G$ が相対コンパクトであることとする.*

以下の Fact から分かるように, 関係 $\pitchfork$ は, 等質空間 G/H への閉部分群 L の作用が固有であるという条件を群の言葉で書き直したものである.

Fact 1.2. *局所コンパクト群 G とその閉部分群 L, H に対して, 以下の四つの条件は同値である.*

- *$L \pitchfork H$ in G.*
- *$H \pitchfork L$ in G.*
- *L は等質空間 G/H に固有に作用する.*
- *H は等質空間 G/L に固有に作用する.*

定義からすぐに分かることとして, G がコンパクト群である場合や, H, L のいずれかがコンパクトである場合には, いつでも $L \pitchfork H$ in G が成り立つ. 特に G/H がリーマン対称空間であるような場合には, 任意の G の閉部分群 L は G/H に固有に作用する. しかし, L, H が共に非コンパクトである場合には, 与えられた (G, H, L) に対して, $L \pitchfork H$ in G であるかを判定することは一般には難しい. 小林は [7] において, G が線形簡約リー群で H, L が簡約型部分群の場合に, $L \pitchfork H$ in G についての判定条件を作り, Calabi–Markus 現象 (cf. [4]) の必要十分条件を与えた. これが非リーマン等質空間上の不連続群や固有作用の理論の出発点となり, [2, 11, 12, 13, 16, 19, 20, 21] などの研究が

続いている. 関連する話題のまとめとしては [9, 10, 14] などが挙げられる.

本講演では, G が線形半単純リー群で, (G,H), (G,L) が共に対称対であるという設定において, $L \pitchfork H$ in G となるかの判定を行う. 主定理としては, 小林 [7] の結果を応用し, 対称対の c-dual と双曲型軌道を用いて, この設定における, より簡単な判定法を示した (定理 2.2 および 系 3.6). また実際に, 上記の設定で $L \pitchfork H$ in G となる (G,H,L) について, 局所的な意味での分類を行った (§4).

2 主定理

本講演の設定は, 以下のものである.

設定 2.1. *G を線形半単純リー群, σ_1, σ_2 を G のリー群としての対合とする. また, H_1, H_2 を, それぞれ $G^{\sigma_1} := \{\, g \in G \mid \sigma_1(g) = g \,\}$, $G^{\sigma_2} := \{\, g \in G \mid \sigma_2(g) = g \,\}$ の開部分群であるとする.*

この設定において, G, H_1, H_2 のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ と書くことにする. G の対合 σ_1, σ_2 のそれぞれの微分は, $\mathfrak{g}$ のリー環としての対合を与えるが, それらも同じ記号を用いて, σ_1, σ_2 と書くことにする. このとき, 各 $i = 1,2$ に対して $\mathfrak{h}_i = \{\, X \in \mathfrak{g} \mid \sigma_i(X) = X \,\}$ である. いま, 二つの対称対 $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \mathfrak{h}_1)$ と $(\mathfrak{g}, \sigma_2, \mathfrak{h}_2)$ が与えられたが, それぞれの対称対について, 以下のように c-dual $\mathfrak{g}_1^c$, $\mathfrak{g}_2^c$ を定義する. すなわち, 各 $i = 1,2$ に対して $\mathfrak{q}_i := \{\, X \in \mathfrak{g} \mid \sigma_i(X) = -X \,\}$ とし, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{g}$ の部分リー環として, $\mathfrak{g}_i^c := \mathfrak{h}_i \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{q}_i$ を定義し, これを σ_i についての c-dual と呼ぶ. このとき, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1^c$, $\mathfrak{g}_2^c$ はそれぞれ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の実形である. 各 $\mathfrak{g}_i^c$ $(i = 1,2)$ についての複素共役は, σ_i を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に反正則対合として拡張したものに他ならない.

以上の設定と記号の下で, 主定理を述べる.

定理 2.2. *設定 2.1 において, (G, H_1, H_2) に対する次の二つの条件は同値である:*

(i) $H_1 \pitchfork H_2$ *in* G.

(ii) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の非零な $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-双曲型軌道であって, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1^c$, $\mathfrak{g}_2^c$ の全てと交わるものは存在しない.

(ここで, $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が双曲的であることを $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ が実対角化可能であることとして定義し, 双曲的な元からなる $\{0\}$ でない $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-軌道を非零な双曲型軌道としている.)

この定理の証明については §5 で述べる．また, 定理 2.2 の条件 (ii) は, 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ と, $\mathfrak{g}$ の二つの対合 σ_1, σ_2 に対して定義される条件であるが, §3 では, $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ が定理 2.2 の条件 (ii) を満たすための判定法を紹介し, §4 では, この条件 (ii) を満たす $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ の分類を行う．

Remark 2.3. 定理 2.2 の設定としては, 線形半単純リー群 G の二つの対合の微分として $\mathfrak{g}$ の対合 σ_1, σ_2 を定義したが, 実際には, この定理は σ_1, σ_2 が G の対合の微分として書けない場合 (G の対合に持ち上がらない場合) においても成立する．すなわち, 線形半単純リー群 G と, その閉部分リー群 H_1, H_2 に対して, G, H_1, H_2 のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ としたとき, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_2)$ が共に対称対であるという設定において, 定理 2.2 の二条件は同値である．

3 判定のアルゴリズム

定理 2.2 の条件 (ii) は, 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ と二つの対合 σ_1, σ_2 (この σ_1 と σ_2 は互いに可換とは仮定していないことに注意) に対して定義される条件である．この節では, $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ についての条件 (ii) の判定法 (系 3.6) を述べる．

一般に, 複素半単純リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を考える．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ についての被約ルート系から定義されるディンキン図形に対して, その各頂点に非負実数を重みとして対応させたものを, 非負実数値重み付きディンキン図形と呼ぶことにする．特に, 非負実数値重み付きディンキン図形が, 零以外の重みを一つでも持つとき, 非零であるという．また, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の実形 $\mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の被約ルート系から $\mathfrak{g}$ の制限ルート系への制限を表した図形として, 佐武図形が定義される (詳しくは [1, 6, 18] などを参照)．佐武図形についての詳しい定義はここでは述べないが, 図形としては, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のディンキン図形のいくつかの頂点を黒く塗り, 残った頂点同士のいくつかのペアを矢印で結んだものである．

Remark 3.1. 複素半単純リー環の冪零軌道の分類などで用いられる重み付きディンキン図形では, 重みとして現れる数としては $\{0, 1, 2\}$ のみであるが, 今回は双曲型軌道全体の集合 (冪零軌道と対応しないものも含めて) を扱いたいので, 非負実数値の重みを考える必要がある (*cf. Fact* 3.4)．

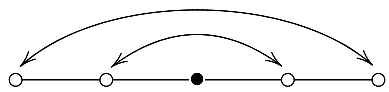
複素半単純リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の非負実数値重み付きディンキン図形と, 実形 $\mathfrak{g}$ の佐武図形に対して, 以下の概念を定義しておく．

定義 3.2 (Match)**.** $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の非負実数値重み付きディンキン図形 D が, $\mathfrak{g}$ の佐武図形 S と *match* するということを, 次の二条件を満たすこととして定義する.

(a) 佐武図形 S において黒い頂点は, 重み付きディンキン図形 D においての重みは零である.

(b) 佐武図形 S において結ばれている二頂点は, 重み付きディンキン図形 D においては重みが互いに等しい.

例 3.3. 例として, 複素単純リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$ と, その実形 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(4, 2)$ について考える. $\mathfrak{su}(4, 2)$ の佐武図形 S は,



で与えられる. ここで, $\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$ の重み付きディンキン図形 D_1, D_2 を

$$D_1 := \overset{2}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{3}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{0}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{3}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{2}{\circ}$$

$$D_2 := \overset{1}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{1}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{1}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{2}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{3}{\circ}$$

としてとったなら, 定義 3.2 によると, D_1 は S と *match* するが, D_2 は S と *match* しない.

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{j}$ と, 被約ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j})$ の simple system Π を固定する. 良く知られているように, Π についての基本領域 $\mathfrak{j}_{\Pi} := \{ X \in \mathfrak{j} \mid \alpha(X) \geq 0 \ ({}^{\forall}\alpha \in \Pi) \}$ は, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の $\operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-双曲型軌道全体の集合と一対一に対応する. また, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の非負実数値重み付きディンキン図形は, Π から $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像と考えてよいが, $X \in \mathfrak{j}_{\Pi}$ に対して, $D_X : \Pi \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $D_X(\alpha) = \alpha(X)$ $({}^{\forall}\alpha \in \Pi)$ とする対応により, $\mathfrak{j}_{\Pi}$ と, 非負実数値重み付きディンキン図形全体の集合は一対一に対応する. 従って, 次の Fact が成り立つ.

Fact 3.4. 複素半単純リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ について, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の非負実数値重み付きディンキン図形全体の集合と $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の $\operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-双曲型軌道全体の集合は一対一に対応する. またこの対応において, 非零な重み付きディンキン図形は非零な双曲型軌道に対応する.

ここで, Djokovic [5] の結果を用いると, 次の命題が示せる (ここでは証明には立ち入らない).

命題 3.5. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素半単純リー環, $\mathfrak{g}$ をその実形とする. このとき, 任意の $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-双曲型軌道 $\mathcal{O}$ に対して, $\mathcal{O}$ が $\mathfrak{g}$ と交わることと, $\mathcal{O}$ に対応する非負実数値重み付きディンキン図形が $\mathfrak{g}$ の佐武図形と *match* することは同値である.

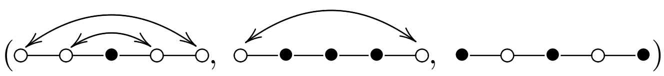
これにより, 設定 2.1 において, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の三つの実形 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1^c$, $\mathfrak{g}_2^c$ に命題 3.5 を適用すれば, 次の系が得られる.

系 3.6. 設定 2.1 において, $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ に対する次の二つの条件は同値である.

(ii) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ による非零な双曲型軌道であって, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1^c$, $\mathfrak{g}_2^c$ の全てと交わるものは存在しない.

(iii) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の非零な非負実数値重み付きディンキン図形であって, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1^c$, $\mathfrak{g}_2^c$ の三つの佐武図形全てと *match* するものは存在しない.

例 3.7. 例として, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(4,2)$ とし, 対合 σ_1, σ_2 それぞれに対応する $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ が, $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{su}(4,1) \oplus \mathfrak{so}(2)$, $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{sp}(2,1)$ である場合を考える. このとき, $\mathfrak{sl}(4,2)$ の複素化は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})$ であり, また, σ_1, σ_2 に対する *c-dual* はそれぞれ, $\mathfrak{g}_1^c = \mathfrak{su}(5,1)$, $\mathfrak{g}_2^c = \mathfrak{su}^*(6)$ となる. この三つの実形 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1^c$, $\mathfrak{g}_2^c$ の佐武図形は,

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1^c, \mathfrak{g}_2^c):$


となり, この三つの佐武図形全てと *match* する非零な非負実数値重み付きディンキン図形は存在しない. 従って系 3.6 より, この $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ は, 定理 2.2 の条件 (ii) を満たす. 従って特に, $Sp(2,1)$ の対称空間 $SU(4,2)/(SU(4,1) \times SO(2))$ への作用は固有である (*cf. Fact* 1.2, 定理 2.2).

4 分類結果

§3 では, 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ と二つの対合 σ_1, σ_2 (互いの可換性は仮定しない) に対して, 非負実数値重み付きディンキン図形と, 三つの実形 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1^c$, $\mathfrak{g}_2^c$ の佐武図形を見ることで, 定理 2.2 の条件 (ii) を判定する方法を述べた. この節では, この判定法 (系 3.6) を用いて, 条件 (ii) を満たす $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ の分類を行った結果を紹介する (特に定理 2.2 より, $H_1 \pitchfork H_2$ in G となる対称対の組 (G, H_1, H_2) の, 局所的な意味での分類を紹介することになる). その計算においては, 佐武図形の分類については 荒木 [1], 対称対の分類は Berger [3], 対称対の c-dual については 大島–関口 [17], Helminck [6] (これらの論文では, c-dual は

associate-dual $\mathfrak{g}^{ad}$ に相当する) などを参照した.

<u>**Case 1: $\mathfrak{g}$ が単純リー環の場合:**</u>

まず, $\mathfrak{g}$ が単純リー環である場合に, 定理 2.2 の条件 (ii) を満たす $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ の分類を紹介する.

Case 1-A: $\mathfrak{g}$ がコンパクト単純リー環, または σ_1, σ_2 のいずれかがカルタン対合である場合:

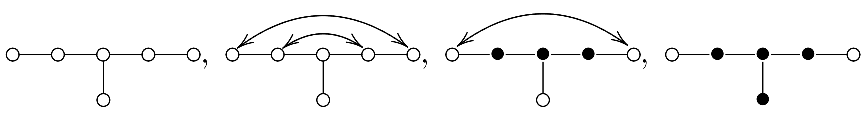
これは, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1^c$, $\mathfrak{g}_2^c$ のいずれかが, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形という場合である (カルタン対合の c-dual はコンパクト実形). 設定 2.1 においては, G がコンパクトであるか, G/H_1, G/H_2 のいずれかがリーマン対称空間である場合に対応している.

この場合には, $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ は必ず定理 2.2 の条件 (ii) を満たす. このことは, $H_1 \pitchfork H_2$ in G であることと条件 (ii) が同値であることから, 関係 $\pitchfork$ の定義に戻ればただちに分かる. また別の証明としては, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の任意の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-双曲型軌道はコンパクト実形と交わらない (コンパクト実形の佐武図形はすべての頂点が黒い) ということからも分かる.

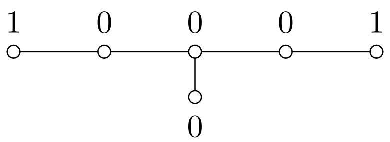
Case 1-B: $\mathfrak{g}$ が非コンパクト単純リー環であって, σ_1, σ_2 が共にカルタン対合ではない場合:

この場合には, $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が A_{2k} 型, D_l 型の複素単純リー環であるか, または $\mathfrak{g}$ 自身が A_{2k} 型, D_l 型の複素単純リー環である場合しか, 定理 2.2 の条件 (ii) を満たす $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ は存在しない (これらの分類を少し後で紹介する). 一例として, 以下で, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が E_6 型複素単純リー環である場合には, 条件 (ii) を満たす σ_1, σ_2 が取れないことを示す.

例 4.1 ($\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ **が** E_6 **型複素単純リー環である場合**)**.** $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が E_6 型複素単純リー環のとき, コンパクト実形を除く実形達の佐武図形は



のいずれかである (*cf.* [*1*]). ここで, 非負実数値重み付きディンキン図形 D を

$D =$ 

としてとると, コンパクト実形以外の全ての実形の佐武図形と *match* することが分かる.

従って, 系 3.6 より, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が E_6 型複素単純リー環である場合には, $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ が条件 (ii) を満たすのは, *Case 1-A* ($\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1^c$, $\mathfrak{g}_2^c$ のいずれかがコンパクト実形) の場合のみである.

上で挙がらなかった他の型についても同様の議論で, 条件 (ii) を満たすのは Case 1-A の場合に限ることが分かる. 以下, 最初に挙げた型について, 非コンパクト単純リー環 $\mathfrak{g}$ と, カルタン対合でない σ_1, σ_2 について, $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ が定理 2.2 の条件 (ii) を満たすものの分類を紹介する.

$\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{so}(8, \mathbb{C})$ や, その実形のときは複雑なので, まずそれ以外の分類を紹介する. $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ に対して, σ_1, σ_2 に対応する部分リー環 $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ を考えたとき, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ が以下の表に現れるなら, $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ は定理 2.2 の条件 (ii) を満たす.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}_1$	$\mathfrak{h}_2$	cocompact
$\mathfrak{sl}(2k, \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2k-1, 1)$	$\mathfrak{sl}(k, \mathbb{C})$	No
$\mathfrak{su}(2k-2j, 2j)$ $(1 \leq j \leq k-1)$	$\mathfrak{su}(2k-2j, 1)$ $\oplus \mathfrak{su}(2j-1) \oplus \mathfrak{so}(2)$	$\mathfrak{sp}(k-j, j)$	Yes$(j=1)$
$\mathfrak{so}(2k-2j, 2j)$ $(5 \leq k, 1 \leq j \leq k-1)$	$\mathfrak{so}(2k-2j, 1)$ $\oplus \mathfrak{so}(2j-1)$	$\mathfrak{su}(k-j, j) \oplus \mathfrak{so}(2)$	Yes$(j=1)$
$\mathfrak{so}(2m, 2m)$ $(3 \leq m)$	$\mathfrak{so}(2m, 1)$ $\oplus \mathfrak{so}(2m-1)$	$\mathfrak{so}(2m, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2)$	No
$\mathfrak{sl}(2k, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(2k-1, 1)$	$\mathfrak{su}^*(2k)$	No
$\mathfrak{so}(2k, \mathbb{C})$ $(5 \leq k)$	$\mathfrak{so}(2k-1, 1)$	$\mathfrak{so}^*(2k)$	No

Remark 4.2. 設定 2.1 において, 各 $i = 1, 2$ に対して, σ_i と可換な $\mathfrak{g}$ のカルタン対合 θ_i が存在する (*cf.* 松木 [*15*]). θ_i についての $\mathfrak{h}_i$ のカルタン分解を $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{k}(\mathfrak{h}_i) \oplus \mathfrak{p}(\mathfrak{h}_i)$ と書く. また, $\mathfrak{g}$ のカルタン分解も $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と書いておく. 定理 2.2 の同値な二条件を満たす (G, H_1, H_2) であって, 特に,

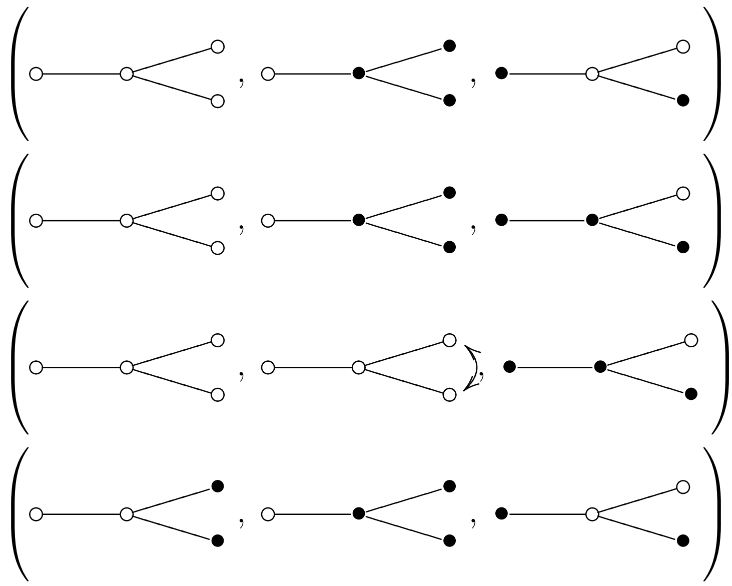
$$\dim \mathfrak{p}(\mathfrak{h}_1) + \dim \mathfrak{p}(\mathfrak{h}_2) = \dim \mathfrak{p}$$

を満たすとき, 両側剰余類の空間 $H_1 \backslash G / H_2$ はコンパクトなハウスドルフ空間になる (一般には多様体にはならない). このような H_1, H_2 は対称空間のココンパクト格子を構成

する意味において重要なものである (*cf.* 小林 [7]). 上記の表などにおいて, 定理 2.2 の条件 (ii) を満たす $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ の分類を紹介しているが, 上記の等式 (ココンパクトであるための必要十分条件) を満たすものについてはそれを記している. しかし, 分類結果に現れる上記の等式を満たす $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ は, 本質的に全て小林–吉野 [*11*] で既に知られていたものであり, 新しい例はない.

次に $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{so}(8, \mathbb{C})$ の実形の場合の分類を紹介する. この場合に, $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ が定理 2.2 の条件 (ii) を満たすのは, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1^c, \mathfrak{g}_2^c)$ の佐武図形が次のような組合せになる場合である.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1^c, \mathfrak{g}_2^c)$:

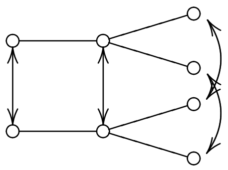


これらに対応する $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ のリー環としての同型類は, それぞれ次のようになる.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}_1$	$\mathfrak{h}_2$	cocompact
$\mathfrak{so}(4,4)$	$\mathfrak{so}(4,1) \oplus \mathfrak{so}(3)$	$\mathfrak{su}(2,2) \oplus \mathfrak{so}(2)$	No
		(or $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2)$)	No
$\mathfrak{so}(4,4)$	$\mathfrak{so}(4,1) \oplus \mathfrak{so}(3)$	$\mathfrak{so}(4,1) \oplus \mathfrak{so}(3)$	No
$\mathfrak{so}(4,4)$	$\mathfrak{so}(4,3)$	$\mathfrak{so}(4,1) \oplus \mathfrak{so}(3)$	Yes
	(or $\mathfrak{so}(3,2) \oplus \mathfrak{so}(1,2)$)		No
$\mathfrak{so}(6,2)$	$\mathfrak{so}(6,1)$	$\mathfrak{su}(3,1) \oplus \mathfrak{so}(2)$	Yes
	(or $\mathfrak{so}(5) \oplus \mathfrak{so}(1,2)$)		No

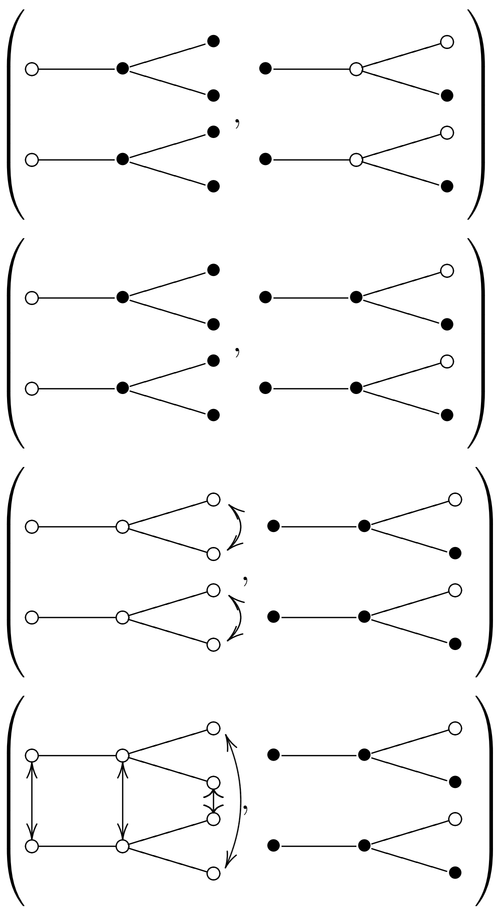
Remark 4.3. 上記の表では, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$ である場合の定理 *2.2* の条件 (ii) を満たす $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ について, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ の抽象的な同型類を表として与えているが, 逆に $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ が上記の表で与えたものになっていても, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ が条件 (ii) を満たすとは限らない. 例えば, 上記の表の二つ目の例においては, $\mathfrak{so}(4,4)$ の部分リー環 $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ は, 共に $\mathfrak{su}(4,1) \oplus \mathfrak{so}(3)$ と抽象的に同型であるが, それらは $\mathfrak{so}(4,4)$ の内部自己同型で移りあうものではない. 実際この場合には, $\mathfrak{g}_1^c$ の佐武図形と $\mathfrak{g}_2^c$ の佐武図形は, $\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$ の外部自己同型によるずれがある (上記の佐武図形の組のうち, 二つ目の例).

最後に $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$ のときの分類を紹介する. $\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$ の佐武図形は



である. このとき, $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ が条件 (ii) を満たすのは, $(\mathfrak{g}_1^c, \mathfrak{g}_2^c)$ の佐武図形が以下の組になる場合である.

$(\mathfrak{g}_1^c, \mathfrak{g}_2^c)$:



これらに対応する $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ のリー環としての同型類は, それぞれ次のようになる.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}_1$	$\mathfrak{h}_2$	cocompact
$\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(7,1)$	$\mathfrak{so}(6,2)$	No
$\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(7,1)$	$\mathfrak{so}(7,1)$	No
$\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(5,3)$	$\mathfrak{so}(7,1)$	No
$\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(7,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(7,1)$	Yes
	(or $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$)		No

非コンパクト単純リー環 $\mathfrak{g}$ と, カルタン対合でない σ_1, σ_2 で定理 2.2 の条件 (ii) を満たす $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ は, 上で挙げたもので全てである.

Case 2: $\mathfrak{g}$ が複数の単純リー環の直和で書ける場合.

$\mathfrak{g}$ が単純ではない半単純リー環の場合には, 定理 2.2 の条件 (ii) を満たすものの分類は, 単純リー環の場合の議論に帰着される. ここでは, $\mathfrak{g}$ が二つの単純リー環 $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ の (イデアルとしての) 直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$ として書ける場合に, どのようにして議論が帰着されるかを紹介する.

$\mathfrak{g}$ が二つの単純リー環の直和である場合には, $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ が定理 2.2 の条件 (ii) を満たすのは, 以下で紹介する場合に限る (ここでは証明には立ち入らない).

$\mathfrak{g}$ がコンパクトのとき: $\mathfrak{g}$ がコンパクトなら, いつでも $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ は条件 (ii) を満たす.

二つの対合が各因子で閉じているとき: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$ 上の二つの対合 σ_1, σ_2 が, 共に $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ を保っているとすると, 自然に, 対合の組 $(\mathfrak{g}', \sigma_1', \sigma_2')$ と $(\mathfrak{g}'', \sigma_1'', \sigma_2'')$ が定義される. このとき, $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ が条件 (ii) を満たすことと, $(\mathfrak{g}', \sigma_1', \sigma_2')$, $(\mathfrak{g}'', \sigma_1'', \sigma_2'')$ のいずれかが条件 (ii) を満たすことは同値である.

対合のうち一つが各因子を保たないとき: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$ 上の二つの対合 σ_1, σ_2 について, $\mathfrak{g}_1$ は $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ をそれぞれ保つが, σ_2 はそうでないという状況を考える. このとき, σ_2 がリー環としての同型であり, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ が単純であることから, $\sigma_2(\mathfrak{g}') = \mathfrak{g}''$ である. 特に σ_2 は $\mathfrak{g}'$ と $\mathfrak{g}''$ の間の同型を誘導する. ここで, $\mathfrak{g}'$ 上の二つの対合 σ_1', σ_2' を,

$$\sigma_1' := \sigma_1|_{\mathfrak{g}'}$$
$$\sigma_2' := (\sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2)|_{\mathfrak{g}'}$$

として定義する. このとき, $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ が条件 (ii) を満たすことと, $(\mathfrak{g}', \sigma_1', \sigma_2')$ が条件 (ii) を満たすことは同値である.

以上の場合に該当しないものは, すべて定理 2.2 の条件 (ii) を満たさない. 特に, $\mathfrak{g}$ が非コンパクトな単純リー環 $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ の直和であって, σ_1, σ_2 が共に $\mathfrak{g}'$ と $\mathfrak{g}''$ の同型を誘導する場合 (すなわち, $\mathfrak{g}'$ から $\mathfrak{g}''$ への同型 ϕ_1, ϕ_2 が存在して, 任意の $(X, Y) \in \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}$ に対して, $\sigma_1(X, Y) = (\phi_1^{-1}(Y), \phi_1(X))$, $\sigma_2(X, Y) = (\phi_2^{-1}(Y), \phi_2(X))$ となる場合) には, たとえその同型が互いに異なるものであっても, $(\mathfrak{g}, \sigma_1, \sigma_2)$ は定理 2.2 の条件 (ii) を満たすことはない. これは, 系 3.6 と, c-dual の性質などから証明される.

このように, $\mathfrak{g}$ が二つの単純リー環の直和からなる場合には, $\mathfrak{g}$ が単純である場合の議論に帰着される. $\mathfrak{g}$ が三つ以上の単純リー環の直和で書ける場合にも, 同様に単純リー環の場合に帰着される.

5　定理 2.2 の証明

この節では, 定理 2.2 の証明のアイディアについて述べる.

まず, 小林 [7, Theorem 4.1](固有作用の判定条件) に双曲型軌道についての議論を加えると, 次の系が証明できる.

系 5.1 (小林 [7], Theorem 4.1 の系)**.** *G を線形半単純リー群とし, H, L を G の簡約型部分群とする. ここで, G, H, L のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{l}$ と書く. このとき, (G, H, L) に対する次の二つの条件は同値である :*

(1) $L \pitchfork H$ *in* G.
(2) $\mathfrak{g}$ 内の非零な $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$-双曲型軌道 $\mathcal{O}^0$ であって, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{l}$ の両方と交わるものは存在しない.

(ここで, $X \in \mathfrak{g}$ が双曲的であることを $\operatorname{ad}(X) \in \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ が実対角化可能であることとして定義し, 双曲的な元からなる $\{0\}$ でない $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$-軌道を非零な双曲型軌道としている.)

また, 双曲型軌道について, 次の命題が成り立つ.

(以下で紹介する双曲型軌道についての命題 5.2 と命題 5.4 は, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{g}$ の構造論とルート系についての議論を行うことで証明されるが, ここでは深く立ち入らない.)

命題 5.2. *$\mathfrak{g}$ を半単純リー環とする. このとき, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の任意の $\operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-双曲型軌道 $\mathcal{O}$ に対して, $\mathcal{O}$ が $\mathfrak{g}$ と交わるなら, $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}$ は一つの $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$-双曲型軌道である (すなわち, $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ は $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}$ に推移的に作用する).*

特にこの命題から, $\mathcal{O}$ に $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}$ を対応させることで, $\mathfrak{g}$ と交わる $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の $\operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-双曲型

軌道全体の集合と, $\mathfrak{g}$ 内の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$-双曲型軌道全体の集合が一対一に対応することが分かる (特に, 非零な $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-双曲型軌道は非零な $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$-双曲型軌道と対応する).

Remark 5.3. 命題 5.2 の双曲型軌道を冪零軌道に置き換えた命題は成立しない. 一般に, 複素半単純リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と, その実形 $\mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-冪零軌道 $\mathcal{O}$ を固定すると, $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}$ は有限個の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$-冪零軌道に分かれる.

更に双曲型軌道と c-dual について, 次の命題が成り立つ.

命題 5.4. 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ と, その対合 σ に対して, σ についての *c-dual* $\mathfrak{g}^c$ を考える. このとき, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-双曲型軌道 $\mathcal{O}$ に対して, $\mathcal{O}$ が $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^c$ の両方と交わることと, $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}$ が $\mathfrak{h}$ と交わることは同値である.

これらの結果を用いると, 以下のように定理 2.2 が証明される.

定理 2.2 の証明. 系 5.1 より, (G, H_1, H_2) に対して, 次の二つの条件が同値であることを示せばよい.

- $\mathfrak{g}$ 内の非零な $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$-双曲型軌道 $\mathcal{O}^0$ であって, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ の両方と交わるものは存在しない.
- $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の非零な $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-双曲型軌道であって, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1^c$, $\mathfrak{g}_2^c$ の全てと交わるものは存在しない.

命題 5.2 により, $\mathcal{O}$ に $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}$ を対応させることで, $\mathfrak{g}$ と交わる $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-双曲型軌道全体の集合と, $\mathfrak{g}$ 内の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$-双曲型軌道全体の集合が一対一に対応するのであった. 更に, 命題 5.4 を用いると, 上の対応において, $\mathcal{O}$ が $\mathfrak{g}_1^c$ [resp. $\mathfrak{g}_2^c$] と交わることと, $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}$ が $\mathfrak{h}_1$[resp. $\mathfrak{h}_2$] と交わることは同値である. 従って, 複素半単純リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の双曲型軌道の集合

$$\{\, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ 内の非零な } \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\text{-双曲型軌道 } \mathcal{O} \text{ であって, } \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_1^c,\ \mathfrak{g}_2^c \text{ の全てと交わるもの} \,\}$$

と, 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ 内の双曲型軌道の集合

$$\{\, \mathfrak{g} \text{ 内の非零な } \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}\text{-双曲型軌道 } \mathcal{O}^0 \text{ であって, } \mathfrak{h}_1,\ \mathfrak{h}_2 \text{ の両方と交わるもの} \,\}$$

は一対一に対応する. 特に一方が空集合なら他方も空集合である. これで定理が証明された. $\square$

参考文献

[1] S. Araki. On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces. *J. Math. Osaka City Univ.*, 13:1–34, 1962.

[2] Y. Benoist. Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. *Ann. of Math. (2)*, 144:315–347, 1996.

[3] M. Berger. Les espaces symétriques noncompacts. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 74:85–177, 1957.

[4] E. Calabi and L. Markus. Relativistic space forms. *Ann. of Math. (2)*, 75:63–76, 1962.

[5] D. Ž. Djoković. Classification of $\mathbf{Z}$-graded real semisimple Lie algebras. *J. Algebra*, 76:367–382, 1982.

[6] A. G. Helminck. Algebraic groups with a commuting pair of involutions and semisimple symmetric spaces. *Adv. in Math.*, 71:21–91, 1988.

[7] T. Kobayashi. Proper action on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.*, 285:249–263, 1989.

[8] T. Kobayashi. Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups. *J. Lie Theory*, 6:147–163, 1996.

[9] T. Kobayashi. Introduction to actions of discrete groups on pseudo-Riemannian homogeneous manifolds. *Acta Appl. Math.*, 73:115–131, 2002. The 2000 Twente Conference on Lie Groups (Enschede).

[10] T. Kobayashi. On discontinuous group actions on non-Riemannian homogeneous spaces [translation of Sūgaku **57** (2005), 267–281]. *Sugaku Expositions*, 22:1–19, 2009. Sugaku Expositions.

[11] T. Kobayashi and T. Yoshino. Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces—revisited. *Pure Appl. Math. Q.*, 1:591–663, 2005.

[12] F. Labourie and R. J. Zimmer. On the non-existence of cocompact lattices for $\mathrm{SL}(n)/\mathrm{SL}(m)$. *Math. Res. Lett.*, 2:75–77, 1995.

[13] G. A. Margulis. Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients. *Bull. Soc. Math. France*, 125(3):447–456, 1997.

[14] G. A. Margulis. Problems and conjectures in rigidity theory. In *Mathematics:*

frontiers and perspectives, pages 161–174. Amer. Math. Soc., 2000.

[15] T. Matsuki. The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups. *J. Math. Soc. Japan*, 31:331–357, 1979.

[16] H. Oh and D. Witte. Compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of $\mathrm{SO}(2,n)$. *Geom. Dedicata*, 89:25–57, 2002.

[17] T. Ōshima and J. Sekiguchi. The restricted root system of a semisimple symmetric pair. In *Group representations and systems of differential equations (Tokyo, 1982)*, Adv. Stud. Pure Math., 4:433–497. 1984.

[18] I. Satake. On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces. *Ann. of Math. (2)*, 71:77–110, 1960.

[19] K. Teduka. Proper actions of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ on $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$—homogeneous spaces. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 15:1–13, 2008.

[20] K. Teduka. Proper actions of $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ on irreducible complex symmetric spaces. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 84:107–111, 2008.

[21] R. J. Zimmer. Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 7:159–168, 1994.