

有界等質代表領域のベルグマン核 (山路哲史氏, 山盛厚伺氏との共同研究)

伊師英之 (名古屋大 多元数理)

概要. 有界対称領域のハリシュチャンドラ実現に相当する標準的な有界等質領域の実現として, 代表領域が大変有力な候補であることが分かってきた ([6]). 本講演では有界等質代表領域のベルグマン核の $-s$ 乗の積分を計算する. その結果は, 領域の次元を N としたとき, 自己同型群の構造から明示的に定まる負の有理数を零点とする s の N 次式の逆数となる.

序.

ジーゲル円板 $\mathcal{U}_r := \{ Z \in \text{Sym}(r, \mathbb{C}) ; I_r - Z\bar{Z} \text{ は正定値} \}$ について次のような積分公式が知られている ([5], [13]):

$$\int_{\mathcal{U}_r} \det(I - Z\bar{Z})^t dV(Z) = \text{vol}(\mathcal{U}_r) \frac{p(0)}{p(t)} \quad (\Re t > -1), \quad (1)$$

$$\text{ただし } p(t) := \prod_{i=1}^r \left(t + \frac{i+1}{2} \right)_{r+1-i}. \quad (2)$$

ここで dV は複素座標に関する標準的なルベグ測度で $\text{vol}(\mathcal{U}_r)$ は dV による領域 $\mathcal{U}_r$ の測度を表し, $(a)_k := a(a+1) \cdots (a+r-1)$ とする. 積分 (1) の類似の式は他の古典領域, さらに一般の有界対称領域のハリシュチャンドラ実現についても成り立ち ([13, Theorem 2.3]), そこでも $p(t)$ は負の半整数を零点とする多項式 (Hua 多項式とよばれる) で, その次数は領域の次元と等しい.

我々は (1) を有界等質領域に拡張することを考えたい. そのためには行列式に相当する良い被積分関数とハリシュチャンドラ実現に相当する良い領域の実現を選ぶ必要がある. 我々是有界等質領域 $\mathcal{U}$ の実現として代表領域 ([1], [6]) を, 被積分関数として $\mathcal{U}$ のベルグマン核 $K_{\mathcal{U}}$ (を正規化したもの) の負ベキを考える ($\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$ のとき $K_{\mathcal{U}_r}(Z, Z) = \text{vol}(\mathcal{U}_r)^{-1} \det(I - Z\bar{Z})^{-(r+1)}$ に注意). 得られた結果は次のとおりである: 有界等質代表領域 $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^N$ について明示的に定まる N 個の正の有理数 $a_1, \dots, a_N$ が存在して

$$\int_{\mathcal{U}} \{ \text{vol}(\mathcal{U}) K_{\mathcal{U}}(\zeta, \zeta) \}^{-s} dV(\zeta) = \frac{\text{vol}(\mathcal{U})}{F(s)} \quad (\Re s > -\min a_i), \quad (3)$$

$$\text{ただし } F(s) := \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{s}{a_i} \right).$$

代表領域 $\mathcal{U}$ と正則同値な複素領域 $\mathcal{D}$ および $w \in \mathcal{D}$ を任意にとると, (3) は次と同値である.

$$\int_{\mathcal{D}} |F(s)K_{\mathcal{D}}(z, w)^{s+1}|^2 K_{\mathcal{D}}(z, z)^{-s} dV(z) = F(s)K_{\mathcal{D}}(w, w)^{s+1}. \quad (4)$$

これより, 重みつきベルグマン空間 $L_a^2(\mathcal{D}, K_{\mathcal{D}}(z, z)^{-s} dV(z))$ の再生核は $F(s)K_{\mathcal{D}}(z, w)^{s+1}$ で与えられることが分かり, この事実を利用して $\mathcal{D}$ 上のハルトークス領域のベルグマン核を計算することができる ([14]).

議論のポイントは $\mathcal{D}$ が等質ジークル領域のときに (4) を示すことにある. 実は, その計算は本質的に既知であるが ([4], [9]), この機会を利用して概略を紹介したい.

§1. 有界等質代表領域.

1.1. 複素領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^N$ 上の正則関数でルベーク測度 dV に関して二乗可積分なものの全体のなすヒルベルト空間を $L_a^2(\mathcal{D})$ で表わし, その再生核 $K_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ をベルグマン核とよぶ. 領域 $\mathcal{D}$ が有界領域と正則同値のとき $L_a^2(\mathcal{D})$ は無限次元であり, その完全正規直交系 $\{\phi_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ を一つとると $K_{\mathcal{D}}(z, w) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \phi_{\lambda}(z) \overline{\phi_{\lambda}(w)}$ ($z, w \in \mathcal{D}$) が成り立つ. いま $K_{\mathcal{D}}(z, w) \neq 0$ のとき

$$T_{\mathcal{D}}(z, w) := \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{w}_j} \log K_{\mathcal{D}}(z, w) \right)_{i,j} \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})$$

と定める. 複素領域 $\mathcal{D}$ の代表領域とは $K_{\mathcal{D}}$ と $T_{\mathcal{D}}$ を用いて $\mathcal{D}$ 上に定義されるベルグマン写像なるものの像であるが ([1], [6]), 本稿では有界等質領域のみを考えるので, 次の小節で述べる特徴付け ([6, Propositions 2.3, 3.4]) をもって定義とする.

1.2. 一般に複素領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^N$ は正則同型群 $\text{Hol}(\mathcal{D})$ が推移的に作用するとき等質であるという. 有界等質領域 $\mathcal{U}$ は次の二条件を満たすとき代表領域であるという:

(D1) $0 \in \mathcal{U}$,

(D2) $T_{\mathcal{U}}(\zeta, 0) = I_N$ ($\forall \zeta \in \mathcal{U}$).

任意の有界等質領域は, ユニタリ変換を除いて唯一つ定まる有界等質代表領域と正則同値である ([12], [6, Theorem 3.3]). 例えば単位円板 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ の代表領域は円板 $\sqrt{2}\mathbb{D}$ であり, 一般に有界対称領域のハリシュチャンドラ実現は代表領域と線型同値である.

1.3. 有界等質代表領域 $\mathcal{U}$ について次が成り立つ ([6, Proposition 3.8]):

$$K_{\mathcal{U}}(\zeta, 0) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{U})} \quad (\forall \zeta \in \mathcal{U}). \quad (5)$$

これは平均値定理

$$F(0) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{U})} \int_{\mathcal{U}} F(\zeta) dV(\zeta) \quad (F \in L_a^2(\mathcal{U}))$$

と同値である. さらに, この性質から次の一般的な等式が従う.

定理 1. 有界等質代表領域 $\mathcal{U}$ と正則同値な複素領域 $\mathcal{D}$ および正則同型写像 $\Phi : \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}$ について $a := \Phi^{-1}(0) \in \mathcal{D}$ とすると任意の $z, w \in \mathcal{D}$ について

$$K_{\mathcal{U}}(\Phi(z), \Phi(w)) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{U})} \frac{K_{\mathcal{D}}(z, w) K_{\mathcal{D}}(a, a)}{K_{\mathcal{D}}(z, a) K_{\mathcal{D}}(a, w)}. \quad (6)$$

証明. ベルグマン核の変換公式から

$$K_{\mathcal{D}}(z, w) = K_{\mathcal{U}}(\Phi(z), \Phi(w)) \det J(\Phi, z) \overline{\det J(\Phi, w)}.$$

とくに $w = a$ とすると (5) より

$$K_{\mathcal{D}}(z, a) = \frac{\det J(\Phi, z) \overline{\det J(\Phi, a)}}{\text{vol}(\mathcal{U})}.$$

さらに $z = a$ とすると

$$K_{\mathcal{D}}(a, a) = \frac{|\det J(\Phi, a)|^2}{\text{vol}(\mathcal{U})}.$$

これらを組み合わせて (6) を得る. □

§2. 主結果.

有界等質代表領域 $\mathcal{U}$ の正則同型群 $\text{Hol}(\mathcal{U})$ は一般に複雑な構造をしているが, その岩澤部分群 (極大連結分裂型可解リー部分群) $B \subset \text{Hol}(\mathcal{U})$ のリー代数 $\mathfrak{b}$ は特徴的なルート空間分解をもつ. 我々の積分公式は, このルート部分空間の次元を用いて述べることになる.

2.1. リー群 B は $\mathcal{U}$ に単純推移的に作用するので ([11]), 我々は線型同型 $\iota : \mathfrak{b} \ni Y \mapsto Y \cdot 0 \in T_0 \mathcal{U} \equiv \mathbb{C}^N$ を得る. 線型空間 $\mathbb{C}^N$ の複素構造と標準内積 (= $T_0 \mathcal{U}$ 上のベルグマン計量) を ι で引き戻したものをそれぞれ $j : \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}$ と $(\cdot | \cdot)_{\mathfrak{b}}$ で表す. 内積 $(\cdot | \cdot)_{\mathfrak{b}}$ に関する $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b}$ の直交補空間を $\mathfrak{a}$ とすると $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ は可換なカルタン部分代数である.

定理 2 (Piatetskii-Shapiro [8]). 双対ベクトル空間 $\mathfrak{a}^*$ の基底 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を次が成り立つようにとることができる： $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(1) \oplus \mathfrak{b}(1/2) \oplus \mathfrak{b}(0)$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(0) &= \mathfrak{a} \oplus \sum_{1 \leq k < m \leq r}^{\oplus} \mathfrak{b}_{(\alpha_m - \alpha_k)/2}, & \mathfrak{b}(1/2) &= \sum_{k=1}^r \mathfrak{b}_{\alpha_k/2}, \\ \mathfrak{b}(1) &= \sum_{k=1}^r \mathfrak{b}_{\alpha_k} \oplus \sum_{1 \leq k < m \leq r}^{\oplus} \mathfrak{b}_{(\alpha_m + \alpha_k)/2},\end{aligned}$$

ただし一般に $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ について $\mathfrak{b}_\alpha := \{Y \in \mathfrak{b}; [C, Y] = \alpha(C)Y \ (\forall C \in \mathfrak{a})\}$ とする. さらに $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ に双対な $\mathfrak{a}$ の基底を $\{A_1, \dots, A_r\}$ とし, $E_k := -jA_k \ (k = 1, \dots, r)$ とすると $\mathfrak{b}_{\alpha_k} = \mathbb{R}E_k$ である. 一般に $j\mathfrak{b}(0) = \mathfrak{b}(1)$, $j\mathfrak{b}(1/2) = \mathfrak{b}(1/2)$ および $p, q = 0, 1/2, 1$ について

$$[\mathfrak{b}(p), \mathfrak{b}(q)] \subset \mathfrak{b}(p+q) \quad (\text{ただし } p > 1 \text{ のとき } \mathfrak{b}(p) := \{0\}). \quad (7)$$

が成り立つ.

部分空間 $\mathfrak{b}_{(\alpha_m \pm \alpha_k)/2}$ および $\mathfrak{b}_{\alpha_k/2}$ は $\{0\}$ となることが (よって $\mathfrak{b}(1/2) = \{0\}$ となることも) あり得る.

2.2. 次のように定数 $p_k, q_k, b_k \ (k = 1, \dots, r)$ を定める:

$$p_k := \sum_{i < k} \dim \mathfrak{b}_{(\alpha_k - \alpha_i)/2}, \quad q_k := \sum_{m > k} \dim \mathfrak{b}_{(\alpha_m - \alpha_k)/2}, \quad b_k := (\dim \mathfrak{b}_{\alpha_k/2})/2.$$

以下が我々の主結果である.

定理 3. 多項式 $P(s)$ を

$$P(s) := \prod_{k=1}^r (s(2 + p_k + q_k + b_k) + 1 + q_k/2)_{1+p_k+b_k} \quad (8)$$

と定義すると, $P(s)$ の各因数の実部が正となるような複素数 s について

$$\int_{\mathcal{U}} \{\text{vol}(\mathcal{U}) K_{\mathcal{U}}(\zeta, \zeta)\}^{-s} dV(\zeta) = \text{vol}(\mathcal{U}) \frac{P(0)}{P(s)} \quad (9)$$

が成り立つ.

無論 (3) での $F(s)$ は $P(s)/P(0)$ のことである. 実際, 多項式 $P(s)$ の次数は $\sum_{k=1}^r (1 + p_k + q_k) = \dim \mathfrak{b}(0) + (\dim \mathfrak{b}(1/2))/2 = (\dim \mathfrak{b})/2$ であり, これは $\mathcal{U}$ の複素次元 N に他ならない.

§3. 等質ジーゲル領域上の積分計算.

群 B は有界等質代表領域 $\mathcal{U}$ に単純推移的に作用するが, 同じ B がアファイン変換群として単純推移的に作用するジーゲル領域 $\mathcal{D}$ で $\mathcal{U}$ と正則同値なものを常に構成することができる. この $\mathcal{U}$ と $\mathcal{D}$ の関係は単位円板と上半平面の関係の一般化である. 我々は $\mathcal{U}$ 上の積分 (9) を定理 1 を用いて等質ジーゲル領域 $\mathcal{D}$ 上の積分計算に帰着させ, Gindikin [3] による積分公式を援用して計算を実行し, 定理 3 を証明する.

3.1. 関係式 (7) から $\mathfrak{b}(0)$, $\mathfrak{b}(1)$ はそれぞれ $\mathfrak{b}$ の部分代数および可換なイデアルで, $\mathfrak{b}(0)$ に対応するリー群 $B(0) := \exp \mathfrak{b}(0)$ は $\mathfrak{b}(1)$ に随伴表現によって作用している. ここで $E := E_1 + \cdots + E_r \in \mathfrak{b}(1)$ とおいて $\Omega := B(0) \cdot E \subset \mathfrak{b}(1)$ とする. 軌道 Ω は $\mathfrak{b}(1)$ の中の開凸錐であり, その上に群 $B(0)$ は単純推移的に作用している. 部分空間 $\mathfrak{b}(1/2)$ には $j|_{\mathfrak{g}(1/2)}$ により複素構造が定まる. 複素ベクトル空間 $(\mathfrak{b}(1/2), j)$ 上のエルミート写像 $Q : (\mathfrak{b}(1/2), j) \times (\mathfrak{b}(1/2), j) \rightarrow \mathfrak{b}(1)_{\mathbb{C}}$ を $Q(u, u') := ([ju, u'] + i[u, u'])/4$ と定義する. 我々の考えるジーゲル領域は, 複素ベクトル空間 $\mathfrak{b}(1)_{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{b}(1/2), j)$ の中の次のような複素領域

$$\mathcal{D} := \{ Z = (z, u) \in \mathfrak{b}(1)_{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{b}(1/2), j); \Im z - Q(u, u) \in \Omega \}$$

である. 定義から $a_0 := (iE, 0)$ は $\mathcal{D}$ に属する. 群 B の $\mathcal{D}$ へのアファイン変換群としての作用は [8] で記述されている. 領域 $\mathcal{D}$ から代表領域 $\mathcal{U}$ の上への正則同型写像 $\mathcal{C} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U}$ で $\mathcal{C}(a_0) = 0$ となるものが具体的に構成できる ([6], [7]).

パラメータ $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{C}^r$ について群 $B(0)$ の 1 次元表現 $\chi_{\underline{\sigma}} : B(0) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\chi_{\underline{\sigma}}(\exp C) := e^{\sum \sigma_i \alpha_i(C)}$ ($C \in \mathfrak{a}$) によって定義し ($\mathfrak{b}(0) = \mathfrak{a} \oplus [\mathfrak{b}(0), \mathfrak{b}(0)]$ に注意), 錐 Ω 上の関数 $\Delta_{\underline{\sigma}}$ を $\Delta_{\underline{\sigma}}(h \cdot E) := \chi_{\underline{\sigma}}(h)$ ($h \in B(0)$) で定める. このとき $\Delta_{\underline{\sigma}}$ は有理式のべき乗の積として具体的に書け, 領域 $\Omega + i\mathfrak{b}(1)$ 上の正則関数として一価に解析接続される. 組 $\underline{d} = (d_1, \dots, d_r)$ を $d_k := 1 + (p_k + q_k)/2$ ($k = 1, \dots, r$) と定めると $\Delta_{-\underline{d}}(x) dx$ は Ω 上の $B(0)$ -不変測度を与える.

命題 4 (Gindikin). ジーゲル領域 $\mathcal{D}$ のベルグマン核 $K_{\mathcal{D}}$ は

$$K_{\mathcal{D}}(Z, Z') = C_{\mathcal{D}} \Delta_{-(2\underline{d}+\mathfrak{b})} \left(\frac{z - \bar{z}'}{2i} - Q(u, u') \right) \quad (Z = (z, u), Z' = (z', u') \in \mathcal{D})$$

で与えられる. ただし $C_{\mathcal{D}}$ は Z, Z' に依らない定数.

3.2. 線型形式 $E^* \in \mathfrak{b}(1)^*$ を $x = \sum_{k=1}^r x_{kk} E_k + \sum_{1 \leq k < m \leq r} X_{mk} \in \mathfrak{b}(1)$ ($x_{kk} \in \mathbb{R}$, $X_{mk} \in \mathfrak{b}_{(\alpha_m + \alpha_k)/2}$) について $\langle x, E^* \rangle = \sum_{k=1}^r x_{kk}$ となるように定義する. このと

き E^* は Ω の双対錐 $\Omega^* := \{\xi \in \mathfrak{b}(1)^*; \langle x, \xi \rangle > 0 \ (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\}$ の元であり, しかも任意の $\xi \in \Omega^*$ について $\xi = E^* \circ h$ となる $h \in B(0)$ が唯一つ存在する. これから Ω^* 上の関数 $\delta_{\underline{\sigma}}$ を $\delta_{\underline{\sigma}}(E^* \circ h) := \chi_{\underline{\sigma}}(h)$ ($h \in B(0)$) によって定義できる.

命題 5 (Gindikin). (i) パラメータ $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{C}^r$ について, 積分 $\Gamma_{\Omega}(\underline{\sigma}) := \int_{\Omega} e^{-\langle x, E^* \rangle} \Delta_{\underline{\sigma}-\underline{d}}(x) dx$ が収束する必要十分条件は $\Re \sigma_k > p_k/2$ ($k = 1, \dots, r$) で, このとき $\Gamma_{\Omega}(\underline{\sigma}) = C_{\Gamma} \prod_{k=1}^r \Gamma(\sigma_k - p_k/2)$ となる (C_{Γ} は $\underline{\sigma}$ に依らない定数). さらに次が成り立つ:

$$\delta_{-\underline{\sigma}}(\xi) = \frac{1}{\Gamma_{\Omega}(\underline{\sigma})} \int_{\Omega} e^{-\langle x, \xi \rangle} \Delta_{\underline{\sigma}-\underline{d}}(x) dx \quad (\xi \in \Omega^*). \quad (10)$$

(ii) 積分 $\gamma_{\Omega^*}(\underline{\sigma}) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle E, \xi \rangle} \delta_{\underline{\sigma}-\underline{d}}(\xi) d\xi$ が収束する必要十分条件は $\Re \sigma_k > q_k/2$ ($k = 1, \dots, r$) で, このとき $\gamma_{\Omega^*}(\underline{\sigma}) = \Gamma_{\Omega}(\underline{\sigma} + (\underline{p} - \underline{q})/2) = C_{\Gamma} \prod_{k=1}^r \Gamma(\sigma_k - q_k/2)$. さらに次が成り立つ:

$$\Delta_{-\underline{\sigma}}(z) = \frac{1}{\gamma_{\Omega^*}(\underline{\sigma})} \int_{\Omega} e^{-\langle z, \xi \rangle} \delta_{\underline{\sigma}-\underline{d}}(\xi) d\xi \quad (z \in \Omega + i\mathfrak{b}(1)). \quad (11)$$

(iii) 任意の $\xi \in \Omega^*$ について

$$\int_{\mathfrak{b}(1/2)} e^{-\langle Q(u, u), \xi \rangle} dV(u) = C_Q \delta_{-\underline{b}}(\xi), \quad (12)$$

ただし C_Q は ξ に依らない定数.

3.3. ベルグマン核の性質から, 変数変換 $\zeta = \mathcal{C}(Z)$ ($Z \in \mathcal{D}$) について $K_{\mathcal{U}}(\zeta, \zeta) dV(\zeta) = K_{\mathcal{D}}(Z, Z) dV(Z)$ が成り立つ. この事と定理 1 から, (9) の左辺は

$$\frac{\text{vol}(\mathcal{U})}{K_{\mathcal{D}}(a_0, a_0)^{s+1}} \int_{\mathcal{D}} |K_{\mathcal{D}}(Z, a_0)^{s+1}|^2 K_{\mathcal{D}}(Z, Z)^{-s} dV(Z)$$

と等しく, これは命題 4 を用いて

$$C_{\mathcal{D}} \text{vol}(\mathcal{U}) \int_{\mathcal{D}} |\Delta_{-(s+1)(2\underline{d}+\underline{b})}(\frac{z+iE}{2i})|^2 \Delta_{s(2\underline{d}+\underline{b})}(\frac{z-\bar{z}}{2i} - Q(u, u)) dV(Z)$$

と書き直せる. この積分の計算には変数変換

$$Z = (x + iy + iQ(u, u), u) \in \mathcal{D} \quad (x \in \mathfrak{b}(1), y \in \Omega, u \in \mathfrak{b}(1/2))$$

が有効である. まず (11) とプランシュレルの等式から

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{b}(1)} |\Delta_{-(s+1)(2\underline{d}+\underline{b})}(\frac{z+iE}{2i})|^2 dx \\ &= \frac{(4\pi)^n}{\gamma_{\Omega^*}((s+1)(2\underline{d}+\underline{b}))^2} \int_{\Omega^*} e^{-\langle E+y+Q(u, u), \xi \rangle} \delta_{2(s+1)(2\underline{d}+\underline{b})-2\underline{d}}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

ただし $n := \dim \mathfrak{b}(1)$ である. 次に (12) から

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{b}(1/2)} \int_{\mathfrak{b}(1)} \left| \Delta_{-(s+1)(2\underline{d}+\underline{b})} \left(\frac{z+iE}{2i} \right) \right|^2 dx dV(u) \\ &= \frac{(4\pi)^n C_Q}{\gamma_{\Omega^*}((s+1)(2\underline{d}+\underline{b}))^2} \int_{\Omega^*} e^{-\langle E+y, \xi \rangle} \delta_{(2s+1)(2\underline{d}+\underline{b})}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

さらに (10) から

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\mathfrak{b}(1/2)} \int_{\mathfrak{b}(1)} \left| \Delta_{-(s+1)(2\underline{d}+\underline{b})} \left(\frac{z+iE}{2i} \right) \right|^2 \Delta_{s(2\underline{d}+\underline{b})}(y) dx dV(u) dy \\ &= \frac{(4\pi)^n C_Q \Gamma_{\Omega}(s(2\underline{d}+\underline{b})+\underline{d})}{\gamma_{\Omega^*}((s+1)(2\underline{d}+\underline{b}))^2} \int_{\Omega^*} e^{-\langle E, \xi \rangle} \delta_{(s+1)(2\underline{d}+\underline{b})-\underline{d}}(\xi) d\xi \\ &= \frac{(4\pi)^n C_Q \Gamma_{\Omega}(s(2\underline{d}+\underline{b})+\underline{d})}{\gamma_{\Omega^*}((s+1)(2\underline{d}+\underline{b}))}, \end{aligned}$$

ここで二番目の等式では命題 5 (ii) を用いた. 以上から (9) の左辺は定数倍を除いて

$$\frac{\Gamma_{\Omega}(s(2\underline{d}+\underline{b})+\underline{d})}{\gamma_{\Omega^*}((s+1)(2\underline{d}+\underline{b}))}$$

に等しく, 他方この値は (8) で定義された $P(s)$ の逆数に等しいことが命題 5 (i) と (ii) からわかり, したがって定理 3 が得られる.

References

- [1] S. Bergman, “The kernel function and conformal mapping,” Second, revised edition, Mathematical Surveys, **5**, American Mathematical Society, Providence, 1970.
- [2] J. Faraut and A. Korányi, “Analysis on symmetric cones,” Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [3] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys., **19** (1964) 1–89.
- [4] —, *Invariant generalized functions in homogeneous domains*, Funct. Anal. Appl., **9** (1975), 50–52.
- [5] L. K. Hua, “Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains,” Translations of Mathematical Monographs, **6**, American Mathematical Society, Providence, 1979

- [6] H. Ishi and C. Kai, *The representative domain of a homogeneous bounded domain*, Kyushu J. Math. **64** (2010), 35–47.
- [7] T. Nomura, *On Penney’s Cayley transform of a homogeneous Siegel domain*, J. Lie Theory, **11** (2001), 185–206.
- [8] I. I. Piatetskii-Shapiro, “Automorphic functions and the geometry of classical domains,” Gordon and Breach, New York, 1969.
- [9] H. Rossi and M. Vergne, *Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group*, J. Funct. Anal., **13** (1973), 324–389.
- [10] M. Vergne and H. Rossi, *Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group*, Acta Math., **136** (1976), 1–59.
- [11] E. B. Vinberg, S. G. Gindikin, and I. I. Piatetskii-Shapiro, *Classification and canonical realization of complex bounded homogeneous domains*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 404–437.
- [12] Y. C. Xu, “Theory of complex homogeneous bounded domains,” Kluwer, Dordrecht, 2005.
- [13] W. Yin, K. Lu and G. Roos, *New classes of domains with explicit Bergman kernel*, Sci. China Ser. **47** (2004), 352–371.
- [14] F. Zohra Demmad-Abdessameud, *Polynômes de Hua, noyau de Bergman des domaines de Cartan-Hartogs et problème de Lu Qikeng*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **67** (2009), 55–89.

Hideyuki ISHI

Graduate school of Mathematics, Nagoya University,

Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8602, Japan

hideyuki@math.nagoya-u.ac.jp