

非可換不変式論 としての CAPELLI 型 恒 等 式

(CAPELLI-TYPE IDENTITIES, REALIZED AS NON-COMMUTATIVE INVARIANT THEORY)

梅田 亨 (京都大学 理学部)

はじめに: 本稿は 2009 年 11 月 19 日の講演のための概要であり、基礎資料である。Capelli 恒等式 (1887; 1890) は、古典的不変式論の最晩期に生まれた有用な道具で、のちに H. Weyl が不変式論の復活を企図して “The Classical Groups” を著わした時、主要な役割を担った。しかし、その後の数学の流れの中では十分な注意を払われずにいた。発見から約 100 年後の 1989 年に、Roger Howe 氏との共同研究で、新たな意味と或る方向での一般化を与えたが、それを一つのきっかけとして (独立した同時多発的な他の研究とともに) 新たな研究が進んできた。その発展について、学会特別講演 (1991 秋=函数解析学, 2002 秋=代数学) など、今までに何度か、それまでの個人的総括をした。しかし、常にその後の発展が実際あった。今回、与えられた機会を利用して、ここ 20 年に得られた認識を基に、Capelli 型恒等式とその周辺について、求めて得られない「究極像」を目指し、どのような理解をすべきか考えたい。現時点では、古典的不変式論の基本的な枠組みの、非可換変数への移行と見るのが有力であろうという見解に傾いている。

0: 序

Capelli 恒等式を通じて、特に非可換性という相の下、不変式論・表現論・特殊函数論の三者を繋ぐ或る見方を説明したい。中心主題は不変式論である。古典的不変式論の「記号的方法」(symbolic method) を代表とする母函数の方法に非可換変数を取り込むことで、理論の基礎から整備し、従来あまり省みられていなかった視点に光を当てたい。

古典的な不変式論は、基礎 (下部構造) に**可換環論**と表現論があり、その上に理論が展開される。この構造は Hilbert と Weyl によって明らかにされたものだが、ややもすると、上部 (super)・下部 (infra) という**一方向的**で固定化された構図を描く結果となる。ところが、**非可換環論**に視点を広げると、「不変式論」「表現論」「非可換環論」の三者が、**循環的に**互いに他を支えるダイナミックな構図に生まれ変わる。実際は、Weyl の中にこの相互変換の可能性があったのだが、それを看破したのが R. Howe で、dual pair の提唱となった。ここでは、この見方をもう一歩すすめて、「非可換不変式論」の語を以って、このような「古典的不変式論」の見直しを指す「作業標語」(スローガン) とする。

より正確に言えば「非可換不変式論」のモデルは Capelli 恒等式である。Capelli 恒等式は dual pair を具体的な等式で表現した精密化と看做される。それを規範に、現在ではさまざまな Capelli 型の恒等式が得られているが、対象がそこまで広がると、概念的な理解、証明の機構、いずれをとっても「究極」の明快さには至らない。つまり、現状は、現象にとどまって本質に届かない。「非可換不変式論」なる標語は、逆に、Capelli 型恒等式の究極像に迫りたいという動機から再設定されたのである。観念的な標語としての「非可換化」ではなく、根源的に Capelli 型恒等式を理解するにはどのようにすべきか、という問題解決のための企画(プログラム)である。その中には、具体的計算である Capelli 型恒等式に現われる「特別に」整った表式の仕組みの解明も含まれる。このような計算の中に、或る意味意外な形で、特殊函数が現われる。しかしそれは、謂わば極めてナイーブであり、それ故、理論の基礎からの整備という動機となる。

ここで、「不変式論」と「特殊函数論」を仲介するものとして「表現論」を置き

$$\text{不変式論} \longleftrightarrow \text{表現論} \longleftrightarrow \text{特殊函数論}$$

と書くと、表現論を学んだ者なら誰しも自然に(陳腐に)連想する内容が浮かぶ。本稿は、その解説ではない。同じ三者をつなぐ道でも、少し違う見方・別の側面があることを呈示したいのである。

I 古典的不変式論から Capelli 恒等式へ

1: 不変式論 — 歴史の概要

まず「不変式論」について歴史的に振り返る。「群」概念の自立は、E. Galois に負うが、それ以前にも対称性や変換の概念は存在し、不変量の重要性と意義は認識されていた。その意味で「不変式論」の成立に「群」は必要ない。この事情は、「不変式論」の群論的視点からの整備が遅れたことを説明するだろう。

現在「不変式論」と言えば、限定的に「代数的不変式論」を指す。その誕生は G. Boole の初期の仕事(1841)である。彼は Lagrange の解析力学を独学し、2次形式の標準形の重要さの認識を得て、それを一般的な問題、つまり同次形式が線型変換で移る時、標準形の手がかりとして、変換で不変な量にどのようなものがあるか、を考察した。そして m 元 n 次形式の「判別式」を定義し、その相対不変性を示した。ついでながら、「不変式論の起源」となる Boole の仕事について、「2元2次形式」の判別式の相対不変性を示したと、甚だしい矮小化を述べる「数学史」の書物も多い。(因みに2元2次形式の判別式の相対不変性は、既に Gauss の Disquisitiones Arithmeticae (1801) の157条で、3元2次形式についても同268条で述べられている。)

念のため不変式論初歩を簡単に解説する．しばしば Boole に帰せられる「2 元 2 次形式」は高校レベルで理解できる．2 元 2 次形式 (2 変数 2 次同次多項式)

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

に対して，変数 x, y の線型変換を考える．その変換が 2×2 行列

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

によるものとし，

$$f(\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y) = a'x^2 + b'xy + c'y^2$$

となった時，変換を受けた多項式の係数 a', b', c' はもとの係数 a, b, c の一次式 (その係数は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の 2 次式) で書ける．具体的には

$$\begin{aligned} a' &= a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 \\ b' &= 2a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\beta\delta \\ c' &= a\gamma^2 + b\gamma\delta + c\delta^2 \end{aligned}$$

である．変換を行列で

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

と書くと a, b, c が線型変換を受けており，その線型変換の行列が元の $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の斉 2 次式となることが判る．更に言うと，変数 x, y を横ベクトルとして行列 g を右から掛けて変換し，係数の方は縦ベクトルとして左から掛けて変換するのが自然である．つまり x, y と a, b, c (より正確には x^2, xy, y^2 と a, b, c) の変換は双対的 (反傾的) である．

ところで係数 a, b, c の多項式のうち，簡単な変換を受ける**相対不変式**というものがある．代表的なのは**判別式** $b^2 - 4ac$ で，変換後の $b'^2 - 4a'c'$ との関係は

$$b'^2 - 4a'c' = (b^2 - 4ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

となる．もし線型変換の行列式 $\det(g) = \alpha\delta - \beta\gamma$ が 1 であるものに話を限れば，判別式は本当に不変で，そのときは (特殊線型群 $SL(2)$ に関して) **絶対不変式**になる．歴史的な理由で相対不変式も不変式と呼ばれることがある．しかし，以下では不変式は原則として絶対不変なものを指す．

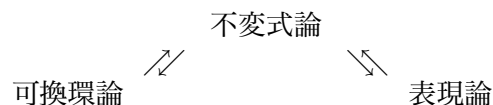
更に少し歴史を辿る。Boole の仕事に触発され A. Cayley が「不変式論」を数学の一つの分野として自立させた。彼はこのような相対不変式一般について、どれだけあるか、どのように構成するか、等々の基本的問題を立て、系統的に研究をはじめた。相対不変式は、射影幾何学的な不変量という意味を担い、その研究は大きな流行を引き起こした。上で、2 元 2 次形式の不変式の例として判別式を採りあげたが、その場合、不変式は判別式の多項式で尽きる。しかし一般に 2 元 n 次形式になると不変式は多数存在する。

Cayley は**記号的方法**という、不変式を組織的・原理的に全て書き下す方法を編み出した。ただ、それには重複も多くあるので、より効率的に、不変式の環としての生成系を見出すことに問題が移った。表示法が複数あるため、必要な基本系 (つまり不変式環の生成系) がどのようなものか、或いはより根本的に、有限な基本系がとれるのか、は判らなかったのである。

不変式の基本系の有限性問題は、その後、2 元 n 次形式について P. Gordan が肯定的に解決し (1868)、その成果によって「不変式の王」と呼ばれた。これを越えると更に困難な問題となる。Gordan の方法は具体的な構成によるもので、状況は複雑になる一方である。そこに D. Hilbert が現われ、今日「基底定理」と呼ばれる一般的定理 (イデアルの生成系の有限性) を与え、不変式環の有限性の問題を一般的な形 ($G = GL(m), SL(m)$ で基礎にとる表現は任意) で解決した (1888)。証明が非構成的であったため、Gordan は「それは数学ではない、神学である」と言ったと伝えられる。そしてその「神学」は不変式論のみならず、数学全体の様子を変え、現代数学の誕生をもたらした。

このようにして現代数学 (抽象代数) の幕開けと入れ替わるように「不変式論」は「死んだ」と看做されるに至った。しかし「不変式論」は何度か復活する。中でも重要なのは H. Weyl の “The Classical Groups” (初版 1939, 増補第二版 1946) である。Hilbert の神学の鮮やかさから、不変式論は「(可換) 環論」的な主題だと思われていたが、Weyl はもう一つの基礎として「群の表現論」を正面から採り上げた。ただ、表現論自体 Weyl の影響でそれ以降たしかに発展したが、その成果が不変式論にまで大きく及ぶほどではなかった。

歴史的に見ると「不変式論」という上部構造が二つの下部構造である「可換環論」と「表現論」を明らかにした点は教訓的で面白い。



但し「上部構造」「下部構造」という用語からは、一方が他方の基礎づけに奉仕

するという一方向的関係のように思えるが、実際はそうではなく、Weyl の本でも、新しい表現論の定理を古い不変式論の道具 (例えば Capelli 恒等式) を援用して導く部分もある。この相互関係は、単に表面的・過渡的なものではなく、後に R. Howe によって明らかにされるように、重要な「双対性」(duality) の潜む場所であった。そして、それと通底する類似の相互関係が、不変式論をめぐる話には重層的に立ち現われる。

2: 不変式論の定式化

以上は歴史的に「不変式論」を振り返ってみた。今度は数学的な観点から、「不変式論」とは何かについて現代用語を用いて述べよう。

不変式論とは群 G が環 R に環自己同型として働く時、その不変元全体のなす部分環 R^G を研究するものである。ここで環 R は非可換でも構わない。特に、その (環としての) 生成系の記述と、それら生成系の間の (代数的) 関係の記述が、最初の中心的問題となる。それらが決定されたとき、それぞれを**第一基本定理**、**第二基本定理**と呼び慣わす。因みに第三基本定理とは生成系の高次の関係式 (syzygy) の記述である。Hilbert は 1890 年の大論文でこれらすべてについて (基礎体は複素数体 $\mathbb{C}$ 、群は GL)、その有限性を示した。またその中でもう一つの基礎的定理 Nullstellensatz も与えているが、それは不変式の構成的な手段として現われた。神学という「汚名」を雪ぐ意識もあったのだ。

上の一般的な枠組みの特別な状況を考える。群 G がベクトル空間 V に線型作用素として働くと、つまり、群 G の V 上の線型表現であるが、 V 上の多項式環 $P(V)$ にも G が自然に働き、作用は環の自己同型となる。この $R = P(V)$ の場合が、しばしば現われる典型的な状況で、与えられる**データ**は群 G の表現である。群とその表現を用いて「量」の分類を考えることを、Weyl はエルランゲン・プログラムの解釈として、不変式論の定式化の中で強調している。

2 元 2 次形式に関する不変式と同様に、基礎の同次式を n 次にして 2 元 n 次形式に関する不変式が定義される。この場合、データの表現はベクトル表現の n 階対称テンソル積である。つまり $V_0 \simeq \mathbb{C}^2$ を $SL(2)$ の働く (自然な) ベクトル表現とすると、 $V = S^n(V_0^*)$ とした場合が 2 元 n 次形式に関する不変式論の設定である。ここで V_0^* と双対になるのは、先に説明したとおり、変数と係数が双対関係にあるからである。これに関する不変式 (より一般には共変式と呼ばれるものも含めて) が古典的不変式論に於ける主要なテーマであった。

古典的不変式論で取り扱われたのは、群が一般線型群 $G = GL(m)$ 或いは特殊線型群 $G = SL(m)$ の場合である。基礎にとる G の表現としては n 次元の

自然な表現 $V_0 \simeq \mathbb{C}^m$, 或いはその双対 V_0^* であるが, 上のような m 元 n 次形式の不変式論では $V = S^n(V_0^*)$ である. この $V = S^n(V_0^*)$ は $G = GL(m)$ の既約表現であるが, 不変式は複雑で難しい. 不変式論にとって基本的な設定は $V_0 \simeq \mathbb{C}^m$ 或いは V_0^* そのもの, またはそれらのいくつかのコピーの直和という既約でないものである. 「量」の分類として, これらは「ベクトル量」(共変, または反変)なので, 対応する不変式は**ベクトル不変式**と呼ばれる. Weyl は “The Classical Groups” に於いて, 一般に G が典型群 ($G = GL, O, Sp$) の場合に, ベクトル不変式に関する, 第一及び第二基本定理を具体的な形で完全に与えた.

ベクトル不変式がよく判るという第一基本定理は, 先に述べた「より一般の場合の不変式を数え尽くす」背景 (理論的前提) である. そして「記号的方法」(symbolic method) はそれを実現する技法である.

3: 記号的方法

記号的方法の背景にベクトル不変式に関する第一基本定理があると言っても, 各々は独立している. 記号的方法は一種の「母函数」の方法である. あとで非可換の場合にも, 考えが有効なことを述べるが, ここでは Cayley の記号的方法がどのようなものかを, 簡単に馴染みの 2 元 2 次形式の場合に説明する.

まず変数 x, y の受ける線型変換が, 基本形式を通じて, 係数 a, b, c に転換される様子を見る. これは x, y と双対的な反傾表現を受ける変数 ξ, η を用いし,

$$a \longleftrightarrow \xi^2, \quad b \longleftrightarrow 2\xi\eta, \quad c \longleftrightarrow \eta^2$$

という (線型な) 対応を考えると理解が容易になる. この置き換えで基本形式 $ax^2 + bxy + cy^2$ を書くと $(\xi x + \eta y)^2$ となるが, 線型形式 $\xi x + \eta y$ が線型変換で不変となるように, 互いの変換性が定められているので, 対応が確認できる. (因みに上では基本形式を $ax^2 + bxy + cy^2$ としたが, $ax^2 + 2bxy + cy^2$ とする方が対応がきれいである. 一般に 2 元 n 次だと係数を二項係数を入れて書く.) この対応から a, b, c が受ける線型表現が ξ, η の 2 階の対称テンソル表現であることも判る.

さて, ここで ξ, η という変数のコピーを作る. 例えば ξ_1, η_1 と ξ_2, η_2 を ξ, η と同じ変換を受ける二組の変数としよう. この時,

$$\det \begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{bmatrix} = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$$

を考えると $SL(2)$ 不変な式となる. この自乗 $(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2$ も当然 $SL(2)$ 不変であるが, これを展開して

$$(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2 = \xi_1^2\eta_2^2 - 2\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2 + \xi_2^2\eta_1^2$$

に上の基本形式の係数 a, b, c との対応を用いて

$$\xi_1^2, \xi_2^2 \longleftrightarrow a; \quad \xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2 \longleftrightarrow \frac{1}{2}b; \quad \eta_1^2, \eta_2^2 \longleftrightarrow c$$

と置き換える. すると

$$\xi_1^2\eta_2^2 - 2\xi_1\eta_1\xi_2\eta_2 + \xi_2^2\eta_1^2 \longleftrightarrow ac - \frac{1}{2}b^2 + ac = \frac{1}{2}(4ac - b^2)$$

と $SL(2)$ 不変な式ができる. 今の場合得られたのは判別式である.

このように ξ, η というベクトル量の世界にある**明らかな不変式から乗法的に不変式を生成**し, それを群作用で不変な線型変換で a, b, c の世界に移して不変式を作るというのが「記号的方法」である. このときベクトル不変式なら, 明らかな不変式 (typical invariants) から乗法的に生成すれば不変式がすべて書けるという第一基本定理がなりたつ. これが一般の不変式の数え尽くしの根拠になる. この数え尽くすという点はもちろん大事な点であるが, 「記号的方法」自体にある, 不変式を具体的に構成するという利点も忘れてはならない.

4: ベクトル不変式の第一基本定理

Weyl の “The Classical Groups” の扱う不変式論の重要な結果は, 典型群に関する第一・第二基本定理の具体的記述である. ここで典型群 (classical groups) とは, 一般線型群 $GL(m)$, 直交群 $O(m)$, シンプレックティック群 $Sp(m)$ を指す. 直交群, 及びシンプレックティック群はそれぞれ非退化な, 対称, または交代双一次形式を不変にする群として定義される. ここで m は行列のサイズを表わす (従ってシンプレックティック群の場合に m は偶数).

さて, G を $GL(m)$, $O(m)$, $Sp(m)$ とし, $V_0 \simeq \mathbb{C}^m$ を群を定義するベクトル表現とする. その双対 V_0^* に G は反傾表現で作用する. この時, $V_0 \otimes V_0^*$ には (定義によって) 明らかな $GL(m)$ 不変元 (従って $GL(m)$ の部分群でも不変) がある. 具体的には V_0 の基底 $e_1, e_2, \dots, e_m$ を一組選び, 対応する V_0^* の双対基底を $e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*$ として

$$\theta = \sum_{k=1}^m e_k \otimes e_k^*$$

と書ける. もちろん基底の取り方によらない. 非退化形式があると, それを通じて V_0^* は V_0 と同一視され, $O(m)$, $Sp(m)$ の場合には $V_0 \otimes V_0$ に対応する不変元がある. 多項式環 $\mathcal{P}(V_0 \oplus V_0^*) \simeq S(V_0^* \oplus V_0)$ には $V_0^* \otimes V_0$ が部分空間として入り, 上の不変元に対応する不変多項式 (typical invariant) がある. 群が $O(m)$

および $Sp(m)$ の場合には、双対空間との同一視を通じて typical invariant は $\mathcal{P}(V_0 \oplus V_0)$ にあると考えるが、 $O(m)$ の場合には $\mathcal{P}(V_0)$ にもある。

変数のコピーの数を増やすこともできる。一般に G の (反変, 共変の混ざった) ベクトル表現とは、これら V_0 と V_0^* の 幾つかのコピーの直和を言う：

$$V = rV_0 \oplus sV_0^* \quad (r \text{ 箇の } V_0 \text{ のコピーと } s \text{ 箇の } V_0^* \text{ のコピーの直和}).$$

G が $O(m)$, $Sp(m)$ の場合は V_0 と V_0^* が同型となるので、 V_0^* は必要でなく

$$V = rV_0 \quad (V_0 \text{ の } r \text{ 箇の重複})$$

で考えてよい。この $\mathcal{P}(V)$ にはコピーのうちの二つの双対的な組から作った typical invariants が住む。Weyl の The Classical Groups の**第一基本定理**とは、典型群 $G = GL(m), O(m), Sp(m)$ の場合、ベクトル不変式の環 $\mathcal{P}(V)^G$ は上の typical invariants で生成される、という言明である。単に有限生成であるというだけでなく、具体的に不変式の生成系が記述できるというのが著しい。

5: 第一基本定理の読み替え

ベクトル不変式の第一基本定理は $GL(m)$ の場合は Cayley によって既に知られており、それが記号的方法の基礎にあった。また、その場合は、現在 Schur-Weyl duality と呼ばれる $GL(m)$ と対称群の双対性 (テンソル空間 $T^N(V_0)$ を対称群 $\mathfrak{S}_N$ によって既約分解する話：The Classical Groups 第4章にあり非常に有名) によっても証明できる。しかし、直交群とシンプレクティック群の場合は、Weyl が Capelli 恒等式を援用してはじめて証明した。(現在では、Capelli 恒等式に頼らない、完全に表現論的な証明も可能。) Capelli 恒等式については後で触れる。

上の第一基本定理で不変式の生成系の具体的記述に増して重要なのは、基本となる表現 (およびその双対) をコピーによっていくらでも増やせるという点である。特に、ベクトル表現 V に対して $V \oplus V^*$ もベクトル表現であり、従って不変式の生成系 $\mathcal{P}(V \oplus V^*)^G$ がよく判る。この「変数倍加」の操作 (doubling the variables) が可能なのが重要で、そこまで判る群と表現はそんなに多くない。

「変数倍加」が何故重要なのか。先に「不変式論の定式化」に於いて環 R として非可換なものも許すことと、及び「不変式論」とその下部構造である「表現論」について、片方が他方の基礎であるという一方的関係でないということを言ったが、その理由がここで明らかになる。「表現論」の扱う多様な表現に比して「不変式論」はトリビアル表現というただ一つの表現を取り出す。随分差があるようだが、実際は、思うほど大きくない。

今、群 G の表現 (簡単のため有限次元としよう) $\mathbb{V}$ を取る. このとき $\mathbb{V}$ の線型変換全体の環 $\text{End}(\mathbb{V}) \simeq \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^*$ には G が共軛

$$\alpha \mapsto g \alpha g^{-1} \quad (\alpha \in \text{End}(\mathbb{V}), g \in G)$$

で (もちろん環自己同型として) 作用する. この G 不変元 $\text{End}(\mathbb{V})^G$ とは, 群作用と可換な線型変換のことだから G 自己準同型環 $\text{End}_G(\mathbb{V})$ に他ならない. これが「不変式論」の定式化で非可換環を取り込む第一の「下心」である. 自己準同型環 $\text{End}_G(\mathbb{V})$ が判ると, 表現 $\mathbb{V}$ の「既約分解」について大きな情報を与える. 特に表現 $\mathbb{V}$ が完全可約ならば, 既約分解とほぼ同等である.

これを基本に「変数倍加」へと移行する. 今, $\mathbb{V} = \mathcal{P}(V)$ としよう. すぐ上では有限次元としたから, インチキだが, この場合は $\mathbb{V}$ は $\mathcal{P}(V)$ の同次成分という有限次元表現の直和に分かれるので, ひどい差はない. また, この $\mathbb{V} = \mathcal{P}(V)$ の双対も, 線型形式全体ではなく, 各同次成分の双対の直和という「有限次元的部分」をとって $\mathbb{V}_{\text{有限}}^* = \mathcal{P}(V^*)$ を考える. これを「文字どおり」 $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}_{\text{有限}}^*$ をそのまま $\text{End}(\mathbb{V}) \supset \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^*$ の中に埋め込むとマズイので $\mathbb{V}_{\text{有限}}^* = \mathcal{P}(V^*)$ の代わりに, それを定数係数微分作用素の環 $\mathcal{D}(V)$ と読み替えてから, テンソル積をとる: つまり多項式係数の微分作用素の環 $\mathcal{PD}(V) \simeq \mathcal{P}(V) \otimes \mathcal{D}(V)$ という $\text{End}(\mathcal{P}(V))$ の部分環を考える. これは「充分」大きな部分環で, 例えば $\mathcal{P}(V)$ の有限次元部分に制限すると, すべての線型変換を与える.

多項式係数の微分作用素環 $\mathcal{PD}(V)$ にも G が共軛で働くが, 作用で不変なものとは, (多項式係数) G 不変微分作用素である. これが判ると $\mathcal{P}(V)$ という表現の分解の大きな情報が得られる. ところで, この多項式係数の微分作用素環 $\mathcal{PD}(V)$ は非可換だが, 可換な $\mathcal{P}(V \oplus V^*) \simeq \mathcal{P}(V) \otimes \mathcal{P}(V^*)$ と近い. 正確には, 後者 (graded algebra) は前者 (filtered algebra) から “gr” をとってできる. 或いは, 微分作用素のシンボル (表象) をとる, という可換化の標準的操作でもある. 可換化した $\mathcal{P}(V \oplus V^*)$ ならば, 先ほどの典型群のベクトル表現の場合, 不変式の生成系は具体的にすべて判る. それを用いて, 不変微分作用素環 $\mathcal{PD}(V)^G$ も生成系を読み替えた微分作用素たちで生成されることが容易に判る (最高階でまず見て, 低階のところは帰納法で処理する). このように, 第一基本定理は「変数倍加」を通じて, ベクトル表現の上の多項式環の既約分解を支配する.

6: 双対定理としての第一基本定理

このように多項式係数の微分作用素環に於ける不変元をとると, その作用の形から, 交換団 (commutant) を決めることとなる. 今, 考えている典型群の場合, 交換団 (=不変元全体) の生成系として typical invariants がとれる. ここ

で、ちょっとした奇跡が起こり、typical invariants の微分作用素たちは (定数の補正だけで) 双対的な典型群の Lie 環になる。これが dual pair の一つの形 (無限小版) である。

具体的に直交群 $O(m)$ で説明する。複素数体上ではどの実現を考えても同じだが、例えば、座標を $x_1, x_2, \dots, x_m$ として、2 次形式を

$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$$

ととる。但し対称双一次形式を $(\cdot, \cdot)$ で表わした。さて $V \simeq \mathbb{C}^m$ として $\mathcal{P}(V)$ 上に $O(m)$ の作用ができる。もう一組の (双対的な) 座標 $y_1, y_2, \dots, y_m$ を導入して typical invariants を書くと、

$$(x, x), \quad (x, y), \quad (y, y)$$

で、これが不変式環 $\mathcal{P}(V \oplus V)^{O(m)}$ の生成系となる。この $\mathcal{P}(V \oplus V)^{O(m)}$ を $\mathcal{PD}(V)^{O(m)}$ に読み替えるには変数 y_k を座標 x_k に関する偏微分 $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ と読む。すると上の 3 つの typical invariants は

$$\begin{aligned} Q &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2, \\ E &= x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + \dots + x_m \partial_m, \\ \Delta &= \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_m^2 \end{aligned}$$

となる。ここで Q は掛け算作用素。これらが $O(m)$ 不変であることは見易いが、実際これらが不変微分作用素環 $\mathcal{PD}(V)^{O(m)}$ を生成する。

これだけでも充分役立つが、この 3 つの作用素について、交換関係を調べると、

$$[E, Q] = 2Q, \quad [E, \Delta] = -2\Delta, \quad [\Delta, Q] = 4E + 2m$$

なので、定数を修正して

$$Q/2, \quad -\Delta/2, \quad E + \frac{m}{2}$$

とすると、 $\mathfrak{sl}(2)$ -triplet になる。つまり $O(m)$ による分解をつかさどる対称性として、群 $SL(2) \simeq Sp(2)$ の Lie 環 $\mathfrak{sl}(2)$ が裏に潜んでいたのである：

$$O(m) \curvearrowright \mathcal{P}(\mathbb{C}^m) \curvearrowright \mathfrak{sl}(2).$$

ところが、いま現われた $\mathfrak{sl}(2)$ が、やはり典型群 (の Lie 環) であり

$$V \oplus V = V \otimes \mathbb{C}^2 = m \mathbb{C}^2 = \underbrace{\mathbb{C}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^2}_m$$

を通じて逆の不変式環 $\mathcal{P}(V \oplus V)^{\mathfrak{sl}(2)}$ も判る．つまり第一基本定理から，それは $SL(2) \simeq Sp(2)$ に関する typical invariants で生成される．その不変式を微分作用素に読み替えると

$$A_{ij} = x_i \partial_j - x_j \partial_i$$

がでてくるが，これらが $\mathcal{PD}(V)^{\mathfrak{sl}(2)}$ という $\mathfrak{sl}(2)$ の作用と可換な微分作用素全体を生成することになる．この A_{ij} は，もとの直交群 $O(m)$ の無限小作用 (微分表現) に他ならない．

土台のベクトル表現の重複を増やせば，同様なことが

$$O(m) \curvearrowright \mathcal{P}(r\mathbb{C}^m) = \mathcal{P}(\mathbb{C}^{mr}) = \mathcal{P}(m\mathbb{C}^r) \curvearrowright \mathfrak{sp}(2r)$$

でも起こるし， Sp と O の役割を変えた

$$Sp(m) \curvearrowright \mathcal{P}(r\mathbb{C}^m) = \mathcal{P}(\mathbb{C}^{mr}) = \mathcal{P}(m\mathbb{C}^r) \curvearrowright \mathfrak{o}(2r)$$

でも起こる．また出発点を，より基本的な GL にして

$$GL(m) \curvearrowright \mathcal{P}(r\mathbb{C}^m) = \mathcal{P}(\mathbb{C}^{mr}) = \mathcal{P}(m\mathbb{C}^r) \curvearrowright \mathfrak{gl}(r)$$

というもある．はじめの二つでは右辺の $\mathfrak{sp}(2r)$ や $\mathfrak{o}(2r)$ の作用は (代数的に) 群に持ち上がるものではない．だからやや奇異な感じがするかも知れないが，そのときは，先の $\mathfrak{sl}(2)$ の作用を思い出して欲しい．最後の分では右辺に来ていゝる $\mathfrak{gl}(r)$ は Lie 環だけでなく，群 $GL(r)$ の普通の作用に持ち上がる．この $\mathfrak{gl}(r)$ は大きな $\mathfrak{sp}(2r)$ や $\mathfrak{o}(2r)$ の中でブロック対角に埋め込まれている部分である．これらの関係は次のようなシーソーの形をしている：

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \mathfrak{sp}(2r) & \\ GL(m) & \longleftrightarrow & \mathfrak{gl}(r) \\ \cup & \nwarrow & \cup \\ O(m) & & \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} & \nearrow \mathfrak{o}(2r) & \\ GL(m) & \longleftrightarrow & \mathfrak{gl}(r) \\ \cup & \nwarrow & \cup \\ Sp(m) & & \end{array}$$

今，上で右辺に書いた (2 次式で定義される) Lie 環の表現が，一般に対応する Lie 群 (代数群) に持ち上がらないと言ったが，この双対性の組は群レベルでも Weil 表現 (oscillator 表現) を通じて定式化され，それがむしろ本来の dual pair というべきである． (上で述べたのは dual pair の無限小変換な部分.)

ついでに言えば作用する空間を，多項式環 (対称代数) でなく，グラスマン環 (外積代数) としても同様の dual pair がある (物理で言えば恰度ボソンからフェ

ルミオンへの移行). この場合は有限次元なので完全に代数の枠に入るが, 上の oscillator 表現と対応するのは spin 表現となる. 今度はシンプレクティック群ではなく直交群の二重被覆である. 二重被覆が現われる点ではこちらの方が古くて馴染みがあるだろう. 多項式係数の微分作用素 (Weyl 代数) の対応物は Clifford 代数であり, その場合の dual pair (シーソー) は次のようになる:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \mathfrak{o}(2r) \\ & \cup & \\ GL(m) & \longleftrightarrow & \mathfrak{gl}(r) \\ \cup & \nwarrow & \\ O(m) & & \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} & \nearrow & \mathfrak{sp}(2r) \\ & \cup & \\ GL(m) & \longleftrightarrow & \mathfrak{gl}(r) \\ \cup & \nwarrow & \\ Sp(m) & & \end{array}$$

注意として, ボソンでもフェルミオンでも, (GL, GL) duality が同じく成り立っているが, 表現の対応は異なる. 例えば既約表現を Young 図形で書いた時, ボソンの方は同じ図形が対応するが, フェルミオンの方の対応は図形が転置する. 対応の精密版である Capelli 型恒等式にも違いが反映され, 味わい深い.

7: Capelli 恒等式

Capelli 恒等式の色々ある見方のうち, dual pair 対応を具体的化という重要な側面があり, それによって dual pair はより精密な記述を得る. 実際 (GL, GL) pair で, それをきっちり書いたのが古典的な意味での Capelli 恒等式なのである.

最も基本的な (GL, GL) duality

$$GL(m) \curvearrowright \mathcal{P}(r\mathbb{C}^m) = \mathcal{P}(\mathbb{C}^{mr}) = \mathcal{P}(m\mathbb{C}^r) \curvearrowleft GL(r)$$

を見る (但し, 右の方は群に直した). 土台のベクトル空間 $\mathbb{C}^{mr}$ を $m \times r$ 行列の空間 $\text{Mat}(m \times r)$ と同一視すると, それぞれ左右から $GL(m)$, $GL(r)$ が作用する. 二つの作用は可換 (結合法則!) だが, 更に, 互いが他の作用を規定するという双対性が生じる. 古典的不変式論でいえば GL のベクトル不変式の第一基本定理 (Cayley が既に利用した) である. また, にわかに関係は見えないが, テンソル空間の分解に関わる Schur-Weyl 相互律 (5 節の最初で触れた) と本質的に同じ内容でもある. 或いはまた, 表現論的には, $GL(m, \mathbb{C})$ のコンパクト実形であるユニタリ群 $U(m)$ に対する Peter-Weyl の定理と言ってもよい.

この作用の無限小変換を実際書くために, 上のように行列空間で実現して, 座標を t_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r$) とし, 対応する偏微分作用素を ∂_{ij} と書く. また E_{ij} ($1 \leq i, j \leq r$) を $\mathfrak{gl}(r)$ の標準的基底 (行列単位に対応) とし, 反対側の

$\mathfrak{gl}(m)$ は E_{ij}° ($1 \leq i, j \leq m$) と書く. この時, $\mathfrak{gl}(r)$ (右) と $\mathfrak{gl}(m)$ (左) の作用は

$$\rho(E_{ij}) = \sum_{a=1}^m t_{ai} \partial_{aj}, \quad \lambda(E_{ij}^\circ) = \sum_{b=1}^r t_{jb} \partial_{ib}$$

と書け, 関係は, Lie 環の生成元, 座標函数, 偏微分作用素を行列形にして

$$\begin{aligned} T &= (t_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r}, & D &= (\partial_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r}, \\ \Pi &= (\rho(E_{ij}))_{1 \leq i, j \leq r}, & \Pi^\circ &= (\lambda(E_{ij}^\circ))_{1 \leq i, j \leq m}, \end{aligned}$$

を導入すると

$$\Pi = {}^t T D, \quad {}^t \Pi^\circ = T {}^t D$$

のように書ける. 但し t は行列の転置を表わす. ここで右と左が少しややこしいが, 右掛け算の方が自然な左作用なので, 左掛け算の方に $^\circ$ を付けている.

この左右の Lie 環の作用はベクトル場 (1 階の微分作用素) として実現されているが, 高階にして普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}(r))$ と $U(\mathfrak{gl}(m))$ の作用ができる. それらの中心は, 両側不変な微分作用素に写される. 一方, ベクトル不変式に関する第一基本定理を読み替えた「双対定理」からは, 多項式係数の微分作用素環 $\mathcal{PD}(\text{Mat}(m \times r))$ の中で, これらの像 $\rho(U(\mathfrak{gl}(r)))$ と $\lambda(U(\mathfrak{gl}(m)))$ は互いに交換団 (commutant) となることが判り, 結果, 次の等式を得る.

$$\rho(ZU(\mathfrak{gl}(r))) = \rho(U(\mathfrak{gl}(r))) \cap \lambda(U(\mathfrak{gl}(m))) = \lambda(ZU(\mathfrak{gl}(m))).$$

但し $ZU(\mathfrak{gl}(r))$ と $ZU(\mathfrak{gl}(m))$ は各々 $U(\mathfrak{gl}(r))$ と $U(\mathfrak{gl}(m))$ の中心を表わす. これはまた両側不変微分作用素全体 $\mathcal{PD}(\text{Mat}(m \times r))^{\mathfrak{gl}(m) \times \mathfrak{gl}(r)}$ とも等しい. 「双対定理」の帰結であるこの関係を, Capelli 恒等式は, 集合レベルでなく, 個別の微分作用素の間の等式として与えるもので, より精密なのである.

記号の煩雑さ避けるために, $r = m$ として, 最高階 (Capelli 1887) の等式を説明する. 上で行列形表示から $\det({}^t T) \det(D)$ が両側作用 $GL(m) \times GL(m)$ で不変な微分作用素であることが判る. これを中心 $ZU(\mathfrak{gl}(m))$ の像として書くのが Capelli 恒等式である. まずその中心元 (Capelli element) を書く:

$$\begin{aligned} C &= \det(\mathbb{E} + \text{diag}(m-1, m-2, \dots, 0)) \\ &= \det \begin{bmatrix} E_{11} + m-1 & E_{12} & \cdots & E_{1m} \\ E_{21} & E_{22} + m-2 & \cdots & E_{2m} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ E_{m1} & E_{2m} & \cdots & E_{mm} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

但し $\mathbb{E} = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} \in \text{Mat}(m, U(\mathfrak{gl}(m)))$. ここに現われた非可換成分の行列式は列行列式 (column determinant) と呼ばれ、次の交代和で定義される：

$$\det(\Phi) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \text{sgn}(\sigma) \Phi_{\sigma(1)1} \Phi_{\sigma(2)2} \cdots \Phi_{\sigma(m)m}.$$

以上の準備の下、Capelli 恒等式とは

$$\rho(C) = \det({}^t T) \det(D)$$

と書ける。ここに非可換ではあるが、行列式の乗法公式が出現している。もちろん生ママでは成立していないが、対角の修正だけで実現している点は著しい。

この形の等式が、恰度 Hilbert の神学とほぼ同時に出現したのも因縁深い。今のは、一つだけの等式であるが、中心全体の対応を与える低階の Capelli 恒等式もあって、やや遅れた 1890 年に発表された。それは小行列版で、書くのも難しくないが、記号の導入が必要なので省略する。

II Capelli 恒等式から Capelli 問題へ

8: 母函数の方法

上の Capelli 恒等式では非可換環 $U(\mathfrak{gl}(m))$ の中心元を具体的に書く手段として「非可換行列式」が現われた。行列式は多変数の「特殊多項式」の典型例(そう意識されることは少ない)であり、最もよく知られた「(相対) 不変式」である。不変式論に非可換環を取り込む第二の意味は、普遍包絡環の中心元とその表現という重要な問題が、不変式論の非可換版として位置づけられるという点にある。そして、Capelli 恒等式とその一般化は、空疎な一般論ではなく、具体的な問題として、特別な多項式の非可換版へと我々を導く。

Capelli 恒等式は、現在では、単純な機械的計算で示される。上で言及したように、Capelli 恒等式は非可換版の行列式の乗法公式の姿をしているが、可換な場合の外積代数を用いる証明をそのまま Capelli 恒等式に援用できる。一種の「母函数の方法」である。

外積代数 Λ_m を用意する： m 箇の生成元 $e_1, e_2, \dots, e_m$ をもち、その基本関係式は反可換な $e_i e_j + e_j e_i = 0$ 。非可換環 $\mathcal{R}$ を係数に持つ行列の行列式も、 Λ_m を $\mathcal{R}$ で係数拡大した環 $\Lambda_m \otimes \mathcal{R}$ で扱える。但し、そこでの積は、部分環 Λ_m と $\mathcal{R}$ は元別に可換と決める。「母函数」の枠組みでは、外積代数は(非可換)形式変数である。成分を $\mathcal{R}$ にもつ行列 $\Phi = (\Phi_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ に対し $\Lambda_m \otimes \mathcal{R}$ の元 $\eta_i = \sum_{a=1}^m e_a \Phi_{ai}$ を作る。この時、非可換成分でも「列行列式」が

$$\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_m = e_1 e_2 \cdots e_m \det(\Phi)$$

と現われる．これは可換な場合の行列式を外積代数で書くのと同じ．行列式の乗法公式も機械的計算となるが，成分の非可換性に注意をする点異なる．

Capelli 恒等式の場合には $\mathcal{R} = \text{End}(\mathcal{P}(\text{Mat}(m)))$ として，行列の積 $\Pi = {}^tTD$ に対応して

$$\begin{aligned}\xi_i &= \sum_{a=1}^n e_a t_{ia} \quad (1 \leq i \leq m) \\ \zeta_j &= \sum_{i=1}^m \xi_i \partial_{ij} \quad (1 \leq j \leq m)\end{aligned}$$

と置く．すると $\Pi = {}^tTD$ とから

$$\zeta_j = \sum_{a=1}^n e_a \rho(E_{aj})$$

である．座標函数 $\{t_{ij}\}$ は可換なので，もとの $e_i e_j + e_j e_i = 0$ を反映して $\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i = 0$ である．問題なのは ξ_i と ∂_{pq} の交換関係だが，その計算は基本的な交換関係 $\partial_{pq} t_{ij} - t_{ij} \partial_{pq} = \delta_{pi} \delta_{qj}$ を使えばすぐ判る．実際は積の行列式を操るのは ξ_i と ∂_{pq} の交換関係よりも，それから出る ξ_i と ζ_j の交換関係で，

$$\zeta_j(u) = \zeta_j + u e_j = \sum_{a=1}^n e_a \rho(E_{aj} + u \delta_{aj})$$

と対角線にパラメータ u でシフトを入れると

$$\zeta_j(u+1)\xi_i + \xi_i \zeta_j(u) = 0$$

と簡潔に書ける．この関係式を用いて $\zeta_1(m-1)\zeta_2(m-2)\cdots\zeta_m(0)$ を計算すると，たちどころに

$$\det(\Pi + \text{diag}(m-1, m-2, \dots, 0)) = \det({}^tT) \det(D)$$

が得られる．

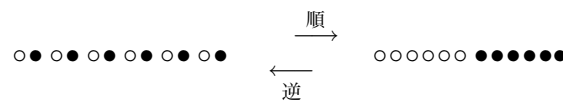
今は，乗法公式の説明だが，類似の計算で，例えば Capelli element C が普遍包絡環の中心に属することも示せる．今は形式的計算の側面を強調したが，環 $\mathcal{R}$ に群が作用している時，つまり不変式論の基本設定だが，このような「母函数」を作ることは，外積代数にも (ベクトル作用を基礎にする) 標準的群作用を賦与して「基本不変式」乃至は「基本共変式」を上げた環の中で定義し，それを利用するという理論的背景が見えてくる．このように「母函数」の形式的変数に群作用を込め，さらに乗法的生成を用いるのはまさに「非可換版記号的方

法」というべきものなのである。これは Capelli 型恒等式を巡る研究において極めて有用な道具で、Capelli 型恒等式の本質を明瞭にする上で欠かせない。

9: Capelli 問題と非可換特殊多項式

前節では「母函数の方法」に表現論的背景を加味した「記号的方法」という技術的な側面を見た。ここでは、例えば何故「行列式」なのか、或いは、より一般に Capelli 型恒等式に現われる (行列変数) 特殊多項式はどのようにして出てくるのか、という点について述べる。

少し一般的に、例えば Lie 環 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の中心を表現の上で不変微分作用素として書くこと (順問題), 或いはその逆に或る表現の上で不変微分作用素が普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の中心の表現として書けるか (逆問題), の二つの方向が考えられる。後者は一般には肯定的に解決できないが、その型の問題を multiplicity-free action という (必要な) 設定で Capelli 恒等式の一般化として研究したのが R. Howe と筆者の Math. Ann. **290** (1991) である。順・逆のどちらにせよ、普遍包絡環の中心なり不変微分作用素なりを適切に選ぶ基準が要る。抽象的・一般的に言えば「順」問題は、正規順序に書き直すという点で、Poincaré-Birkhoff-Witt の定理と似ているし、「逆」問題は、その反対にまとめ直すという点で、Baker-Campbell-Hausdorff 公式と (ちょっと) 似ている。単純化した模式図で書けば



のようになる。但し $\circ$ は (函数による) 掛け算作用素, $\bullet$ は微分作用素のつもり。順・逆, つまり、展開とまとめ (中学校風には、「展開」と「因数分解」) のどちらも、非可換では、勝手では綺麗に結果は書けない。抽象的に「とにかく」でできることが判っても、満足せず「具体的公式」まで求めるのを目標とする。これが問題 (ゲーム) の実践的な「味わい」または独自の「色合い」を生む。

これに対して古典的 Capelli 恒等式は、申し分のないほどすべてが巧くいく例で、他に替えがたい模範 (model) である。上では「行列式」の乗法公式という点を強調したが、実はそれに拘泥ると本質を見失う。より **一般**の Capelli 型恒等式には乗法公式は、むしろ「行列」レベルで考えるのがよい。「行列式」の場合はそれが 1 次元表現だったのだ。私自身、考えを転換するのに 10 年近く掛かった。現在では、Capelli 型恒等式の典型としては、表現のトレース、つまり可換成分であれば**指標**であるが、その非可換成分版 (標語的には「非可換指標公

式」) を一種の「理想型」として想定する。(実はそれ以外の型の Capelli 型恒等式も存在するので、その解釈には、若干アタマを悩ませている.)

説明は若干言葉足らずだが、一般的なことを言う前に少し具体的な「特殊多項式」の例を挙げよう。行列式や小行列式というのは、 $GL(m)$ のベクトル表現から交代テンソル積表現を作る時、「行列要素」として現われる。低階の Capelli 恒等式は、したがって、そのような既約表現に付随したものである。一方、行列式の定義 (交代和) で「符号」の部分を除いて“対称和”にしたものをパーマメント (permanent) というが、そちらの系列 (重複を許した“小行列”のパーマメント) は、 $GL(m)$ のベクトル表現の対称テンソルの「行列要素」である。その例は、はじめの節で 2 元 2 次形式の不変式の箇所にでてきた、係数 a, b, c の変換を表わす 3×3 行列を見ればよい。特に真ん中見られる $\alpha\delta + \beta\gamma$ が 2×2 行列のパーマメントである。

これらを使った Capelli 型恒等式は対称テンソルに付随した中心元の表現という形で存在する。実際、いろいろな表現に付随して中心元があることになる。不変式論自体が「表現」を決めて定式化されるというのにも似ている。これらの反省から、「非可換指標公式」としての Capelli 恒等式という視点に至った。参考となる説明は『跡公式としての Capelli 恒等式』(「数理科学」1999 年 3 月号; 或いはこの論説を含む「別冊・数理科学」2007 年 4 月) にある。

高階の Capelli 恒等式もあって、それを具体的に述べたのが Okounkov であるが、そこに現われる「行列函数」は immanant と呼ばれた。これも含めて、今の場合「特殊多項式」は $GL(m)$ の「表現の行列要素」として現われる行列函数である。別の系統で有名なものに、パフィアン (Pfaffian) や hafnian (Hafnian) がある。パフィアンは偶数次交代行列に対し、hafnian は偶数次対称行列に対し定義される (細かいことを言えば定義だけなら一般の偶数次正方行列でもできるが、実際はその交代化や対称化のそれと一致する)。パフィアンはよく知られているが、念のため一つの定義を書くと

$$\text{Pf}(\Phi) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2m}} \text{sgn}(\sigma) \Phi_{\sigma(1)\sigma(2)} \Phi_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots \Phi_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}$$

となる。hafnian はこの定義で符号を除いたものである。hafnian はパフィアンほど有名ではないが、ボソンとフェルミオンの対比を考えれば存在理由は明確で、物理学者 E.R. Caianiello が On quantum field theory I, Nuovo Cimento (9) 10 (1953), 1634 – 1652 で導入した。名前はコペンハーゲンのラテン古名 Hafnia に因む。(直接に関係はないが、この Hafnia に因むものに hafnium (Hf) という元素名がある。hafnium は仁科芳雄とも縁が深く、“仁科会館”〔笠岡の近くの里庄町・里庄西公民館〕にはその大きな原子模型があるらしい。)

これらパフィアンやハフニアンは $GL(m)$ から見れば「表現の行列要素」でなく、「表現空間に住むベクトル」である。その証拠は、行列式やパーマメントは「脚」が2本あるが、パフィアンやハフニアンは「脚」が1本で、明らかに異なるのである。「行列要素」こそが Capelli 型恒等式となるべきだとの理想からすれば、パフィアンやハフニアンも表現の行列要素となってもらいたい。そのためには群を拡大して考える必要がある。パフィアンの場合は直交群 $O(2m)$ の2重被覆である spin 群が、ハフニアンの場合は、文字どおりという訳にはいかないが $Sp(2m)$ の「2重被覆」である metaplectic 群が、関与する。これは恰度 dual pair の舞台として、先に説明した設定である。

III Capelli 問題とその攻略

10: 基本問題の整理

Capelli 問題というのは 1989 年 (論文は 1991 年), 上記のように古典的 Capelli 恒等式を一般化する問題の設定であったが, その前提には言うまでもなく R. Howe の記念碑的な Remarks on Classical Invariant Theory (プレプリントは 1978 年頃, 論文の出版は 1989 年 Trans. A.M.S. **313**) の最後に Capelli 恒等式の表現論的意味が明らかにされていたことがある。幾分こみいった研究の経緯を述べる余裕はないが, 今思えば, 時代が Capelli の復活に向かっていたのであろう。ここでは, Howe-Umeda の Capelli 問題をもう少し広い見地から取り扱うが, そのための基本事項の整理をしよう。以下 G を典型群として, その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。問題となるのは, $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ について

- (A) 中心元 (或いは不変元) の構成
- (B) 異なる方法で構成された中心元の間関係
- (C) 中心元の不変微分作用素による実現 (表現)

というものである。このうち本来の Capelli 型恒等式は (A) と (C) を問題にするが, (B) はそれらを扱う上でも当然深く関わってくるし, 設定を少し変えれば (C) の変形とも見える。例えば, 今は普遍包絡環で考えているが, これを表現の上の微分作用素環にする。この時, 部分表現に付随して, 不変微分作用素が標準的に作れるが, それが普遍包絡環の中心の表現になっているか, というのが, Howe-Umeda の Capelli 問題であった。このように見ると, 異なる方法で構成された「不変微分作用素」の間関係を調べる問題となる。この意味で (B) は (C) に極めて近い問いである。

いずれにしろ, これらは独立した問題として分離できるものではない。ここでは, 特に基本的な (A) を中心に考えるが, 他の (B), (C) とも関わる事柄が多

い、つぎの (1) – (3) は自然に思い浮かぶ代表的な問いである：

- (1) 「よい」中心元をどう選び、表示するか。
- (2) どうやったら透明で判りやすい証明が得られるか、証明の原理はなにか。
- (3) 非可換化に伴う多項式の補正の由来はなにか。

これらについて決定的な答えが用意できるならば、研究は殆ど終わっている。ここでは答えへの手掛かりを述べる。古典的な Capelli 恒等式に於いては、他の場合にが一般化されるか否かは別として、一応の答えがある。また、他のできている場合のことを考えて、理想的な状況を設定して回答できるが、同時に現状のもつ不完全さに伴って新たな疑問が生ずる。[1] から [3] に向かうにしたがって不透明要素が増える

[1] (行列要素)： 表現論の教えとして、「よい」函数を、行列要素として書くという原理がある。実際、中心元は (有限次元) 既約表現に対応づけて構成される。その一つの既約指標 (トレース) に $U(\mathfrak{g})$ の元を代入して得られる非可換多項式として表示されるものがあるだろう。ここでのスローガンは **Capelli 恒等式とは非可換指標** である。中心元とは、非可換環の中での共軛作用に関する不変元と看做せる。そして指標は表現に付随した特権的な不変元である。先に見た、非可換行列式としての Capelli 恒等式では、さほど明らかではないが、低階の Capelli 恒等式、或いはパーマメント型の中心元とそれを用いた Capelli 型恒等式などを見ると、この「指標」の視点がはつきりする。しかし、また、既約表現に対応のさせ方は unique とはいえないかもしれない。さらに「冪のトレース」(Gelfand 式構成) は、表現行列とは異なり、対称式で言えば、冪対称式に対応するので、これらをどのようなものとして捉えるか不明である。より具体的には対数微分 (Newton 公式) の意味づけであり、それがコホモロジー的な解釈を許すのか、など曖昧だが若干の興味ある問題がある。

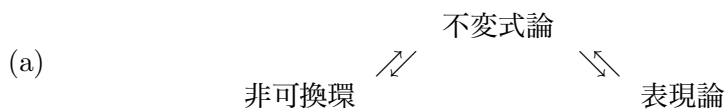
[2] (母函数の方法=記号的方法)： 指標の記述に関して、その可換版で説明すると、たとえば指標を基本 (ベクトル) 表現の行列要素の多項式で書くものである (一種の fusion process)。これは実は、(既約) 表現、一つ一つを考えているのではなく、ベクトル表現を基礎データとして、その上の多項式に実現されたものと捉える視点である。これは、不変式論の基本設定として「表現」をデータとする考えと並行である。さらに、形式変数などを用いて、あからさまな不変元から乗法的に生成されたものの像として、中心元を構成する。さらに Capelli 恒等式自体の証明については、一種の (行列版での) 乗法性から証明されることになる。ただ、常に問題となるのは、交換関係の複雑さをどう処理するかであ

る。簡単な交換関係をもつ環を利用して、より複雑なものを扱うという点でも古典的な記号的方法を引き継ぐ思想である。しかし、複雑さを完全に克服する明快さには至っていない。この点が技術的な工夫を要するところである。

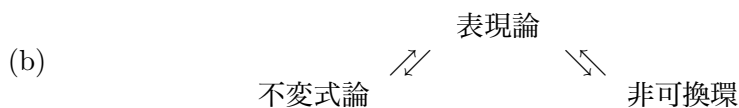
[3] (特殊函数)： 交換関係から生じる補正は、Capelli の場合 ρ -shift のように見えるが、本当にそうなのか。Okounkov の高階 Capelli では対応する Young 図形の contents が補正の由来である。また、Howe-Umeda の Appendix にある anisotropic 実現の直交 Lie 環 (対応する対称行列が単位行列) の場合、対角補正は、少なくとも直交 Lie 環の ρ -shift ではない。この補正は交換関係に由来し、生成元の配列にも依存する。量子群の R -行列による定式化等が、これに関して光を投げかければ有り難いが、最終的な簡明化には至っていない。Itoh-Umeda で扱った直交 Lie 環の扱いでは、殆ど「非可換 dual pair」と思わせる $\mathfrak{sl}(2)$ が登場する。古典的な超幾何多項式や、伊藤氏の提案する「二項型」多項式などとの深い関係が示唆される。これについてはあとで具体例で説明する。

11: 非可換不変式論の循環的構図

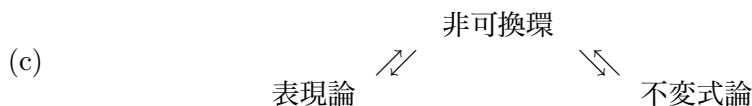
上のような問題設定と、さらに理想としての解決方法 (もちろん現時点では遙かに及ばないものだが) を、「絵に描いた餅」として「体系化もどき」の額縁に入れる。古典的不変式論の上部構造・下部構造の図式に「非可換」という潤滑油を注入することで循環的 (或いは巡回的) な入れ替えが起こるようにする：即ち



に加えて



と



を追加するのである。

最初の構図 (a) は、古典的不変式論と同じだから説明は要らないだろう。ちょっと注意すると、敢えて非可換環「論」と書かなかったのは、非可換環の一般論

を援用する訳ではないからである。但し、将来的に「論」が必要になるかどうかは判らない。

第二の構図 (b) は、恰度、Weyl 或いは Howe の dual pair に見られるように、不変式を利用して、表現を理解するというものである。非可換環の役割は、例えば交換関係の複雑なものを、より簡単なものを利用して扱う等の技術的な側面を考慮してのことである。不変式環を、環を取り替えることで「読み替える」という部分である。当面出てくる非可換環の階層は単純化して言えば

(2)	普遍包絡環	
(1)	Weyl 代数	Clifford 代数
(0)	対称代数	外積代数

であって、或る場合には実体的、或る場合には形式的なものとして用いられる。

ついでに、この (b) に関係して「記号的方法」を、図式的に説明しておこう。例えば $U(\mathfrak{g})$ の中心元を構成するのに、 $\mathcal{F}$ を G の基本的な作用 (ベクトル作用由来) をもつ形式変数の環をとり、係数拡大 $\mathcal{F} \otimes U(\mathfrak{g})$ を作る。ここには G が環自己同型群として働くことになるが、その乗法構造を利用するのである。係数拡大の環の中では不変式が作りやすい。それはまず、古典的不変式論の「基本形式」(ground form) という「不変式」または「共変式」があからさまに見える、つまり、互いに双対的な基本表現があるので、そこから直ちに不変式が得られるからである。さらにそれを用いて、乗法的に不変式を作る。係数拡大した $\mathcal{F} \otimes U(\mathfrak{g})$ から $U(\mathfrak{g})$ の不変元に移るには、 $\mathcal{F}$ の G 不変な線型形式 $\lambda \in \mathcal{F}^*G$ を通じてできる線型写像

$$\lambda \otimes 1 : \mathcal{F} \otimes U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g})$$

を用いればよい。よって

$$\lambda \otimes 1 : (\mathcal{F} \otimes U(\mathfrak{g}))^G \longrightarrow U(\mathfrak{g})^G$$

を得る。左辺にある、基本形式から得られる不変式を右にうつして中心元を構成する、という訳である。ここで、本来の Capelli のように行列式ならば、形式変数の環は外積代数であり、パーマネントを扱うならば対称代数が使われる。さらに高階の Capelli に関係して immanant を扱う形式変数が望まれていたが、最近、伊藤稔氏がテンソル代数と無限対称群を組み合わせた環を開発し、この「記号的方法」の適用範囲が飛躍的に広がった (昨年の表現論シンポジウム講演)。

最後の (c) は、十分な明快さを得ていないが、「交換関係」を表現のテンソル積を通じて限定するという考えである。つまり、環同型として群が働く時には、その作用は、表現論的に制約を受けるということである。量子群の R 行列などとも関わるので、そこまで広げて考察の方が景色が見えやすくなるかもしれない。簡単な場合ならば、その「型」を数え尽くすことができるかもしれない。それを使って「交換関係」を制御できるだろうということである。しかし、この部分が最も未開発で、大きな技術的困難をはらむ所である。

IV 非可換不変式と超幾何多項式

12: 直交 Lie 環の場合 — 行列式とパフィアンと $\mathfrak{sl}(2)$ と

「表現論」と「特殊函数論」の関係は、表現の具体的構成がはじまった Gelfand や Bargmann のユニタリ表現論の最初期 (1947 年頃) の研究に既に見られるように、 $SL(2)$ の既約表現の行列要素として超幾何函数が現われるのが一つの典型である。この機構がどれくらい明瞭に判るのかよく知らないが、つねに興味深い関係であることは確かである。ここではそれが、上の「非可換版不変式論」の中にも自然な形で現われることを例を通じて指摘したい。

パフィアンはいろいろな場面に登場するが、古典的に有名な事実は、交代行列の行列式がパフィアンの自乗となることである。この非可換版は、直交 Lie 環 $\mathfrak{o}(2m)$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(2m))$ の中心元の関係としてでてくる。これははじめ (Sp, O) duality に関する Capelli 恒等式との関係で浮かび上がった (落合 吾一修士論文 1996)¹ が、独立した存在を主張できる問題でもある²。背景には、まず Howe-Umeda の 1991 年の論文の附録に述べられた、直交 Lie 環の普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(n))$ の行列式型の中心元が存在がある (今年が発見 20 周年!)。古典的な Capelli 元と同様の形のものである。但し、直交 Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ は交代行列全体として実現されている。ここで、中心の問題は非可換性が絡むので実現の仕方に大きく影響を受けることは注意しないといけない³。それと、一方で、交代行列に実現した直交 Lie 環の生成系から作るパフィアンも中心に属することが判るので、その二つの関係が可換の場合と同様な関係にあるかどうか問題になる。Howe-Umeda の行列式型の中心元は、一つは split 実現ではないし、ま

¹ 恰度、その準備としていろいろな計算をしていたのが、前回の沖縄での表現論シンポジウム (1995) の頃だった。

² dual pair に関する具体的な Capelli 恒等式は難しいものであるが、のちに伊藤稔氏 (Math. Z. **246** (2004); Adv. Math. **194** (2005)) によって得られた。これは大きな突破口であった。

³ Cartan 部分環が対角になる split 実現での行列式型の中心元は、和地輝仁氏によって発見された (Lett. Math. Phys. **77** (2006))。この結果は「専門家」には意外に思われるほどの驚きであった。「一般の」表現論研究者には、逆に「驚き」が意外に思われるだろうが、交換関係の困難がそこに現われているのである。

た multiplicity-free action にも登場しないので、それまで孤立したものの感があったが、これをきっかけに研究が進んだのである。

以下、 $n = 2m$ とする。正確にこの関係式を書いてみる。Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ の標準的生成元として $A_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ をとり、 $\mathbb{A} = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ と置く。このとき次が成り立つ (Itoh-Umeda, Compositio Math. **127** (2001)) :

$$\begin{aligned} \text{Pf}(\mathbb{A})^2 &= \det(\mathbb{A} + \text{diag}(m-1, m-2, \dots, -m)) \\ &= \det(\mathbb{A} + \text{diag}(m, m-1, \dots, -m+1)). \end{aligned}$$

この関係を調べるのに、Capelli 恒等式の証明と同様に、外積代数を利用する。但し形式変数の数を倍に増やして、 $e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n$ で生成された Λ_{2n} を考える。ここで $\Lambda_{2n} \otimes U(\mathfrak{o}(n))$ に属する三つの元を

$$\Theta = \sum_{1 \leq i, j \leq n} e_i e_j A_{ij}, \quad \Theta' = \sum_{1 \leq i, j \leq n} e'_i e'_j A_{ij}, \quad \Xi = \sum_{1 \leq i, j \leq n} e_i e'_j A_{ij}$$

と定める。簡単な計算から、この Θ や Θ' の m 乗 (の係数) がパフィアンを与え、 Ξ の $2m$ 乗が行列式を与えることが判る。非可換行列式には対角シフトが要るので、対応して $\tau = \sum_{i=1}^n e_i e'_i$ という元を使って階乗幂を作ることになる。この τ は幂零ではあるが、すべての元と可換なのでスカラーのように思っている。上の関係式は外積代数を用いた母関数レベルでは

$$\frac{(-)^m}{2^{2m}(m!)^2} \Theta^m \Theta'^m = \frac{1}{n!} (\Xi + (m-1)\tau)(\Xi + (m-2)\tau) \cdots (\Xi - m\tau)$$

となる。問題なのは、これら三元の交換関係であるが、調べてみると

$$[\Theta, \Theta'] = 4\tau\Xi, \quad [\Theta, \Xi] = 2\tau\Theta, \quad [\Theta', \Xi] = -2\tau\Theta'$$

となる。係数に τ が入るが、本質的に $\mathfrak{sl}(2)$ である。またもや $\mathfrak{sl}(2)$ か！ 現象は dual pair と似ている。非可換版 dual pair と言いたいが、状況はちよつと異なる。ただ先に説明した記号的方法 (11 節 (B)) という不変式論的背景はある。つまり $\Lambda_{2n} \otimes U(\mathfrak{o}(n))$ の中で自然な三つの基本 $O(n)$ 不変元が $\mathfrak{sl}(2)$ をなし、それらがパフィアンと行列式という非可換特殊多項式を支配しているという構図なのである。

13: $\mathfrak{sl}(2)$ の三項定理と超幾何型多項式

このように、作用素の交換団の決定という意味では dual pair ではないが、問題の $U(\mathfrak{o}(n))$ の等式の本質的部分が、不変式レベルでの dual な対象であ

る $U(\mathfrak{sl}(2))$ での計算に帰着されるのである。技術的な詳細はここでは省略するが、証明の鍵を實際握っているのは $\mathfrak{sl}(2)$ の冪零元に関する三項定理 (trinomial identity) になる。それを書いてみよう。まず $X, Y, H \in \mathfrak{sl}(2)$ を

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H$$

となる標準的な三つ組み ($\mathfrak{sl}(2)$ -triplet) とする。係数 τ の分を除けば、対応は

$$X \leftrightarrow -\Theta'/2, \quad Y \leftrightarrow \Theta/2, \quad H \leftrightarrow \Xi$$

である。普遍包絡環 $U(\mathfrak{sl}(2))$ の中で次の等式が成り立つ：

$$(-\lambda^2 X + \lambda \mu H + \mu^2 Y)^k = \sum_{p+q+r=k} \frac{k!}{p!q!r!} \lambda^{2p+r} \mu^{2q+r} Y^p (-X)^q H^{(r)}(q-p).$$

ここに $H^{(r)}(u) = (H+u)(H+u-1)\cdots(H+u-r+1)$ である。

注意したいのは、左辺の中味は $\mathfrak{sl}(2)$ の元として冪零ということである。三項定理はその限定の下である。半単純元になると公式がずっと複雑になり、きれいに書くには違う工夫を要する (後述)。見方をより「母函数的」に転換して、指数函数の上にのせ、形式的な群の上での Gauss 分解にすると一般元でも見易い形になる。その中に自然に「超幾何型」の多項式や「二項型多項式」と呼ばれるものが登場する。つまり、例えば、超幾何函数が $SL(2)$ の部分群への分解に即して表現の行列要素に現われるのと、本質を同じくする現象が出現する。あとで具体的な式がでるので誤解はないと思うが、「超幾何型」と言っても、普遍包絡環の元が入るのは、パラメータの箇所で、従ってその部分は階乗で書ける。ついでに言うと、非可換化に際し出現する「階乗」は差分とも相性がよい。単なる偶然ではないのは判っているが、さらに深い理解が望まれる。以下の計算も、それが Capelli 型恒等式とその周辺に対し、深い理解への手掛かりになるのではないかと期待から始めたのである。

上の三項定理はパフィアンと行列式の関係を導くだけでなく、パフィアンの和公式 (の非可換版) の証明にも応用される (橋本隆司氏 2005；論文は J. Lie Theory **18** (2008)). また、おそらく、それらと違った使い道もあると期待される。「二項型多項式」は簡単に言うと、多項式の列 $f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で「二項定理」

$$f_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k(x) f_{n-k}(y)$$

を満たすものである (G.C. Rota により系統的に研究が始められた)。

さてまず $\mathfrak{sl}(2)$ を形式的に指数化して「群」($SL(2)$ の普遍被覆のようなもの)に持ち上げ、その中での「Gauss 分解」に相当する公式を呈示する。これは指数レベルでの Poincaré-Birkhoff-Witt 分解と言ってもよい。上の記号の下 $V = aX + bY + cH$ と置き、 $e^{tV} = \exp(tV)$ を $e^{\Psi_X(t)X} e^{\Psi_H(t)H} e^{\Psi_Y(t)Y}$ の形に分解しようというのである。但し、等式は形式変数 t に関する形式的冪級数として捉える。また、 $\Psi_X(t), \Psi_H(t), \Psi_Y(t)$ には当然係数 a, b, c も含まれている。

はじめに $V = aX + bY + cH$ が冪零、つまり $ab + c^2 = 0$ とする。このとき上に述べた三項定理から (上のものを少し変形する)

$$(aX + bY + cH)^n = \sum_{p+q+r=n} \frac{n!}{p!q!r!} a^p b^q c^r X^p (H + p + q)_r Y^q$$

となる。但し $(s)_r = s(s+1)\cdots(s+r-1)$ は上昇階乗冪を表わす。これより

$$e^{tV} = e^{\frac{t}{1-ct}aX} (1-ct)^{-H} e^{\frac{t}{1-ct}bY}$$

がすぐに導ける。一般の場合は $\delta = \sqrt{ab + c^2}$ と置いて

$$e^{tV} = e^{\frac{v}{u-cv}aX} (u-cv)^{-H} e^{\frac{v}{u-cv}bY}$$

が成り立つ。但し

$$u = u_\delta(t) = \cosh(t\delta), \quad v = v_\delta(t) = \frac{\sinh(t\delta)}{\delta}.$$

ここで u や v には δ が入っており、 $\pm$ の不定性があるが、代入するのが偶函数なので、問題は生じない。また、下の一般の公式で $\delta \rightarrow 0$ とすると $u \rightarrow 1$, $v \rightarrow t$ となるので冪零の場合が再現される。一般の場合は冪零の場合を用いれば導ける。というのは冪零元に対する三項定理から e^{sX} と e^{tY} の交換関係

$$e^{tY} e^{sX} = e^{\frac{s}{1+st}X} (1+st)^{-H} e^{\frac{t}{1+st}Y}$$

が出るからである。但し、 s, t は形式変数とする。また、別の証明も幾つか可能である。その一つは微分方程式経由のもので、(数理研講究録 **1508**『Capelli 恒等式の新局面』に所収の落合啓之氏の論文で実行されている。一つ注意すべきこととして、「地上」にいる $SL(2)$ での Gauss 分解

$$\begin{aligned} \exp\left(t \begin{bmatrix} c & a \\ b & -c \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} u + cv & av \\ bv & u - cv \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{av}{u-cv} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - cv & 0 \\ 0 & \frac{1}{u-cv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{bv}{u-cv} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

は「天上」の影となので、そこから分解の大きな情報が読みとれることである。ここで u, v は上に出てきた双曲線函数。こちらは、単なる行列の計算だから、手軽で手間はかからず、結果の予測に大いに役立つ。但し、筆者としては、冪級数だけを扱っての直接証明に少なからぬ意義を感じ、それに拘泥わる。また、その限定の下でも何通りか方法がある。

一般の場合でも、このような群レベルでの分解が得られれば、それから、冪零とは限らない元に対しても、「三項定理」が得られる筈である。ともかく原理的には展開するだけだから直ちにできて不思議はない。ところが、きれいな形に整理しようとする、信じがたいことに存外難しい。しかし、気づいてみれば、結果として可能であって、それをまとめ、表示する過程で、「超幾何型多項式」や「二項型多項式」に遭遇するのも面白い。超幾何型の函数は遍在して (ubiquitous) 馴染みやすいものと認識できる。

考え方の第一歩は、一般元の三項展開で、単なる冪函数に限定せず V の多項式として別のものをとれば、それに応じて H の部分の多項式が変わる (本質的に難しいのはその部分である) と言うことだ。公式をきれいに書くのに、用いる多項式の系列をうまく選べばよいが、その可能性はいくつかある。例えば、上のものを少し変形すると、 w をパラメータ (形式変数) として

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + (c + \delta)w}{1 + (c - \delta)w} \right)^{\frac{Y}{2\delta}} &= e^{aXw} ((1 + (c + \delta)w)(1 + (c - \delta)w))^{\frac{H}{2}} e^{bYw} \\ &= e^{aXw} (1 + 2cw - abw^2)^{\frac{H}{2}} e^{bYw} \end{aligned}$$

が得られる。これから V を或る多項式 (超幾何型かつ二項型になる) に代入した元の Poincaré-Birkhoff-Witt 分解に於いて、対応する H の部分が別の超幾何型かつ二項型多項式で表示されるということが見て取れる。例えば実際、

$$\left(\frac{1 + pw}{1 + qw} \right)^Z$$

の展開で w^n の係数は

$$p^n \binom{Z}{n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} Z, -n \\ Z - n + 1 \end{matrix}; p^{-1}q \right)$$

と書けるし、

$$(1 - \lambda w + \mu w^2)^{-Z}$$

では w^n の係数は

$$(-\lambda)^n \binom{-Z}{n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2} \\ -Z - n + 1 \end{matrix}; 2^2 \lambda^{-2} \mu \right)$$

と書けるからである．ここで ${}_2F_1$ はもちろん Gauss の超幾何級数で

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n$$

と定義される．但し $(s)_n = \Gamma(s+n)/\Gamma(s) = s(s+1)\cdots(s+n-1)$ ．上の二つは級数が有限で切れる (α または β が負の整数) ので多項式となるが、 Z の多項式列としては「二項型」でもある (これは「母函数」が w の函数の Z 乗という形をしていることから判る)．ここに述べた事実は級数表示から計算で示すことができるが、より直観的には、積分表示

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; x \right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tx)^{-\alpha} dt$$

で特殊なパラメータの関係 $\gamma = \beta - \alpha + 1$ や $\gamma = \beta + \alpha + 1$ などをもつとき、これを Cauchy の積分公式のように看做して、一次分数式や二次式の冪の展開係数の表示だと思えば納得しやすい．このような表示から得られた式が「超幾何」だと判れば安心でき、逆に「超幾何」が現われる理由を知ることにもなる．

また、 V の方をその固有値に応じた階乗冪にすると、普通の冪に近い形にできる．その場合 H の表示に現われるものもまた別の超幾何型かつ二項型の多項式となる．具体的に式を書こう．まず「群」レベルの公式だが、 z をパラメータとして

$$(1-z)^{-\frac{V}{2\delta}} = e^{\frac{z}{1-Jz} \frac{aX}{2\delta}} (1-Jz)^{-H} (1-z)^{\frac{H}{2}} e^{\frac{z}{1-Jz} \frac{bY}{2\delta}}$$

が成立する．但し $J = (c+\delta)/2\delta$ である．先ほどと同様 (公式が重複したが、ご容赦願いたい)

$$(1-pz)^{-A} (1-qz)^{-B}$$

の z^n の係数が

$$p^n \frac{(A)_n}{n!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, -B \\ -A-n+1 \end{matrix} ; p^{-1}q \right)$$

となることを用いて展開すれば、次の「一般元に対する三項定理」

$$V(V+2\delta)\cdots(V+2\delta(n-1)) = \sum_{p+q+r=n} \frac{n!}{p!q!r!} (aX)^p \left(-\frac{H}{2} \right)_r (2\delta)^r {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -r, -H-p-q \\ -\frac{H}{2}-r+1 \end{matrix} ; \frac{c+\delta}{2\delta} \right) (bY)^q$$

が得られる．ここで $V = aX + bY + cH$ である．もちろん、上の公式で $\delta \rightarrow 0$ の極限は、冪零元に対する三項定理を復元する．階乗冪から普通の冪にするに

は Stirling 数を掛けて線型結合を作ればよいが、それで何かが判りやすくなるかどうか知らない。もちろん c に関しては恰好がよくなるだろうが⁴。

これより見易い公式もあるのかも知れない。少なくとも、本質的には同じ (「群」レベルでの分解で、展開する変数を取り替える) 公式でも、展開した見かけが異なるものはある。何を決定版と思うか、或いは、表現方法の多様性に意味があるのか等について、まだ明確に捉え得ていない。幾つかの公式を、更に明示的に並べてみて、比較検討する必要もあるだろう。

「群」レベルの公式で、函数を選ぶ方針について説明していないが、adjoint 表現の固有値に応じて選んでいるということだけ付け加えておこう。同時にその基準は Lie 環 (普遍包絡環) レベルでは「二項型多項式」を選ぶことに繋がっている。背景には一応、群論的・表現論的指針がある訳だ。これについては、Itoh-Umeda で扱ったより、やや直接的な系統的計算方法が判っている。他の、より易しい Heisenberg 型の交換関係だと、殆ど手間がいらない程である。

最初に戻って「群」レベルの公式から、直接に展開しつつ

$$e^{tV} = \sum_{p,q,r} \frac{a^p b^q c^r}{p!q!r!} X^p \left(\frac{\tanh(t\delta)}{\delta} \right)^{p+q+r} (\cosh(t\delta))^{-H} (H+p+q)_r Y^q$$

と途中下車した式は、形は冪零元の場合に近い。冪零元への極限 $\delta \rightarrow 0$ を見るには判りやすい式である。この展開を完成するには大雑把に言って積分表示で

$$\oint \left(\frac{\tanh(t\delta)}{\delta} \right)^{p+q+r} (\cosh(t\delta))^{-H} t^{-1-n} dt$$

と定義されるものを扱えばよい。これは超幾何型の積分に似て、親戚筋であるが、これについては、よく考えていない。「超幾何型」でない「二項型」多項式とも関係するところなので、興味がある対象だろうと思う。

14: 補足的注意

ここに現われた多項式の由来を考えると、非可換な対象から生じたものではあるが、一種の行列要素と看做せる。そして、恰度、球函数が現われるのと同じ仕組みで、超幾何型の多項式が出現した。その一方、それは Capelli 恒等式に於いて、可換な世界での表現行列に非可換な元 (普遍包絡環の元や微分作用素) を代入して乗法性に近いものが見えたのとも類似している。非可換なパフィアンと行列式の関係を導き出すのに、何故そのようなものが現われたかというところ、実は背後に表現の同値を与える intertwining operator が潜んでいる。今の場合

⁴この三項定理については、対称代数を形式変数にする「別の」見方で、計算ができる。これは、以前、伊藤氏が注意してくれた。実は Itoh-Umeda の証明と同じことだが、背景が明確になる。

には spin 表現とその反傾表現のテンソル積が、外積代数版の正則表現と同値になるというのが表現論的背景である。しかしまた、可換から非可換への移行は、大抵の場合、直接的な途をとれず、迂回の工夫が必要なのである。詳しいことをここに書く余裕はないが、交換関係の複雑さを克服する技術が常に要となるのである。例として次の (イ)、(ロ) の二点のような補足的注意を述べる。

(イ) パフィアンの自乗が行列式になるという関係は、可換変数の場合、線型代数の教科書にあるように、「標準型」を経由するのが普通である。非可換で、それを行なうのは、(そうでないという説も最近耳にしたが) 非有理的演算 (平方根をとるなど) を合理的に定式化する難しさの故、賢明ではないように思える。しかし、実は表現を用いると、そのような非可換な世界でも望むべき交換関係が設定できる。これは、少なくとも見かけ上違う証明である。本質はもちろん共有しているのであるが。

(ロ) パフィアンと行列式の関係について、実は Itoh-Umeda では三項定理から最後の結論を出すところで、意味のよく判らない計算を経ている。今では、先に述べた「群化」した形の Gauss 分解を使うと、この欠陥を補うことができる。

この断片的な注意 (イ)、(ロ) を敢えて述べたのは、本稿で提唱したプログラムは、「或る程度」よく判った部分についてすら、まだまだ体系化の余地を残しているという指摘のためである。ここに言及しなかった話題も少なくないし、実際、補足にはキリがない。

結語：

本稿は概説ではあるが、「非可換不変式論」として、歯切れよく定式化したり、明快な哲学をもった定理を示したりするなどの完結性には程遠い。ただ、Capelli 問題、或いは Capelli game が、非可換での特殊多項式を自然に喚び出し、一見関係のなさそうなものをつなぐ例を述べることで、研究の目指す方向を示唆したのである。

非可換世界の具体例は、簡単な公式であっても、可換な世界に影のように付き添って、我々の前に現われる。それらは逆に可換な世界に影を落としているが、我々には余り見えていない。その存在は Capelli 恒等式を通じてようやく次第に明らかになってきたところである。このような仕組みを少しでも解明できれば、見える世界も広がってくる。研究が深化し、いつかまた、これらについてさらに詳しく話すことができる機会がくることを願っている。