

ブラウアーシューア函数

青影 一哉 (岡山大)

(水川 裕司, 山田 裕史との共同研究)

1 イントロダクション

無限変数対称函数環の中に新しいクラスの対称函数を導入する. 対称群の通常表現は, シューア函数を考察することによりその諸性質を知ることができる. しかし, 対称群のモジュラー表現は対称函数との関連性が未だに知られていない. モジュラー表現の対称函数環への対応物としてブラウアーシューア函数を導入する. この函数は, シューア函数のフロベニウス表示における対称群の通常既約指標を既約ブラウアー指標に取り替えたものとして定義される. まだ実験的な段階で表現論との関連性は分かっていないが, 対称函数として興味深い性質を持っている様に思われる. そこでこの対称函数を考察しその諸性質を調べることを目的とする. また, ブラウアーシューア函数とシューア函数との積からなる混合基底を構成し, 自然なシューア基底との変換行列を決定する. このとき, この行列式が数え上げの性質を持つことをみる [1].

V を無限変数対称多項式環:

$$V = \mathbb{Q}[t_j; j \geq 1] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n,$$

とする. ここで V_n は $\deg t_j = j$ とする時, n 次の斉次多項式全体のなす環を表す. V の基底としてシューア函数がとれる. この函数は $GL(n, \mathbb{C})$ の多項式表現の既約指標として知られている. シューア函数を佐藤変数 $t = (t_1, t_2, \dots)$ を用いて定義する. n の分割 $\lambda \in P(n)$ に対して

$$S_{\lambda}(t) = \sum_{\rho=(1^{m_1}2^{m_2}\dots) \in P(n)} \chi_{\rho}^{\lambda} \frac{t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots}{m_1! m_2! \dots} \in V_n.$$

ここで χ_{ρ}^{λ} は対称群 S_n の共役類 ρ での既約指標 χ^{λ} の値. 佐藤変数 t_j を

$$t_j = \frac{1}{j}(x_1^j + x_2^j + \dots)$$

と置くことによりオリジナルのシューア函数を復元することができる. また V に内積

$$\langle F, G \rangle = F(\partial)G(t)|_{t=0}, \quad \partial = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t_3}, \dots \right),$$

を入れることによりシューア関数は正規直交基底となる. V に別の基底 (混合基底) を構成する. p を素数とし $V^{(p)} := \mathbb{Q}[t_j; j \geq 1, j \not\equiv 0 \pmod{p}]$, $V_{(p)} := \mathbb{Q}[t_{pj}; j \geq 1]$ とおく. この時, $V = V^{(p)} \otimes V_{(p)}$ とかける. $p = 2$ に対して, V の基底がアフィンリー環 $A_1^{(1)}$ の基本表現からシューアの Q 関数とシューア関数の積の形で自然に構成できることが知られている [2], [9]:

$$\{Q_{\lambda^{r(2)}}(t)S_{\lambda^{d(2)}}(t_{(2)}); \lambda \in P\}.$$

私たちはこの基底を自然な形で一般化したい. p が 2 以外のとき, シューアの Q 関数に対応する新たな関数が必要になる. そこでブラウアーシューア関数 $B_\lambda^{(p)}$ を導入する. シューアの Q 関数とブラウアーシューア関数 $B_\lambda^{(2)}$ は非常に似ている. これに関しては [2] を参照のこと.

2 ブラウアーシューア関数

S_n のモジュラー表現から導入される新しいクラスの対称関数を定義する. p を素数とする. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ が p -レギュラーとは各成分の重複度が p よりも小さいことをいい, p -クラスレギュラーとは各成分が p の倍数とはならないものをいう. また, n の p -レギュラー全体の集合を $P^p(n)$, p -クラスレギュラー全体の集合を $P_p(n)$ で表す. 例えば, 2-レギュラーはストリクトな分割, 2-クラスレギュラーは奇分割を表す. また, $p = 3$, $n = 4$ の時 $P^3(4) = \{4, 31, 2^2, 21^2\}$, $P_3(4) = \{4, 1^4, 2^2, 21^2\}$ となる. $P^p(n)$ と $P_p(n)$ の間には一対一の対応がある. この対応はグレイシャー写像として知られている. グレイシャー写像を $\gamma : P^p(n) \rightarrow P_p(n)$, $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ で書くことにし, 次で定義する. $\lambda \in P^p(n)$ に対して, p の倍数パート k_p を p 個の k の並び $(k, \dots, k)$ とする. 各パートが p で割り切れなくなるまで同じ操作を続ける. 例えば, $\lambda = (6^2 5^2 4 3 1) \in P^{(3)}(30)$ の時, $\lambda = (6^2 5^2 4 3 1) \mapsto (2^3 2^3 5^2 4 1^3 1) = (5^2 4 2^6 1^4) = \tilde{\lambda}$.

$\lambda \in P^p(n)$ に対してブラウアーシューア関数 $B_\lambda^{(p)}(t)$ を以下で定義する.

$$B_\lambda^{(p)}(t) = \sum_{\rho \in P_p(n)} \varphi_\rho^\lambda \frac{t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots}{m_1! m_2! \dots} \in V_n,$$

ここで φ_ρ^λ は S_n の共役類 ρ での既約ブラウアー指標 φ^λ の値を表す. この関数はベクトル空間 $V_n^{(p)} = V^{(p)} \cap V_n$ の基底となることが分かる. シューア関数を調べることにより対称群の通常表現の諸性質が分かるのと同じようにこの関数はモジュラー表現の性質を知るための可能性を持つ. 以後ブラウアーシューア関数の持つ諸性質について述べる.

対称群 S_n の通常表現とモジュラー表現は分解定数により結びつく. これは, 被約シュペヒト加群の組成列に現れる既約な加群の重複度として定義されるが指標の言葉で言うと

$$X_n = D_n \Psi_n,$$

が成り立つ. ここで D_n は分解定数のなす行列 $(d_{\lambda\mu})_{\lambda \in P(n), \mu \in P^p(n)}$ を表し, 通常指標, ブラウアー指標からなる行列をそれぞれ $X_n := (\chi_{\lambda\mu})_{\lambda \in P(n), \mu \in P_p(n)}$, $\Psi_n := (\varphi_{\lambda\mu})_{\lambda \in P^p(n), \mu \in P_p(n)}$

とおく. S_n の分解行列は次の性質をもつ [8]:

$$\bullet d_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \bullet \lambda^p \neq \mu^p \Rightarrow d_{\lambda\mu} = 0, \bullet \mu \geq \lambda \text{でない} \Rightarrow d_{\lambda\mu} = 0, \bullet d_{\lambda\lambda} = 1.$$

ここで λ^p は λ の p コア, “ $\geq$ ” はドミナンス順序を表す. p 被約シューア函数 $S_\lambda^{(p)}(t)$ を用いることにより上の関係式を対称函数の言葉で言い換えることができる. 被約シューア函数 $S_\lambda^{(p)}(t)$ をシューア函数 $S_\lambda(t)$ に対して, t の添字が p の倍数となるものを形式的に 0 とすることで定義する:

$$S_\lambda^{(p)}(t) = S_\lambda(t)|_{t_{jp}=0}.$$

定義により

$$S_\lambda^{(p)}(t) = \sum_{\mu \in P^p(n)} d_{\lambda\mu} B_\mu^{(p)}(t),$$

とかける.

シューア函数は, V_n に入れた内積 $\langle, \rangle$ で正規直交していた. しかしブラウアーシューア函数は一般にこの内積に関して直交しない. そこでこの内積で直交する相方の函数が必要となる. その函数は次のような函数として決まる. $\lambda \in P^p(n)$ に対して函数 $\widetilde{B}_\lambda^{(p)}(t)$ を次で定義する:

$$\widetilde{B}_\lambda^{(p)}(t) = \sum_{\rho \in P_p(n)} \widetilde{\varphi}_\rho^\lambda \frac{t_1^{m_1} t_2^{m_2} \cdots}{m_1! m_2! \cdots} \in V_n,$$

ここで $\widetilde{\varphi}_\rho^\lambda$ は, 行列

$$\widetilde{\Psi}_n := {}^t D_n D_n \Psi_n,$$

の成分とする. この時ブラウアー指標の直交性は

$$\langle B_\lambda^{(p)}(t), \widetilde{B}_\mu^{(p)}(t) \rangle = \langle \widetilde{B}_\lambda^{(p)}(t), B_\mu^{(p)}(t) \rangle = \delta_{\lambda\mu},$$

を意味する.

これらの函数は, ソリトン理論に現れる佐藤変数 $t = (t_1, t_2, \dots)$ を用いて記述しているが議論するにあたっては扱いづらいことがある. そこで“オリジナル”の変数 $x = (x_1, x_2, \dots)$ に直して議論する. ブラウアー指標の直交性によりコーシー恒等式を得る.

命題 2.1.

$$\sum_{\lambda \in P^p} B_\lambda^{(p)}(px) \widetilde{B}_\lambda^{(p)}(y) = \prod_{i,j} \frac{1 - x_i^p y_j^p}{(1 - x_i y_j)^p},$$

ここで $px := (\underbrace{x_1, \dots, x_1}_p, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_p, \dots)$.

3 モノミアル展開

シューア函数のモノミアル対称函数による展開係数はコストカ数として知られている。では、ブラウアーシューア函数に対してはどのような係数が得られるのかという自然な疑問がわく。

$$B_{\lambda}^{(p)}(px) = \sum_{\mu \in P(n)} \kappa_{\lambda\mu} m_{\mu},$$

とかいた時の係数 $\kappa_{\lambda\mu}$ はどのような数なのだろうか？ 私たちの予想はこの係数が整数であって $p^{\ell(\mu)}$ で割り切れるというものである。この現象はシューアの Q 函数に対してもみられ、モノミアル展開係数は2の冪で割れることが知られている。しかも組合せ論的記述もある。少し表を載せておく。ここで $K_n^{(p)} := (\kappa_{\lambda\mu})_{\lambda \in P^p(n), \mu \in P(n)}$ とおく。

$$K_3^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (3) & (21) & (1^3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (3) \\ (21) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 16 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$K_4^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (4) & (31) & (2^2) & (21^2) & (1^4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (4) \\ (31) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$K_5^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (5) & (41) & (32) & (31^2) & (2^21) & (21^3) & (1^5) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (5) \\ (41) \\ (32) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 8 & 8 & 16 & 32 \\ 2 & 8 & 12 & 24 & 32 & 64 & 128 \\ -2 & 0 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$K_3^{(3)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (3) & (21) & (1^3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (3) \\ (21) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 0 & 9 & 27 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$K_4^{(3)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (4) & (31) & (2^2) & (21^2) & (1^4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (4) \\ (31) \\ (22) \\ (211) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 12 & 27 & 36 & 54 & 81 \\ 15 & 54 & 72 & 135 & 243 \\ -3 & 0 & 9 & 27 & 81 \\ 3 & 27 & 45 & 108 & 243 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

一般の分割に対する答えは持っていないが $\lambda = (n)$ のときの係数はコーシー恒等式より決定できる。

命題 3.1. a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次の母関数で定義する:

$$\frac{1 - q^p}{(1 - q)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n.$$

このとき $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l) \in P(n)$ に対して

$$\kappa_{(n)\mu} = a_{\mu_1} a_{\mu_2} \cdots a_{\mu_l}.$$

特に $\kappa_{(n)\mu}$ は $p^{\ell(\mu)}$ で割り切れる.

4 混合基底

分割の間の全単射を構成する. これらの全単射は任意の自然数 p で定義できるが, ここでは素数として考える. 最初の全単射

$$\psi^{(p)} : P(n) \longrightarrow \bigcup_{n_1 + pn_2 = n} P(n_1) \times P(n_2), \quad \lambda \longmapsto (\lambda^{r(p)}, \lambda^{d(p)}),$$

をパートの重複度 $m_i(\lambda^{r(p)})$, $m_i(\lambda^{d(p)})$, $i \geq 1$ で定義する:

$$\begin{aligned} m_i(\lambda^{r(p)}) &= k & \text{if } m_i(\lambda) \equiv k \pmod{p}, \\ m_i(\lambda^{d(p)}) &= \frac{m_i(\lambda) - k}{p} & \text{if } m_i(\lambda) \equiv k \pmod{p}. \end{aligned}$$

例えば, $p = 3$, $\lambda = (5^4 4^6 2^{11} 1^2)$ のとき $\lambda^{r(3)} = (5^2 2^1 1^2)$, $\lambda^{d(3)} = (5^4 2^3)$. この全単射を通して函数

$$B_{\lambda^{r(p)}}^{(p)}(t) S_{\lambda^{d(p)}}(t_{(p)}), \quad t_{(p)} = (t_p, t_{2p}, t_{3p}, \dots),$$

を定義することができる. この函数は一次独立なので V_n の基底をなす. 基底

$$\{B_{\lambda^{r(p)}}^{(p)}(t) S_{\lambda^{d(p)}}(t_{(p)}); \lambda \in P(n)\}$$

を V_n の p -混合基底とよぶ. 残念ながらこの基底に関しては, まだアフィンリー環との関係は分かっていない. しかし, これは Q 函数との混合基底の自然な拡張になっていて, いろいろな現象が素数 p で記述できる.

二つ目の全単射

$$\pi^{(p)} : P(n) \longrightarrow \bigcup_{n_1 + pn_2 = n} P_p(n_1) \times P(n_2), \quad \lambda \longmapsto (\lambda^{o(p)}, \lambda^{e(p)}),$$

を定義する. $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \dots)$ とする時, $\lambda^{o(p)}$ は λ から p の倍数パートを取り去ったもの, $\lambda^{e(p)}$ は $\lambda^{e(p)} := (1^{m_p} 2^{m_{2p}} 3^{m_{3p}} \dots)$ とする. 例えば, $p = 3$, $\lambda = (7^4 6^3 4^5 3^2 6^1 1^2)$ のとき, $\lambda^{o(p)} = (7^4 4^5 2^6 1^2)$, $\lambda^{e(p)} = (2^3 1)$.

グレイシャー写像と上の全単射を合成して, $P(n)$ の間の写像をつくる:

$$\Phi^{(p)} : P(n) \longrightarrow P(n), \quad \Phi^{(p)}(\lambda) := \pi^{(p)^{-1}}(\gamma \otimes id)(\psi^{(p)}(\lambda)).$$

$p = 3, n = 6$ のときの対応は以下の通りである.

$P(n)$	$\longrightarrow$	$P^p(n_1) \times P(n_2)$	$\longrightarrow$	$P_p(n_1) \times P(n_2)$	$\longrightarrow$	$P(n)$
6	$\longmapsto$	6, $\emptyset$	$\longmapsto$	$2^3, \emptyset$	$\longmapsto$	2^3
51	$\longmapsto$	51, $\emptyset$	$\longmapsto$	51, $\emptyset$	$\longmapsto$	51
42	$\longmapsto$	42, $\emptyset$	$\longmapsto$	42, $\emptyset$	$\longmapsto$	42
41^2	$\longmapsto$	$41^2, \emptyset$	$\longmapsto$	$41^2, \emptyset$	$\longmapsto$	41^2
3^2	$\longmapsto$	$3^2, \emptyset$	$\longmapsto$	$1^6, \emptyset$	$\longmapsto$	1^6
321	$\longmapsto$	321, $\emptyset$	$\longmapsto$	$21^4, \emptyset$	$\longmapsto$	21^4
2^21^2	$\longmapsto$	$2^21^2, \emptyset$	$\longmapsto$	$2^21^2, \emptyset$	$\longmapsto$	2^21^2
31^3	$\longmapsto$	3, 1	$\longmapsto$	$1^3, 1$	$\longmapsto$	31^3
21^4	$\longmapsto$	21, 1	$\longmapsto$	21, 1	$\longmapsto$	321
2^3	$\longmapsto$	$\emptyset, 2$	$\longmapsto$	$\emptyset, 2$	$\longmapsto$	6
1^6	$\longmapsto$	$\emptyset, 1^2$	$\longmapsto$	$\emptyset, 1^2$	$\longmapsto$	3^2

$n_1 + pn_2 = n$ を満たすペア (n_1, n_2) に対して, 集合 $\psi^{(p)^{-1}}(P^p(n_1) \times P(n_2))$ を “ (n_1, n_2) -block” と呼ぶ. 上の表をみると分割の長さの間の関係式に気づく.

命題 4.1.

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \sum_{\lambda \in P(n)} \ell(\lambda) = \sum_{\lambda \in P(n)} (\ell(\lambda^{r(p)}) + p\ell(\lambda^{d(p)})) = \sum_{\lambda \in P(n)} (\ell(\lambda^{o(p)}) + \ell(\lambda^{e(p)})) \\
& = \sum_{\lambda \in P(n)} (\ell(\widetilde{\lambda^{r(p)}}) + \ell(\lambda^{e(p)})), \\
(ii) \quad & \frac{\ell(\widetilde{\lambda^{r(p)}}) - \ell(\lambda^{r(p)})}{p-1} = \ell((\Phi^{(p)}(\lambda))^{d(p)}).
\end{aligned}$$

5 変換行列

2つの基底の間の変換行列を調べる. 行列 $A_n^{(p)} := (a_{\lambda\mu})_{\lambda, \mu \in P(n)}$ を

$$S_\lambda(t) = \sum_{\mu \in P(n)} a_{\lambda\mu} B_{\mu^{r(p)}}^{(p)}(t) S_{\mu^{d(p)}}(t_{(p)}), \quad \lambda \in P(n),$$

で定義する. この時, 変換行列 $A_n^{(p)}$ は整数行列であり, その行列式が組合せ論的表記をもつことをみる. オリジナル変数 x で考える:

$$S_\lambda(px) = \sum_{\mu \in P(n)} a_{\lambda\mu} B_{\mu^{r(p)}}^{(p)}(px) S_{\mu^{d(p)}}(x^p),$$

ここで $x^p := (x_1^p, x_2^p, \dots)$.

コーシー恒等式から次の命題が成立する.

命題 5.1.

$$\sum_{\lambda \in P} S_\lambda(px) S_\lambda(y) = \sum_{\lambda \in P} B_{\lambda^{r(p)}}^{(p)}(px) S_{\lambda^{d(p)}}(x^p) \widetilde{B_{\lambda^{r(p)}}^{(p)}}(y) S_{\lambda^{d(p)}}(y^p).$$

チェン-ガルシア-レンメルのプレシズムの公式 [4] を適応すると次の定理が得られる.

定理 5.2. 係数 $a_{\lambda\mu}$ は,

$$a_{\lambda\mu} = \langle \widetilde{B_{\lambda^{r(p)}}^{(p)}}(y) S_{\lambda^{d(p)}}(y^p), S_\mu(y) \rangle,$$

で与えられる. 特に $a_{\lambda\mu}$ は整数.

$p = 3, n = 5$ のときの行列 $A_n^{(p)}$ を与える. 列のラベルは $(\mu^{r(3)}, \mu^{d(3)})$ とする.

	$(5, \emptyset)$	$(2^2 1, \emptyset)$	$(41, \emptyset)$	$(32, \emptyset)$	$(31^2, \emptyset)$	$(2, 1)$	$(1^2, 1)$
(5)	1	0	0	0	0	1	0
(41)	0	0	1	0	0	0	1
(32)	0	0	1	1	0	0	-1
(31^2)	0	0	0	0	1	0	0
$(2^2 1)$	1	1	0	0	0	-1	0
(21^3)	0	1	0	0	0	1	0
(1^5)	0	0	0	1	0	0	1

シューア函数 $S_\lambda(x)$ と p ブラウアーシューア函数 $B_\lambda^{(p)}(x)$ を冪和対称函数 $p_\rho(x)$ で展開すると

$$S_\lambda(x) = \sum_{\rho \in P(n)} Y_{\lambda, \rho} p_\rho(x), \quad B_\lambda^{(p)}(x) = \sum_{\rho \in P_p(n)} B_{\lambda, \rho}^{(p)} p_\rho(x),$$

となる. ここで,

$$Y_n := (Y_{\lambda, \rho})_{\lambda, \rho \in P(n)}, \quad B_n^{(p)} := (B_{\lambda, \rho}^{(p)})_{\lambda \in P^p(n), \rho \in P_p(n)},$$

とおく. 明らかに, 次の関係式

$$B_n^{(p)} = \Psi_n Z_n^{-1},$$

$Z_n := \text{diag}(z_\rho; \rho \in P_p(n)), z_\rho := 1^{m_1} 2^{m_2} \dots m_1! m_2! \dots$, が成り立つ.

行列式を議論するが “det” と書いてその絶対値を表すものとする. 指標の直交性から

$$1 = (\det Y_n)^2 \prod_{\rho \in P(n)} z_\rho,$$

が成立する. V_n の基底 W から基底 U への変換行列を $M(W, U)$ で表すと,

$$\begin{aligned} \det M(S(px), B^{(p)}(px)S(x^p)) &= \det M(S(px), p(px)) \det M(p(px), B^{(p)}(px)S(x^p)) \\ &= \det M(S(x), p(x)) \det M(p(px), B^{(p)}(px)S(x^p)) \\ &= \det M(S(x), p(x)) \det M(p(px), p(x)) \det M(p(x), B^{(p)}(px)S(x^p)). \end{aligned}$$

また, $\lambda \in P^p(n_1), \mu \in P(n_2)$ に対して,

$$\begin{aligned} B_\lambda^{(p)}(px)S_\mu(x^p) &= \sum_{\rho \in P_p(n_1), \sigma \in P(n_2)} B_{\lambda, \rho}^{(p)} Y_{\mu, \sigma} p_\rho(px) p_\sigma(x^p) \\ &= \sum_{\rho \in P_p(n_1), \sigma \in P(n_2)} B_{\lambda, \rho}^{(p)} Y_{\mu, \sigma} p^{\ell(\rho)} p_\rho(x) p_{p\sigma}(x), \end{aligned}$$

ここで $p\sigma := (p\sigma_1, p\sigma_2, \dots)$ と書ける. これは, 行列 $M(B^{(p)}(px)S(x^p), p(x))$ が $n_1 + pn_2 = n$ を満たすペア (n_1, n_2) でインデックス付けされたブロック対角行列となることをあらわす.

命題 5.3.

$$\det M(B^{(p)}(px)S(x^p), p(x)) = \prod_{n_1 + pn_2 = n} (\det B_{n_1}^{(p)}) (\det Y_{n_2}) (\det L_{n_1}),$$

$$L_n := \text{diag}(p^{\ell(\rho)}; \rho \in P_p(n)).$$

S_n のカルタン行列 $C_n = {}^t D_n D_n$ の単因子のコンパクトな式が宇野-山田により知られている [10]:

$$\{p^{\frac{\ell(\tilde{\lambda}) - \ell(\lambda)}{p-1}}; \lambda \in P^p(n)\}.$$

明らかに,

$$\det C_n = \prod_{\lambda \in P^p(n)} p^{\frac{\ell(\tilde{\lambda}) - \ell(\lambda)}{p-1}}.$$

命題 5.4.

$$\prod_{\rho \in P_p(n)} z_\rho = (\det \Psi_n)^2 \times \prod_{\lambda \in P^p(n)} p^{\frac{\ell(\tilde{\lambda}) - \ell(\lambda)}{p-1}}.$$

私たちの主結果は次の行列式の値が簡単な数え上げで決定できるというものである.

定理 5.5.

$$\det A_n^{(p)} = p^T.$$

ここで

$$T = \sum_{\lambda \in P(n)} \frac{\ell(\tilde{\lambda}) - \ell(\lambda)}{p-1} = \sum_{\lambda \in P(n)} \ell(\lambda^{d(p)}).$$

例えば, $n = 5$, $p = 3$ のとき $P(5) = \{5, 41, \textcircled{3}2, \textcircled{3}11, 221, 21111, 11111\}$. よって $\det A_5^{(3)} = 3^2$.

$p = 3$ のときの T の表を載せる.

n	1	2	3	4	5	6	7	8...
T	0	0	1	1	2	5	7	11...

参考文献

- [1] K. Aokage, Brauer-Schur functions, Disc Math and Theo Comp Scie. to appear.
- [2] K. Aokage, H. Mizukawa and H.-F. Yamada, Compound basis arising from the basic $A_1^{(1)}$ -module, Lett. Math. Phys. (2008) 85:1-14.
- [3] S. Ariki, T. Nakajima and H.-F. Yamada, Reduced Schur functions and the Littlewood-Richardson coefficients, J. London Math. Soc. (2) 59 (1999), no. 2, 396–406.
- [4] Y. Chen, A. Garsia and J. Remmel, Algorithms for plethysm, in Combinatorics and Algebra, Contemporary Math. 34(1984), 109-153.
- [5] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Transformation groups for soliton equations - Euclidean Lie algebras and reduction of the KP hierarchy, Publ. RIMS Kyoto Univ. 18 (1982), 1077-1110.
- [6] G. Walker, Modular Schur Functions, Trans. Am. Math. Soc. 346 (1994), 569–604.
- [7] M. Jimbo, T. Miwa, Solitons and infinite dimensional Lie algebras, Publ. Rims Kyoto Univ, 19 (1981), 943–1001.
- [8] G. D. James and A Kerber, The Representation Theory of the Symmetric Group, Addison-Wesley, London, 1980.
- [9] S. Leidwanger, Basic representations of $A_{n-1}^{(1)}$ and $A_{2n}^{(2)}$ and the combinatorics of partitions, Adv. Math. 141 (1999), 119–154.
- [10] K. Uno and H.-F. Yamada, Elementary divisors of Cartan matrices for symmetric groups, J. Math. Soc. Japan, 58 (2006), 1031-1036.