

素粒子論と表現論

Elementary particle theory and representation theory

佐野 茂 (Shigeru SANO) *, 大野成義 (Shigeyoshi OHNO) †

2009 年 11 月 18 日

1 はじめに

表現論の歴史を振り返ると、素粒子論のディラックやウィグナーらから強い刺激を受け、有限次元表現論から無限次元表現論へと発展してきている。

他方、素粒子論も 20 世紀には著しい発展を遂げている。原子核のまわりの電子配列は良く知られているが、原子核の内側の構造も明らかになってきたのである。例えば、クォーク粒子の存在により中性子や陽子などの重粒子（バリオン）の構造が解明された。反クォークの発見により、中間子（メソン）の構造も明らかにされた。続いてストレンジクォーク、チャームクォーク、ボトムクォークそしてトップクォークの発見。さらに軽粒子（レプトン）が質量を持つことや C P 対称性の破れの発見など多産な成果をあげ標準モデルが出来上がってきた。

視点を変えて表現論の立場からこの標準モデルを見直してみると、発見のたびにモデルは建て増しを繰り返してきたため統一感に欠けていると感じられる。数学では半単純リー群という厳密な概念が明確に与えられ、表現論は統一的に発展してきている。そこで表現論の成果を生かして素粒子の標準モデルを検証することにより、恩返しを期待される時期が来たと言えよう。

また、素粒子の標準モデルの中には表現論へ応用したい魅力的な構造も潜んでいる。本稿ではそうした素粒子の世界を述べる。標準モデルの全体を扱うのは無理だが、表現論から統一的な展開を試みる。

2 ディラック方程式

電子の運動を表す方程式としてシュレディンガーの方程式が提出された。この方程式をローレンツ共役となるようにしたのが、クライン-ゴールドン方程式である。実在する粒子を記述するためにさらに、このクライン-ゴールドン方程式を $\partial/\partial t$ につき線形化するという方針でディラック (P.A.M.Dirac) は 1928 年（文献 [Di]）に次の様に方程式を導いている。まず、関係式

$$E\psi = (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi \quad (1)$$

*職業能力開発総合大学校, 神奈川県相模原市橋本台 4-1-1, ssano@uitek.ac.jp

†ohno@uitek.ac.jp

において、エネルギー保存則を満足するように係数 α と β を決定するのである。そのため、ベクトル α の成分 α_j ($j = 1, 2, 3$) と β は、自由粒子が相対論的なエネルギーと運動量の関係

$$E^2\psi = (\mathbf{p}^2 + m^2)\psi \quad (2)$$

を満足するように決定する必要がある。成分で考えて

$$E^2\psi = \sum_{i,j} (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m)\psi \quad (3)$$

$$= \sum_{i,j} \{\alpha_i^2 p_i^2 + (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m + \beta^2 m^2\} \psi \quad (4)$$

$$= \left(\sum_i p_i^2 + m^2 \right) \psi \quad (5)$$

このことから、成分 α_i , β は

1. $\alpha_i^2 = I$, $\beta^2 = I$
2. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ はすべて反交換

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad (i \neq j), \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

を満足しなくてはならない。これらの条件を満たすには 4 次の行列を使う必要がある。

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (6)$$

ここでは 2 次の正方行列のブロックで表している。 I は単位行列で σ_i は次の行列を表している。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

これらの条件を満足する関係 (1) に演算子への置換

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i \nabla \quad (8)$$

を施して得られるディラック方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi \quad (9)$$

により、自由電子がうまく記述出来たのである。

この方程式のエネルギーの固有ベクトルを調べると、4 つの独立な解をもつ。2 つは $E > 0$, 後の 2 つは $E < 0$ である。この正の解は電子そして負の解は陽電子を表していたのである。さらに、角運動量は $1/2$ であることも示されたのである。

このような歴史から、ローレンツ共役性という特殊相対性原理は素粒子論の発展に大きな指針を与えてきたことが理解できる。

3 クォークと中間子 (メソン)

π 中間子は湯川秀樹により 1934 年に予想され 1947 年に発見された粒子だが、その後多くの素粒子が見つかっている。そこで下層には基本粒子がさらに存在するはずだと見做され、長年の探

素により発見されたのがクォークである。クォークにはアップ (u)、ダウン (d)、ストレンジ (s)、チャーム (c)、ボトム (b)、トップ (t) の 6 種類がある。例えば中性子 (n) は u, d, d の 3 つのクォークからなる。 u の電荷は $2/3$ で、 d の電荷は $-1/3$ だから、全体の電荷は $2/3 - 1/3 - 1/3 = 0$ で、よく知られた中性子の電荷ゼロである。陽子 (p) は u, u, d の 3 つのクォークからなり、電荷は $2/3 + 2/3 - 1/3 = 1$ となり整合性がとれている。トップクォークが見つかったのは 1995 年であるから、6 個となったのは比較的最近である。

それぞれのクォーク q はディラック方程式にしたがい、電荷 (Q) の正負が異なり他の性質が同じ反粒子 $\bar{q}$ が存在する。

クォーク	電荷	スピン	質量 (MeV)
アップ u	$2/3$	$1/2$	3
チャーム c	$2/3$	$1/2$	1,200
トップ t	$2/3$	$1/2$	174,000
ダウン d	$-1/3$	$1/2$	6
ストレンジ s	$-1/3$	$1/2$	120
ボトム b	$-1/3$	$1/2$	4,200

中間子はこのクォークと反クォークの組み合わせからなる粒子である。 π 中間子 $\pi^+ = u\bar{d}$ と $\pi^- = d\bar{u}$ はそれぞれ、プラス 1 とマイナス 1 の電荷をもつ。電荷ゼロの π 中間子もあるが、アイソスピンの状態で分類される。

$$\begin{aligned}
|I=1, Q=1\rangle &= -u\bar{d}, \\
|I=1, Q=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), \\
|I=1, Q=-1\rangle &= d\bar{u}, \\
|I=0, Q=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})
\end{aligned}$$

まず、核力 300MeV より小さな質量のクォーク u, d, s を対象にし、コンパクト群 $SU(3)$ の表現を用いてメソン进行分类する。3 つのクォーク u, d, s からなる 3 次元表現と反クォーク $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ からなる 3 次元表現の積表現を既約分解して、8 次元表現と 1 次元表現にメソンは次のように入る (メソン表)。

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

これに従って 6 種類のクォークと反クォークの組み合わせで、可能なメソンは

$$6 \otimes \bar{6} = 30 \oplus 6$$

と分解されるのが自然ではないか。

4 重粒子 (バリオン)

クォークから構成される素粒子进行分类しようとするとき、ウィークボソンによる弱い相互作用に基づかななくてはならない。このウィークボソンの質量は大きく陽子の約 90 倍ある。例えば β 崩壊は原子核から電子 e と反ニュートリノ $\bar{\nu}$ が放出され中性子は次のように

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$$

陽子へと変化する．この変化を中性子と陽子を構成しているクォークの変化で見ると

$$d \rightarrow u + e + \bar{\nu}$$

となる．ウイークボソンによる弱い相互作用により d から u に移っていると理解されている．当初クォークは 3 種類 u, d, s によりバリオンは分類された，まず $SU(3)$ の表現を用いて対称性から

$$3 \otimes 3 = 8 \oplus 1$$

と分解し，さらに

$$(3 \otimes 3) \otimes 3 = (8 \oplus 1) \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

と既約分解された．これに従い 6 個のクォークによりバリオンを分類するために，表現の分解

$$(6 \otimes 6) \otimes 6 = 56 \oplus 70 \oplus 70 \oplus 20$$

を用いるのが自然と考える．それぞれの表現には，まだ存在が確認されていない多くの素粒子が含まれる．

5 強い力

メソンとバリオンについてまとめてきたが，メソンはクォークと反クォークとの対となり，バリオンは 3 個のクォークの組で与えられる．しかも，クォークのスピンは $1/2$ でフェルミ則に従う，すなわち同じ状態で多くの粒子が共存出来ないのである．

カラーの 3 原色 (R, B, G) により各クォークの状態を区別し，グルーオンにより強い力が働きカラー交換が行われると理解されるようになった．色が混ざり無色になったときに粒子が姿を現すのである．反クォークには 3 原色の補色 ($\bar{R}, \bar{B}, \bar{G}$) をあてる．メソン $q\bar{q}$ に対し， q のカラー価が R のとき $\bar{q}$ のカラー価は $\bar{R}$ とし，無色となり粒子として存在するのである．クォークが他のカラー価のときもその補色のカラー価を反クォークはもつと理解する．この色対称性のゲージ群は $SU(3)$ である．

6 今後の課題

以上まとめてきたが，標準モデルには多くの問題が残されている．ここでは理論面で興味深い問題を上げてみよう．

問題 1．6 個のクォークの質量の違いを明確に説明する理論を与えよ．

クォークには 3 世代あり，それぞれの質量の関係が求められている．

問題 2．電子ニュートリノ，ミューニュートリノ，タウニュートリノの質量を確定せよ．

ミューニュートリノと電子ニュートリノとが混ざって飛行して相互に転換して割合が異なる現象が観測されている，これはニュートリノ振動と呼ばれニュートリノに質量がある証拠となっている．しかし，質量は非常に小さく確定していない．

問題 3．クォークとレプトンには 3 世代あり似たような構成になっている．レプトンには強い力が働かないが，クォークとは密接な関係あると考えられるこれを明らかにせよ．

レプトン	電荷	スピン	質量 (MeV)
電子 e	-1	1/2	0.511
ミューオン μ	-1	1/2	105.7
タウ τ	-1	1/2	1777
電子ニュートリノ ν_e	0	1/2	?
ミューニュートリノ ν_μ	0	1/2	?
タウニュートリノ ν_τ	0	1/2	?

問題4. 粒子と反粒子とはペアで生まれているが、なぜ粒子だけが残リ反粒子は消えてしまったのか明らかにせよ.

例えば陽子の寿命は

$$p \rightarrow e^+ \gamma \quad (> 67 \times 10^{31} \text{years})$$

非常にながく、崩壊しないのではとも考えられている. ところが、反陽子は崩壊しやすい.

問題5. 核子の質量の担い手を明らかにせよ.

核子はクォーク三体の複合体とされているが、そのクォークの質量は数 MeV で実際に測定される核子の質量と大きくかけ離れている. また、核子は力を媒介するグルーオンとクォークから構成されていると考えられている.

問題6. 宇宙の平坦性の問題.

ビックバン宇宙論では説明できない問題として、平坦性の問題がある. 宇宙背景放射は揺らいでいることが知られているが、その揺らぎの大きさは10万分の1でしかない. この宇宙の一様性はビックバン宇宙論では説明できない.

これらの問題はいずれも現在の素粒子論の中心的なテーマとなっている. ここでは手の届く問題もあげてみる. K 中間子から $\bar{K}$ 中間子への変換とその逆変換で CP 対称性が破れる現象はクォークが6種類あれば説明がつくと新たなクォークの存在を予想した有名な益川-小林の論文がある. その後 B 中間子から $\bar{B}$ 中間子への変換とその逆変換で CP 対称性がやはり破れることが加速器により実証され、理論の正しさが明らかとなりノーベル賞へと繋がっている. こうした報道から自然に湧いてくる問題は次である.

問題7. フレーバー対称性を数学的に美しく表現せよ.

現実の世界は、小林-益川の論文の意味するようにフレーバー対称性が破れている. そのため、素粒子物理の研究者の多くは、フレーバー対称性そのものでなく、対称性の破れを説明する理論の構築に興味を持っており、その研究は盛んである. しかし、最初から対称性は破れているのではなく、まず対称性が保たれた美しく調和のとれた世界が元にあるはずである. このフレーバー対称性が保たれた世界の議論はなおざりにされている. 対称性の破れを議論する前に、破れる前のフレーバー対称性について数学的表現を完成しておくべきではないか?

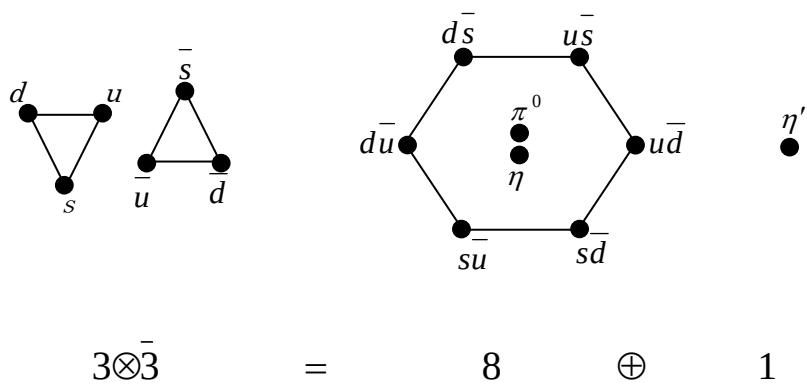
参考文献

- [Di] P.A.M. Dirac, The quantum theory of the electron, Proceedings of the Royal Society Bd.117, 1928, S.610, Bd.118, S.351 (Diracgleichung, spin)
- [Ei] Albert Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. der Phys.17(1905), pp.891-921.

- [HM] F.Halzen, A.D.Martin, Quarks & Lepton -An introduction course in modern particle physics-, John Wiley & Sons,1984.
- [Ha] Harish-Chandra, Infinite irreducible representations of the Lorentz group, Proc. Royal Soc.A.189(1947), pp.372-401.
- [KM] M.Kobayashi and T.Maskawa, CP -Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction, Progress Theoretical Physics, Vol.49,No.2.(1973), pp.652-656.
- [Lo] H.A.Lorentz, Electromagnetic Phenomena in a System Moving with Any Velocity Smaller than That of Light, Proc. Roy. Acad. Amsterdam 6(1904), pp.809-831.
- [Po] Henri Poincaré, La Science et l'Hypothèse, (1902), 河野伊三郎訳 科学と仮説 岩波書店.
- [Sa] 佐野茂, 相対論から無限次元表現論, 数学セミナー, 日本評論社,10(2007),pp.56-61.
- [Su] 杉浦光夫, 無限次元表現論成立史, 数学セミナー, 日本評論社,5(1981),pp.62-67.
- [Wi] E.Wigner, Unitary representations of Lorents group, Annals of Math. 40(1939), pp.149-204.

メソン表

メソン粒子	構成	電荷	質量 MeV	スピン	S
π^+	$u\bar{d}$	+1	140	0	0
π^-	$d\bar{u}$	-1	140	0	0
π^0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	135	0	0
η	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	0	548	0	0
η'	$(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$	0	958	0	0
K^+	$u\bar{s}$	+1	494	0	1
K^-	$s\bar{u}$	-1	494	0	-1
K^0	$d\bar{s}$	0	498	0	1



バリオン表

バリオン	構成	構造	Q	質量 MeV	スピン	I	I_3	S
Δ^-	ddd		-1	1230	3/2	3/2	-3/2	0
Δ^0	udd	$d(ud+du)+udd$	0	1230	3/2	3/2	-1/2	0
Δ^+	uud	$uud+(ud+du)u$	1	1230	3/2	3/2	1/2	0
Δ^{++}	uuu		2	1230	3/2	3/2	3/2	0
Σ^{*-}	dds	$dds+(ds+sd)d$	-1	1385	3/2	1	-1	-1
Σ^{*0}	uds	$(sd+ds)u+(su+us)d+(du+ud)s$	0	1385	3/2	1	0	-1
Σ^{*+}	uus	$uus+(us+su)u$	1	1385	3/2	1	1	-1
Ξ^{*-}	dss	$dss+(ds+sd)d$	-1	1530	3/2	1/2	-1/2	-1
Ξ^{*0}	uss	$uss+s(us+su)$	0	1530	3/2	1/2	1/2	-2
Ω^-	sss		-1	1672	3/2	0	0	-3
n(Ms)	udd	$d(ud+du)-2udd$	0	940	1/2	1/2	-1/2	0
p(Ms)	uud	$(ud+du)u-2uud$	1	938	1/2	1/2	1/2	0
$\Sigma^-(\text{Ms})$	dds	$(ds+sd)d-2dds$	-1	1197	1/2	1	-1	-1
$\Lambda(\text{Ms})$	uds	$(sd+ds)u-(su+us)d$	0	1116	1/2	0	0	-1
$\Sigma^0(\text{Ms})$	uds	$(sd+ds)u+(su+us)d-2(du+ud)s$	0	1193	1/2	1	0	-1
$\Sigma^+(\text{Ms})$	uus	$(us+su)u-2uus$	1	1189	1/2	1	1	-1
$\Xi^-(\text{Ms})$	dss	$s(ds+sd)-2dss$	-1	1321	1/2	1/2	-1/2	-2
$\Xi^0(\text{Ms})$	uss	$s(us+su)-2uss$	0	1315	1/2	1/2	1/2	-2
n(Ma)	udd	$d(ud-du)$	0					0
p(Ma)	uud	$(ud-du)u$	1					0
$\Sigma^-(\text{Ma})$	dds	$(ds-sd)d$	-1					-1
$\Lambda(\text{Ma})$	uds	$(sd-ds)u+(us-su)d-2(du-ud)s$	0					-1
$\Sigma^0(\text{Ma})$	uds	$(sd-ds)u+(su-us)d$	0					-1
$\Sigma^+(\text{Ma})$	uus	$(us-su)u$	1					-1
$\Xi^-(\text{Ma})$	dss	$s(ds-sd)$	-1					-2
$\Xi^0(\text{Ma})$	uss	$s(us-su)$	0					-2
$\Sigma^0(\text{A})$	uds	$uds-usd+sud-sdu+dsu-dus$	0					-1

