

# 対称対の冪零軌道の組合せ論と Harish-Chandra 加群の随伴多様体

(Combinatorics of nilpotent orbits on symmetric pairs and associated varieties of Harish-Chandra modules)

西山 享 青学大・理工  
和地 輝仁 北海道教育大

## 1 序

$G$  を連結な簡約複素代数群、 $(G, K)$  を対称対とする。つまりある包含的自己同型  $\theta \in \text{Aut}(G)$ ,  $\theta^2 = 1$  に対して  $K = G^\theta$  とする。このとき  $\theta$  はリー環  $\mathfrak{g}$  の位数 2 の自己同型を引き起こすが、その  $\pm 1$  の固有空間分解を  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$  と書く。 $\mathfrak{k}$  は  $K$  のリー環であると同時に  $\theta$  の  $+1$  固有空間であり、 $\mathfrak{s}$  は  $-1$  固有空間である。 $\mathfrak{s}$  の冪零元全体のなす集合を  $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$  と書けば、これは閉部分多様体 (冪零多様体) であり、 $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$  上の  $K$  軌道を **対称対の冪零軌道** と呼ぶことにする。この予稿では、時間の制約で講演では発表できない部分も含めて、対称対の冪零軌道に関して以下を報告する。

**対称対の冪零軌道の個数の母関数:** Kostant-Rallis によって  $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$  上の  $K$  軌道の個数は有限であることが知られており、特に  $G$  が古典群の場合には符号付き Young 図形を用いた組み合わせ論的な分類が知られている [CM]。本講演では、 $G$  が古典群の場合の対称対の冪零軌道の個数の母関数を与える。

**余次元 1 の隣接関係によるグラフ:** 同一の  $G$  軌道生成する  $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$  上の 2 つの冪零  $K$  軌道が、余次元 1 の境界を共有するとき、2 つの冪零  $K$  軌道は**余次元 1 で隣接**すると定義する。余次元 1 で隣接する 2 つの冪零  $K$  軌道の間に辺を引くことにより得られるグラフを軌道グラフと呼ぶ。以下では、古典型の群に対する軌道グラフの具体的記述、グラフの連結成分の個数の決定などの問題に対して解答を与える。これは組合せ論的問題であるが、以下のように表現論的問題と関連している。

**既約 Harish-Chandra 加群の随伴多様体と余次元 1 の隣接関係:**  $\mathfrak{s}$  上の冪零  $K$  軌道とその閉包は、表現論の観点からは Harish-Chandra 加群 (以下 HC 加群) の随伴多様体

として現れる。実際  $X$  を既約な HC 加群とするとその随伴多様体  $\mathcal{AV}(X)$  は冪零  $K$  軌道  $\mathbb{O}_i^K \in \mathcal{N}(\mathfrak{s})/K$  ( $i = 1, \dots, \ell$ ) によって

$$\mathcal{AV}(X) = \bigcup_{i=1}^{\ell} \overline{\mathbb{O}_i^K} \quad (\text{代数多様体としての既約分解}) \quad (1)$$

と分解する。このとき、Vogan の定理 (定理 1 [V, Th 4.6]) より、 $\mathbb{O}_i^K$  たちが互いに余次元 1 で隣接していなければ、実は  $\ell = 1$  であって、 $\mathcal{AV}(X) = \overline{\mathbb{O}_1^K}$  は既約である。このことから、一般に、随伴多様体  $\mathcal{AV}(X)$  が可約の場合には、 $\{\mathbb{O}_i^K\}_{i=1}^{\ell}$  は余次元 1 で連結ではないのかと期待される。

この傍証として、AIII 型の対称対の場合には、同一の  $G$  軌道を生成する冪零  $K$  軌道たちのグラフの連結成分が随伴多様体の既約分解を与えるような既約 HC 加群が存在することを報告する。

## 原稿の改訂について

この原稿は、表現論シンポジウムにて配布された講演集に収録されたものと重大な相違がある。最大の相違は、この原稿中の予想 2 が、配布された講演集では“定理”となっている点である。講演時点での“定理”の証明には欠陥が発見され、それは現在に至るまで修復されていない。詳しい経緯については本文中の注意 3 を参照していただきたいが、講演時の誤った報告によって聴衆の方々にご迷惑をおかけしたことをお詫びする。

原稿は、講演時点での誤りを訂正するために、最小限の改訂を行ったが、過誤の影響は大きく、定理番号なども元の原稿から変更を余儀なくされた。

また、原稿の訂正については、講演集の編集者の方々に多大な労力を割いていただいた。編集者のご高配に深謝する。

## 2 余次元 1 の隣接関係

第 1 節に引き続き、複素簡約対称対  $(G, K)$  を考える。 $\mathfrak{g}$  上の冪零  $G$  軌道  $\mathcal{O}^G$  をとったとき、

$$\mathcal{O}^G \cap \mathfrak{s} = \coprod_{i=1}^m \mathbb{O}_i^K \quad (2)$$

は、 $\mathfrak{s}$  上の冪零  $K$  軌道への分解である。ただし、式 (1) の番号付けとは異なることに注意する。また、冪零  $K$  軌道  $\mathbb{O}_i^K$  たちは、その次元が等しく、 $\mathcal{O}^G$  の Lagrange 部分多様体である。 $G$  が古典型であり、 $\mathcal{O}^G$  が Young 図形  $\lambda$  でパラメトライズされるときは、 $\mathcal{O}_\lambda^G$  と

書くこともあり、 $\mathbb{O}_i^K$  が後述の符号付き Young 図形  $T$  でパラメトライズされるときは、 $\mathbb{O}_T^K$  と書くこともある。

$\mathfrak{g}$  上の冪零  $G$  軌道  $\mathcal{O}^G$  に対して、グラフ  $\Gamma(\mathcal{O}^G)$  を、

**頂点:**  $\mathbb{O}_1^K, \mathbb{O}_2^K, \dots, \mathbb{O}_m^K$

**辺:** 2つの  $K$  軌道  $\mathbb{O}_i^K$  と  $\mathbb{O}_j^K$  が余次元 1 で隣接するときに限り、その間に辺を引く

により定める。これを軌道グラフと呼ぶ。

次に、 $X$  を既約 HC  $(\mathfrak{g}, K)$  加群とし、第 1 節のように

$$\mathcal{AV}(X) = \bigcup_{i=1}^{\ell} \overline{\mathbb{O}_i^K} \quad (\text{代数多様体としての既約分解})$$

と分解すると、どの  $K$  軌道  $\mathbb{O}_i^K$  も、 $\mathfrak{g}$  上の同一の冪零  $G$  軌道を生成することが知られており、その  $G$  軌道を  $\mathcal{O}_X^G$  と書くことにする。実際、原始イデアル  $\text{Ann}(X)$  の随伴多様体が  $\mathcal{O}_X^G$  である。したがって、 $\{\mathbb{O}_1^K, \dots, \mathbb{O}_\ell^K\}$  はグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_X^G)$  の頂点の部分集合であり、余次元 1 の隣接関係で辺を引くことにより、 $\Gamma(\mathcal{O}_X^G)$  の充満部分グラフが定義される。これを  $\mathcal{AV}^\Gamma(X)$  と書くことにする。

次の定理は、Vogan [V, Th. 4.6] の定理からただちに従う。

**定理 1** (Vogan).  $X$  を既約 HC  $(\mathfrak{g}, K)$  加群とする。もし  $\mathcal{AV}(X)$  が可約な多様体 (つまり  $\ell \geq 2$ ) であれば、 $\mathbb{O}_i^K$  の境界  $\partial\mathbb{O}_i^K = \overline{\mathbb{O}_i^K} \setminus \mathbb{O}_i^K$  は  $\overline{\mathbb{O}_i^K}$  において余次元 1 である。

この余次元 1 の境界は、他の軌道に境界として共有されていることもあれば、そうでないこともある。また、余次元 1 の境界を全く含まないような冪零軌道も存在する。

Vogan の定理より、多少楽天的すぎるが、次のような予想が自然と思いつく。

**予想 2.**  $X$  を既約 HC 加群とすると、軌道のグラフ  $\mathcal{AV}^\Gamma(X)$  は連結である。すなわち、随伴多様体の既約分解  $\mathcal{AV}(X) = \bigcup_{i=1}^{\ell} \overline{\mathbb{O}_i^K}$  に現れる任意の 2 つの  $K$  軌道  $\mathbb{O}_i^K$  と  $\mathbb{O}_j^K$  に対して、 $K$  軌道の列  $\mathbb{O}_i^K = \mathbb{O}_{i_0}^K, \mathbb{O}_{i_1}^K, \dots, \mathbb{O}_{i_t}^K = \mathbb{O}_j^K$  が存在して ( $1 \leq i_s \leq \ell$ )、 $\mathbb{O}_{i_s}^K$  と  $\mathbb{O}_{i_{s+1}}^K$  は余次元 1 で隣接する。

**注意 3.** 表現論シンポジウムの講演では、この予想を“定理”として報告したが、その後、証明に重大な欠陥が見つかり、現在に至るまでも修復されていない。一方、表現論シンポジウム後に、松本久義氏から、A 型以外で反例が見つかるのではないかとのコメントが寄せられている。しかし、後述の AIII 型の対称対の場合のように、予想が成り立つ HC 加群が多数あることも事実である。講演時の状況を伝えるために、ここでは予想のまま<sup>1</sup>としておく。

<sup>1</sup>正しくなければ予想とは言わないのだそうだが...

他方、次の定理が知られている ([N])。

**定理 4.**  $\mathcal{O}^G$  が  $\mathfrak{g}$  上の偶冪零軌道である、つまり、weighted Dynkin 図形のラベルが 0 または 2 であるとき、 $\mathcal{O}^G$  を Richardson 軌道とするような放物型部分群から誘導した退化主系列表現  $\pi$  に対して、

$$\Gamma(\mathcal{O}^G) = \mathcal{AV}^\Gamma(\pi)$$

となる。

もし予想が正しければ、この定理より偶冪零軌道の軌道グラフ  $\Gamma(\mathcal{O}^G)$  は連結でなければならないが、実際に、古典型の場合には、偶冪零軌道の軌道グラフは個別にチェックしてみれば連結であることが分かる (定理 18)。

以上の考察から、自然に次の問題が考えられる。はじめの 2 つは表現論的問題であり、残りの 3 つはそれらに關係する組合せ論的問題である。

**問題 5.**  $\mathcal{O}^G$  を  $\mathfrak{g}$  上の冪零  $G$  軌道とする。

(0) 既約 HC 加群  $X$  に対して、 $X$  の随伴グラフ  $\Gamma(\mathcal{O}^G)$  は連結であるか？ もし連結でないなら、随伴グラフが連結になるための条件を与えよ。

(1) 軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}^G)$  が連結のとき、 $\Gamma(\mathcal{O}^G) = \mathcal{AV}^\Gamma(X)$  なる既約 HC 加群  $X$  は存在するか。

(2) より一般に、グラフ  $\Gamma(\mathcal{O}^G)$  の連結成分である部分グラフ  $Z \subset \Gamma(\mathcal{O}^G)$  に対して、 $Z = \mathcal{AV}^\Gamma(X)$  なる既約 HC 加群  $X$  は存在するか。

(3) 軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}^G)$  の構造を明らかにせよ。

(4)  $\Gamma(\mathcal{O}^G)$  の連結成分の個数を求めよ。

(5)  $\mathcal{O}^G \cap \mathfrak{s}$  内の  $K$  軌道の個数を求めよ。

以下で対称対の型ごとに、これらの問題のうちの一部に解答を与える。

### 3 対称対の冪零軌道の個数の母関数

この節では、問題 5 (5) に対する解を与える。古典型の対称対の冪零軌道に対する、 $K$  軌道の分類、軌道間の閉包關係などの構造は、太田氏 [O] により与えられており、以下で行う型ごとの解析においては、その結果を本質的に用いている。また、型ごとの解析については沼田泰英氏の貢献が大きい。

### 3.1 AIII 型: $(GL_{p+q}(\mathbb{C}), GL_p(\mathbb{C}) \times GL_q(\mathbb{C}))$

$n = p + q$  とし、 $GL_n(\mathbb{C})$  を  $GL_n$  などと書くことにする。対称対  $(G, K) = (GL_n, GL_p \times GL_q)$  を考える。このとき、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ ,  $\mathfrak{k} = \mathfrak{gl}_p \oplus \mathfrak{gl}_q$ ,  $\mathfrak{s} \simeq \text{Mat}(p, q) \oplus \text{Mat}(q, p)$  である。 $\mathfrak{gl}_n$  上の冪零  $GL_n$  軌道は、 $n$  の分割、あるいは同じことだが、サイズ  $n$  の Young 図形でパラメトライズされるので、 $\mathcal{O}_\lambda^G$  ( $\lambda$  は  $n$  の分割) と書くことにする。さらに、 $\mathcal{O}_\lambda^G \cap \mathfrak{s}$  は  $K$  軌道に分解するが、そこに現れる  $K$  軌道は、 $\lambda$  上の符号数  $(p, q)$  の**符号付き Young 図形**でパラメトライズされることが知られている:

$$\mathcal{O}_\lambda^G \cap \mathfrak{s} = \coprod_{T \in \text{SYD}(\lambda; p, q)} \mathbb{O}_T^K.$$

ここに、 $\text{SYD}(\lambda; p, q)$  は、 $\lambda$  上の符号数  $(p, q)$  の符号付き Young 図形全体の集合である。 $\lambda$  上の符号数  $(p, q)$  の符号付き Young 図形とは、Young 図形  $\lambda$  に、 $+$  を  $p$  個と  $-$  を  $q$  個、各箱に1つずつ埋めたものであり、行方向には  $+$ ,  $-$  が交互になっているものである。また、行の交換で一致するような符号付き Young 図形どうしは同一視する。 $\mathfrak{s}$  上の冪零  $K$  軌道の個数の母関数が次で与えられる。

**定理 6.**  $n$  の分割  $\lambda$  を重複度  $m_i$  を用いて  $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n})$  と書いたとき、

$$\begin{aligned} \sum_{p, q \geq 0, \lambda \vdash p+q} \# \text{SYD}(\lambda; p, q) \cdot a^p b^q t_\lambda \\ = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - a^k b^k t_{2k})^2} \cdot \frac{1}{1 - a^{k-1} b^k t_{2k-1}} \cdot \frac{1}{1 - a^k b^{k-1} t_{2k-1}}. \end{aligned}$$

ただし  $t_\lambda = t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots$  と書いた。これは、変数が  $a, b, t_1, t_2, \dots$  の形式的冪級数環における等式である。

### 3.2 BDI 型: $(O_{p+q}(\mathbb{C}), O_p(\mathbb{C}) \times O_q(\mathbb{C}))$

$n = p + q$  とし、 $O_n(\mathbb{C})$  を  $O_n$  などと書くことにする。対称対  $(G, K) = (O_n, O_p \times O_q)$  を考える。このとき、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_n$ ,  $\mathfrak{k} = \mathfrak{o}_p \oplus \mathfrak{o}_q$ ,  $\mathfrak{s} \simeq \text{Mat}(p, q)$  である。 $\mathfrak{o}_n$  上の冪零  $O_n$  軌道は、サイズ  $n$  の Young 図形であって、各偶数  $2s$  に対して、長さが  $2s$  の行は偶数行であるようなものでパラメトライズされる。言い換えると、長さ奇数で1行からなる Young 図形と、等しい偶数の長さを持つ2行からなる Young 図形を上下に積み重ねてできるようなサイズ  $n$  の Young 図形でパラメトライズされる。このような Young 図形の基本単位を**(BDI 型の Young 図形の) プリミティブ**と呼ぶことにする。サイズ  $n$  の BDI 型の

Young 図形全体の集合を、 $YD_{BDI}(n)$  と表す。さらに、Young 図形  $\lambda$  でパラメトライズされる  $\mathfrak{g}$  上の  $G$  軌道  $\mathcal{O}_\lambda^G$  に対して、 $\mathcal{O}_\lambda^G \cap \mathfrak{s}$  は  $K$  軌道に分解するが、そこに現れる  $K$  軌道は、 $\lambda$  上の符号数  $(p, q)$  の符号付き Young 図形であって、BDI 型の符号付き Young 図形のプリミティブ

$$ab \cdots ba \quad (\text{長さ奇数. } \{a, b\} = \{+, -\}),$$

$$\begin{array}{l} ba \cdots ba \\ ab \cdots ab \end{array} \quad (\text{長さ偶数. } \{a, b\} = \{+, -\})$$

から構成されるものでパラメトライズされることが知られている。 $\lambda$  上の符号数  $(p, q)$  の符号付き Young 図形であって、BDI 型に対応するもの全体の集合を、 $SYD_{BDI}(n)$  と表す。 $\mathfrak{s}$  上の冪零  $K$  軌道の個数の母関数が次で与えられる。

**定理 7.** BDI 型の Young 図形  $\lambda$  を重複度  $m_i$  を用いて  $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n})$  と書いたとき、

$$\begin{aligned} \sum_{p, q \geq 0, \lambda \in YD_{BDI}(p+q)} \#SYD_{BDI}(\lambda; p, q) \cdot a^p b^q t_\lambda \\ = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - a^{2k} b^{2k} t_{2k}^2} \cdot \frac{1}{1 - a^{k-1} b^k t_{2k-1}} \cdot \frac{1}{1 - a^k b^{k-1} t_{2k-1}}. \end{aligned}$$

### 3.3 CI, CII, DIII 型

AIII 型、BDI 型と同様にして、CI、CII、DIII の各型についても、対称対の冪零軌道の個数の母関数がわかる。以下 § 3.1, § 3.2 と同じように、リー群・リー代数はすべて複素である。

CI 型:  $(G, K) = (Sp_{2n}, GL_n)$ . 対称対の冪零軌道を分類する集合  $SYD_{CI}(\lambda; 2n)$  は、符号数  $(n, n)$  の符号付き Young 図形であってプリミティブ

$$ab \cdots ab \quad (\text{長さ偶数. } \{a, b\} = \{+, -\}),$$

$$\begin{array}{l} ab \cdots ba \\ ba \cdots ab \end{array} \quad (\text{長さ奇数. } \{a, b\} = \{+, -\})$$

で構成されるものである。サイズ  $2n$  の CI 型の Young 図形は、符号付き Young 図形の符号を忘れたものであり、全体の集合を  $YD_{CI}(2n)$  で表す。すると、 $\mathfrak{s}$  上の冪零  $K$  軌道の個数の母関数が次で与えられる。

**定理 8.** CI 型の Young 図形  $\lambda$  を重複度  $m_i$  を用いて  $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots 2n^{m_{2n}})$  と書いたとき、

$$\sum_{n \geq 0, \lambda \in \text{YD}_{\text{CI}}(2n)} \# \text{SYD}_{\text{CI}}(\lambda; 2n) \cdot a^n b^n t_\lambda = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - a^k b^k t_{2k})^2} \cdot \frac{1}{1 - a^{2k+1} b^{2k+1} t_{2k+1}^2}$$

CII 型:  $(G, K) = (Sp_{2p+2q}, Sp_{2p} \times Sp_{2q})$ . 対称対の冪零軌道をパラメトライズする集合  $\text{SYD}_{\text{CII}}(\lambda; 2p, 2q)$  は、符号数  $(2p, 2q)$  の符号付き Young 図形であってプリミティブ

$$\begin{array}{l} ab \cdots ba \\ ab \cdots ba \end{array} \quad (\text{長さ奇数. } \{a, b\} = \{+, -\}),$$

$$\begin{array}{l} ba \cdots ba \\ ab \cdots ab \end{array} \quad (\text{長さ偶数. } \{a, b\} = \{+, -\})$$

で構成されるものである。サイズ  $2p + 2q$  の CII 型の Young 図形は、符号付き Young 図形の符号を忘れたものであり、全体の集合を  $\text{YD}_{\text{CII}}(2p + 2q)$  で表す。すると、 $\mathfrak{s}$  上の冪零  $K$  軌道の個数の母関数が次で与えられる。

**定理 9.** CII 型の Young 図形  $\lambda$  を重複度  $m_i$  を用いて  $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$  と書いたとき、

$$\sum_{p, q \geq 0, \lambda \in \text{YD}_{\text{CII}}(2p+2q)} \# \text{SYD}_{\text{CII}}(\lambda; 2p, 2q) \cdot a^{2p} b^{2q} t_\lambda = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - a^{2k+2} b^{2k} t_{2k+1}^2} \cdot \frac{1}{1 - a^{2k} b^{2k+2} t_{2k+1}^2} \cdot \frac{1}{1 - a^{2k} b^{2k} t_{2k}^2}$$

DIII 型:  $(G, K) = (O_{2n}, GL_n)$ . 対称対の冪零軌道を分類する集合  $\text{SYD}_{\text{DIII}}(\lambda; 2n)$  は、符号数  $(n, n)$  の符号付き Young 図形であってプリミティブ

$$\begin{array}{l} ba \cdots ba \\ ba \cdots ba \end{array} \quad (\text{長さ偶数. } \{a, b\} = \{+, -\}),$$

$$\begin{array}{l} ab \cdots ba \\ ba \cdots ab \end{array} \quad (\text{長さ奇数. } \{a, b\} = \{+, -\})$$

で構成されるものである。サイズ  $2n$  の DIII 型の Young 図形は、符号付き Young 図形の符号を忘れたものであり、全体の集合を  $\text{YD}_{\text{DIII}}(2n)$  で表す。すると、 $\mathfrak{s}$  上の冪零  $K$  軌道の個数の母関数が次で与えられる。

**定理 10.** DIII 型の Young 図形  $\lambda$  を重複度  $m_i$  を用いて  $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$  と書いたとき、

$$\sum_{n \geq 0, \lambda \in \text{YD}_{\text{DIII}}(2n)} \# \text{SYD}_{\text{DIII}}(\lambda; 2n) \cdot a^n b^n t_\lambda = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - a^{2k} b^{2k} t_{2k}^2)^2} \cdot \frac{1}{1 - a^{2k+1} b^{2k+1} t_{2k+1}^2}$$

## 4 軌道のグラフ $\Gamma(\mathcal{O}^G)$ の組合せ論的記述

この節では、問題 5 (3) と (4) に対する解を与える。まず AIII 型対称対  $(G, K) = (GL_n, GL_p \times GL_q)$  ( $n = p + q$ ) を考え、グラフを記述するために記号の準備をする。

$\mathfrak{gl}_n$  上の冪零  $GL_n$  軌道  $\mathcal{O}_\lambda^G$  に対して、軌道グラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  の頂点  $\mathbb{O}_T^K$  ( $T \in \text{SYD}(\lambda; p, q)$ ) を以下のように  $k$  次元空間  $\mathbb{R}^k$  に実現する。分割  $\lambda$  を

$$\lambda = (i_1, \dots, i_1, i_2, \dots, i_2, \dots, i_k, \dots, i_k) = (i_1^{m(i_1)}, i_2^{m(i_2)}, \dots, i_k^{m(i_k)})$$

$$i_1 > i_2 > \dots > i_k, \quad m(i_j) > 0 \quad (1 \leq j \leq k)$$

と重複度  $m(i_j)$  を用いて書くと、 $\lambda$  を Young 図形と見たとき、長さ  $i_j$  の行が  $m(i_j)$  行あることになる。このとき、符号付き Young 図形  $T \in \text{SYD}(\lambda; p, q)$  においては、 $m(i_j)$  行のうちの何行かが  $+$  で始まり、残りが  $-$  で始まる。 $T$  において、長さ  $i$  であって  $+$  で始まる行の数を  $m^+(i)$  と書く。そして、 $\mathbb{O}_T^K$  を

$$\pi(T) = (m^+(i_1), m^+(i_2), \dots, m^+(i_k)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k \subset \mathbb{R}^k \quad (3)$$

により  $\mathbb{R}^k$  に実現する。すると、軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  の組合せ論的記述が次のように与えられる。

**定理 11.**  $\lambda$  を  $n$  の分割とし、 $\text{SYD}(\lambda; p, q)$  を  $\lambda$  上の符号数  $(p, q)$  の符号付き Young 図形全体の集合とする。すると、対称対の冪零軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  は、その頂点が  $\{\mathbb{O}_T^K; T \in \text{SYD}(\lambda; p, q)\}$  であり、2 頂点  $\mathbb{O}_T^K$  と  $\mathbb{O}_{T'}^K$  の間に辺があるのは、軌道を式 (3) により  $\mathbb{R}^k$  に実現したとき、 $\pi(T) - \pi(T')$  が、集合  $\{\pm(e_i - e_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq k-1\} \cup \{\pm e_k\}$  に属するときに限る。ここに、 $e_i$  は第  $i$  成分のみ 1 であるような  $\mathbb{R}^k$  の単位ベクトルである。

*Proof.* 対称対の冪零軌道の次元は Young 図形から求まり、また、閉包関係は  $[O]$  により与えられているので、それを読み換えればよい。  $\square$



このグラフの記述により、グラフの連結成分の個数がわかり、問題 5 (4) に答えることができる。まず、サイズ  $n$  の Young 図形  $\lambda$  において 2 つの隣接する**列**の長さが等しいとき、その 2 列を削ってできる Young 図形を  $\lambda'$  (サイズ  $n'$ ) とすると、 $\mathfrak{gl}_n$  上の冪零軌道  $\mathcal{O}_\lambda^G$  と、 $\mathfrak{gl}_{n'}$  上の冪零軌道  $\mathcal{O}_{\lambda'}^{G'}$  ではグラフの連結成分の個数が一致することがわかる。このように 2 列を繰り返し除くと、重複のない列の長さ  $k_1 > k_2 > \cdots > k_r$  を持つヤング図形<sup>2</sup> に帰着するから、その場合に連結成分の個数を求めればよい。

**定理 12.** このとき軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_{\lambda'}^{G'})$  は完全非連結 (離散グラフ) であって、その連結成分の個数 (つまり頂点数) は、

$$\prod_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} (1 + t + \cdots + t^{k_{2i-1}-k_{2i}}) \Big|_{t^d} \times \prod_{i=1}^{\lfloor (r-1)/2 \rfloor} (1 + k_{2i} - k_{2i+1})$$

で与えられる。ただし、第 1 因子の  $|_{t^d}$  は、 $t^d$  の係数を取り出すという意味であり、 $d$  は、 $\lambda$  の符号数  $(p, q)$  の符号付き Young 図形において、長さ奇数の行のうち  $+$  で始まる行の行数である。特に  $d$  は、 $\lambda, p, q$  から決まる非負整数である。

*Proof.* 軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  の記述を精密に見て、単純な連結グラフの直積の直和に書き直すことができ、その表示から連結成分の個数もわかる。しかし、その表示についてはここでは省略する。  $\square$

特に、軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  が連結になるための条件も直ちにわかる。

**定理 13.** AIII 型対称対  $(GL_n, GL_p \times GL_q)$  ( $n = p + q$ ) において、軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  ( $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u)$ ) が連結になるための必要十分条件は、ある  $t = 0, 1, \dots, u$  に対して、 $\lambda_1, \dots, \lambda_t$  がすべて奇数、かつ、 $\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_u$  がすべて偶数であることである。特に連結性は  $p, q$  によらない。

この節のここまでは AIII 型対称対について述べてきたが、他の型の対称対についても、グラフの記述は可能である。ただ、この報告では連結成分の個数と連結性の条件だけを記しておく。 $k_i$  や  $d$  の記号は、AIII 型るときと同じ意味である。

**定理 14.** BDI 型対称対  $(G, K) = (O_{p+q}, O_p \times O_q)$  に対して、軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  ( $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u) \in \text{YD}_{\text{BDI}}(n)$ ) の連結成分の個数は、

$$\prod_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} (1 + t + \cdots + t^{k_{2i-1}-k_{2i}}) \Big|_{t^d}$$

---

<sup>2</sup>つまり  ${}^t\lambda = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ .

である。

したがって、 $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  が連結であるための必要十分条件は、次の 3 条件のいずれかが成立することである。

(i) ある  $0 \leq s \leq t \leq u$  に対して、 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  が偶数、 $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_t$  が奇数、 $\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_u$  が偶数である。

(ii)  $d = 0$ .

(iii)  $d$  が  $\lambda$  の長さ奇数の行数に等しい。

**定理 15.** CI 型対称対  $(G, K) = (Sp_{2n}, GL_n)$  に対して、軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  ( $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u) \in \text{YD}_{\text{CI}}(n)$ ) の連結成分の個数は、

$$\prod_{i=1}^{\lfloor (r-1)/2 \rfloor} (1 + k_{2i} - k_{2i+1})$$

である。

したがって、 $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  が連結であるための必要十分条件は、ある  $t = 0, 1, \dots, u$  に対して、 $\lambda_1, \dots, \lambda_t$  がすべて奇数、かつ、 $\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_u$  がすべて偶数であることである。

**定理 16.** CII 型対称対  $(G, K) = (Sp_{2p+2q}, Sp_{2p} \times Sp_{2q})$  に対して、軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  ( $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u) \in \text{YD}_{\text{CII}}(n)$ ) の連結成分の個数は、

$$\prod_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} (1 + t + \dots + t^{(k_{2i-1} - k_{2i})/2}) \Big|_{t^d}$$

である。

したがって、 $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  が連結であるための必要十分条件は、次の 3 条件のいずれかが成立することである。

(i) ある  $0 \leq s \leq t \leq u$  に対して、 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  が偶数、 $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_t$  が奇数、 $\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_u$  が偶数である。

(ii)  $d = 0$ .

(iii)  $d$  が  $\lambda$  の長さ奇数の行数に等しい。

**定理 17.** DIII 型対称対  $(G, K) = (O_{2n}, GL_n)$  に対して、軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  ( $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u) \in \text{YD}_{\text{DIII}}(n)$ ) の連結成分の個数は、

$$\prod_{i=1}^{\lfloor (r-1)/2 \rfloor} (1 + (k_{2i} - k_{2i+1})/2)$$

である。

したがって、 $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  が連結であるための必要十分条件は、ある  $t = 0, 1, \dots, u$  に対して、 $\lambda_1, \dots, \lambda_t$  がすべて奇数、かつ、 $\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_u$  がすべて偶数であることである。

以上、各古典型の軌道グラフの具体的な記述より次の定理が得られる。

**定理 18.** 古典型の対称対  $(G, K)$  に対して、偶冪零軌道  $\mathcal{O}^G$  の軌道グラフ  $\Gamma(\mathcal{O}^G)$  は連結である。

## 5 Harish-Chandra 加群の随伴多様体

この節の内容は Peter Trapa 氏との共同研究の結果である。この節では AIII 型についてのみ記す。他の型の対称対に対しても同様の結果が成立すると思われるが、現在は予想である。また問題 5 (2) に対しても、AIII 型の肯定的な解答がほぼ得られている。

次の定理は、問題 5 (1) に対する、AIII 型の場合の解答である。

**定理 19.** AIII 型対称対  $(G, K) = (GL_n, GL_p \times GL_q)$  に対して、軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}^G)$  が連結であるとき、随伴多様体が  $\mathcal{O}^G \cap \mathfrak{s}$  である既約 Harish-Chandra 加群が存在する。

定理 4 により、 $\mathcal{O}_\lambda^G$  が偶軌道であるときは、定理 19 は成立していることに注意しておく。この定理の証明の概略を以下に記す。まず定理 13 より、直ちに次の補題が得られる。

**補題 20.** サイズ  $n$  の Young 図形  $\lambda$  であって、軌道グラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  が連結であるようなものを考える。 $\lambda$  から同じ長さの 2 つの列を取り除く操作を繰り返すと、空な Young 図形に到達するか、1 列しかない Young 図形に到達するかのいずれかである。特に、いずれにしても偶軌道をパラメトライズする Young 図形に到達する。

逆に言えば、偶冪零軌道をパラメトライズする Young 図形から出発して、同じ長さの 2 列を付け加える操作を適当に繰り返すと、 $\lambda$  に到達できる。

次の補題が、定理 19 の証明を完結する。

**補題 21** (Matumoto-Trapapa [MT]).  $\lambda$  をサイズ  $n = p + q$  の Young 図形で、長さ  $k$  の列が 2 列あるものとし、 $\mu$  を、 $\lambda$  から長さ  $k$  の 2 列を取り除いたサイズ  $n - 2k$  の Young 図形とする。軌道のグラフ  $\Gamma(\mathcal{O}_\mu^{G'})$  (したがって  $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  も) が連結であり、 $\Gamma(\mathcal{O}_\mu^{G'}) = \mathcal{AV}^\Gamma(X')$  となるような対称対  $(G', K') = (GL_{n-2k}, GL_{p-k} \times GL_{q-k})$  の既約 HC 加群  $X'$  があるとする。このとき、誘導された加群  $X = \text{Ind}_{P_\mathbb{R}}^{G_\mathbb{R}}(X' \otimes |\det|^\nu)$  は、 $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G) = \mathcal{AV}^\Gamma(X)$  を満たす。ここに、 $P_\mathbb{R} \subset U(p, q)$  は、その Levi パートが  $U(p - k, q - k) \times GL(k; \mathbb{C})$  であるような実放物型部分群である。

偶冪零軌道から出発して、この補題を繰り返し用いれば、 $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G)$  が連結になるような任意の  $\mathcal{O}_\lambda^G$  に対して、 $\Gamma(\mathcal{O}_\lambda^G) = \mathcal{AV}^\Gamma(X)$  を満たす既約 HC 加群  $X$  が存在することがわかり、定理 19 が証明される。

## 参考文献

- [CM] David H. Collingwood, William M. McGovern, Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, 1993.
- [MT] Hisayosi Matumoto, Peter E. Trapapa. Derived functor modules arising as large irreducible constituents of degenerate principal series. *Compos. Math.*, 143(1):222–256, 2007.
- [N] Kyo Nishiyama. Asymptotic cone of semisimple orbits for symmetric pairs. Preprint, 2009.
- [O] Takuya Ohta. The closures of nilpotent orbits in the classical symmetric pairs and their singularities. *Tohoku Math. J. (2)*, 43(2):161–211, 1991.
- [V] David A. Vogan Jr., Associated varieties and unipotent representations. Harmonic analysis on reductive groups, 315–388, Progr. Math., 101, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.