

Middle convolution について (On the middle convolution)

竹村 剛一 (横浜市立大学国際総合科学部)
(Kouichi TAKEMURA (Yokohama City Univ.))

1. 概要

本稿では、線形常微分方程式における middle convolution について、ドリーニュ・シンプソン問題や index of rigidity、オイラー変換など関連する対象や超幾何微分方程式など例を絡めて解説する。フックス型微分方程式系における middle convolution のみならず、現在発展途上である不確定特異点を含む場合についても解説する。

2. ドリーニュ・シンプソン問題

2.1. 加法的ドリーニュ・シンプソン問題. $C_0, \dots, C_r$ をそれぞれ $n \times n$ 行列の共役類とする。共役類の一つの代表元としてはジョルダン標準形をとってることができ、ジョルダン標準形 D が含まれている共役類 C は $C = \{P^{-1}DP \mid P \in GL(n)\}$ と表せる。

加法的ドリーニュ・シンプソン問題とは、

$$(1) \quad A_0 + A_1 + \dots + A_r = 0, \quad A_i \in C_i$$

を満たす行列の組 $A_0, \dots, A_r$ で既約なものが存在するような共役類 $C_0, \dots, C_r$ の特徴付けを与えよ、というものである。ここでの既約性は、すべての $i \in \{0, \dots, r\}$ に対して $A_i W \subset W$ をみたす $\mathbb{C}^n$ の部分空間 W は $\{0\}$ または全体のみ、ということである。

別の言い方をすると、 $n \times n$ 行列のジョルダン標準形 $D_0, \dots, D_r$ を与えたとき、

$$(2) \quad A_0 + A_1 + \dots + A_r = 0, \quad A_i = P_i^{-1} D_i P_i$$

を満たす行列の組 $A_0, \dots, A_r$ で既約なものが存在するようなものの特徴付けを行え、というようになる。

式 (1) でトレースをとることにより、

$$(3) \quad \sum_{i=0}^r \text{tr} C_i = \sum_{i=0}^r (C_i \text{の固有値の和}) = 0$$

が加法的ドリーニュ・シンプソン問題に解がある必要条件になることがわかる。

2.2. 乗法的ドリーニュ・シンプソン問題. 乗法的ドリーニュ・シンプソン問題とは、

$$(4) \quad A_0 A_1 \dots A_r = I_n, \quad A_i \in C_i$$

を満たす行列の組 $A_0, \dots, A_r$ で既約なものが存在するような共役類 $C_0, \dots, C_r$ の特徴付けを与えよ、というものである。(I_n はサイズ n の単位行列。)

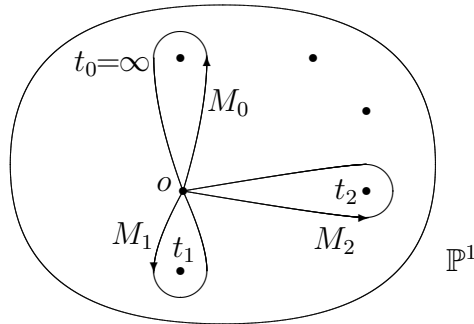
$\prod_{i=0}^r (C_i \text{の固有値の積}) = 1$ は、この問題の必要条件である。

2.3. フックス型微分方程式系. ドリーニュ・シンプソン問題とフックス型微分方程式系との関係を述べる。

加法的ドリーニュ・シンプソン問題の解となっている行列の組 $A_0, A_1, \dots, A_r$ に対してサイズ n のフックス型微分方程式系

$$(5) \quad \frac{dY}{dz} = \sum_{i=1}^r \frac{A_i}{z - t_i} Y$$

を対応させると、 $z = \infty$ に対応する留数行列は $A_0 = -(A_1 + \dots + A_r)$ となっている。そして、 M_i をフックス型微分方程式系 (5) の解に対する $z = t_i$ でのモノドロミー行列とし、 M_0 を $z = \infty$ でのモノドロミー行列とする。



すると、リーマン球面の基本群の関係式より、 $M_0 M_1 \dots M_r = 1$ が成立する。よって、フックス型微分方程式系を介して、加法的ドリーニュ・シンプソン問題と乗法的ドリーニュ・シンプソン問題が関係している。

2.4. 記号 $(\mathbf{m}, \underline{\lambda})$. $n \times n$ 行列の共役類 C_i に対してはジョルダン標準形が対応するが、本稿では以下の $(\mathbf{m}_i, \underline{\lambda}_i)$ を対応させる。ここで $\mathbf{m}_i = (m_{i,1}, \dots, m_{i,n_i}) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $(m_{i,1} + \dots + m_{i,n_i} = n, m_{i,1} \geq \dots \geq m_{i,n_i})$, $\underline{\lambda}_i = (\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n_i}) \in \mathbb{C}^{n_i}$ であり、 $\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n_i}$ が相異なる場合には $(\mathbf{m}_i, \underline{\lambda}_i)$ には固有値 $\lambda_{i,j}$ の固有空間の次元が $m_{i,j}$ となっている対角化可能な行列が属する共役類が対応する。一般には、 $(\mathbf{m}_i, \underline{\lambda}_i)$ と [15] での行列 $L(\mathbf{m}_i; \underline{\lambda}_i)$ が対応している。

$$(6) \quad L(\mathbf{m}_i; \underline{\lambda}_i) = \begin{pmatrix} \lambda_{i,1} I_{m_{i,1}} & I_{m_{i,2}} & 0_{m_{i,1}-m_{i,2}, m_{i,2}} & 0_{m_{i,1}, m_{i,3}} & \dots \\ 0 & \lambda_{i,2} I_{m_{i,2}} & I_{m_{i,3}} & 0_{m_{i,2}-m_{i,3}, m_{i,3}} & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_{i,3} I_{m_{i,3}} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

$n \times n$ 行列の組 $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_r, A_0)$ に対して、 $(\mathbf{m}, \underline{\lambda})$ ($\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1; \dots; \mathbf{m}_r; \mathbf{m}_0)$, $\underline{\lambda} = (\lambda_1; \dots; \lambda_r; \lambda_0)$, $A_i \sim (\mathbf{m}_i, \lambda_i)$) を対応させる。

2.5. Index of rigidity. Index of rigidity とは、Katz が乗法的ドリーニュ・シンプソン問題を研究する際に [10] にて導入されたもので、 $n \times n$ 行列の組 $\mathbf{A} = (A_0, A_1, \dots, A_r)$ に対して

$$(7) \quad \text{idx}(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^r \dim Z(A_i) - (r-1)n^2,$$

で定義される。ここで $Z(A_j)$ は A_j と可換な $n \times n$ 行列たちの集合であり、 $\dim Z(A_i) = \sum_{j=1}^{n_i} (m_{i,j})^2$ と計算される。既約な $\mathbf{A}$ に対して index of rigidity は 2 以下の偶数となることが知られている。idx($\mathbf{m}$) を、 $(\mathbf{m}, \underline{\lambda})$ に対応する $\mathbf{A}$ についての index of rigidity として定義する。

加法的ドリーニュ・シンプソン問題において、 $A_0, A_1, \dots, A_r$ が解である ($A_0 + A_1 + \dots + A_r = 0$) ならば、一斉相似変換をした行列の組 $P^{-1}A_0P, P^{-1}A_1P, \dots, P^{-1}A_rP$ も解となり、フックス型微分方程式系 (5) においては解の変換 $Y \mapsto P^{-1}Y$ が対応する。 A_0 の固有値がすべて相異なる場合には、一斉相似変換により A_0 を対角行列ととることがあるが、そうしても対角行列による一斉相似変換による不定性が残っている。

ところで、アクセサリーパラメーターとは、行列の組 $A_0, A_1, \dots, A_r$ ($A_0 + A_1 + \dots + A_r = 0$) に対して A_i ($i = 0, \dots, r$) の共役類を決めても、一斉に相似変換する以外の自由度として不定に残るパラメーターのことである。フックス型微分方程式系 (5) において各特異点での局所解の構造を決めても残ってしまうパラメーターに対応するが、

$$(8) \quad \text{アクセサリーパラメーターの個数} = 2 - (\text{index of rigidity})$$

と計算される。

2.6. Addition. $A_1, \dots, A_r$ ($A_0 = -(A_1 + \dots + A_r)$) に対してパラメーター $(\mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbb{C}^r$ に関する addition とは、

$$(9) \quad (A_1, \dots, A_r) \text{ から } (A_1 + \mu_1 I_n, \dots, A_r + \mu_r I_n)$$

を対応させるものであり、 A_0 から $A_0 - (\mu_1 + \dots + \mu_r)I_n$ が対応する。フックス型微分方程式系 (5) においては解の関数倍 $Y \mapsto (z - t_1)^{\mu_1} \dots (z - t_r)^{\mu_r} Y$ が対応する。

また、addition を行っても index of rigidity が不変なことは、その定義から直ちに従う。

3. 2×2 フックス型微分方程式系

3.1. 3 点 $\{0, 1, \infty\}$ に確定特異点をもつ 2×2 フックス型微分方程式系. 2×2 行列 3 個についての加法的ドリーニュ・シンプソン問題 ($A_0 + A_1 + A_2 = 0$) と、3 点に確定特異点をもつ 2×2 フックス型微分方程式系について考察する。この節では、 2×2 行列 A_0, A_1, A_2 の代わりに A_∞, A_0, A_1 を用いる。

A_∞, A_0, A_1 の固有値はそれぞれ相異なるとし、各固有値たちを固定したときに $A_\infty + A_0 + A_1 = 0$ をみたす行列たち A_∞, A_0, A_1 を探す、あらかじめ addition を行うことにより、 A_0 の固有値は $\theta_0, 0$ 、 A_1 の固有値は $\theta_1, 0$ とし、一斉相似変換により $A_\infty = -(A_0 + A_1) = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$ としておく。

$$(10) \quad A_0 = \begin{pmatrix} u_0 + \theta_0 & -w_0 \\ u_0(u_0 + \theta_0)/w_0 & -u_0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} u_1 + \theta_1 & -w_1 \\ u_1(u_1 + \theta_1)/w_1 & -u_1 \end{pmatrix},$$

とおくと、解は $\theta_0 + \theta_1 + \kappa_1 + \kappa_2 = 0$ のとき (トレース = 0 の条件に対応) に存在し、

$$(11) \quad \begin{aligned} w_0 &= k \\ w_1 &= -k, \quad u_0 = \frac{\kappa_2(\kappa_2 + \theta_1)}{2\kappa_2 + \theta_0 + \theta_1} = \frac{\kappa_2(\kappa_2 + \theta_1)}{\kappa_2 - \kappa_1}, \quad u_1 = \frac{\kappa_2(\kappa_2 + \theta_0)}{\kappa_2 - \kappa_1}, \end{aligned}$$

となる。 k は対角行列による相似変換で吸収されるので、条件 $\theta_0 + \theta_1 + \kappa_1 + \kappa_2 = 0$ のもとでの解は一意的である。つまり、"リジッド" である。

なお、ここで考えた加法的ドリーニュ・シンプソン問題は、 $\mathbf{m} = (1, 1; 1, 1; 1, 1)$, $\underline{\lambda} = (0, \theta_0; 0, \theta_1; \kappa_1, \kappa_2)$ に関するものである。 $\text{idx}(\mathbf{m}) = \dim Z(A_\infty) + \dim Z(A_0) + \dim Z(A_1) - (2-1)2^2 = 2$ であるのでアクセサリ・パラメーターの個数は 0 となり、加法的ドリーニュ・シンプソン問題の解の一意性と整合している。

特異点を $\{0, 1, \infty\}$ としたときに対応するフックス型微分方程式を書く。

$$(12) \quad \frac{dY}{dz} = \left(\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} \right) Y, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{pmatrix}.$$

一般に微分方程式系

$$(13) \quad \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{pmatrix}$$

から $y_1(z)$ のみたす単独微分方程式を求めると、それは以下ようになる。

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dz^2} + p_1(z) \frac{dy_1}{dz} + p_2(z) y_1 &= 0, \quad p_1(z) = -a_{11}(z) - a_{22}(z) - \frac{a'_{12}(z)}{a_{12}(z)}, \\ p_2(z) &= a_{11}(z)a_{22}(z) - a_{12}(z)a_{21}(z) - a'_{11}(z) + \frac{a_{11}(z)a'_{12}(z)}{a_{12}(z)}. \end{aligned}$$

式 (12) の場合では、

$$(15) \quad p_1(z) = \frac{1 - \theta_0}{z} + \frac{1 - \theta_1}{z-1}, \quad p_2(z) = \frac{\kappa_1(\kappa_2 + 1)}{z(z-1)}, \quad (\theta_0 + \theta_1 + \kappa_1 + \kappa_2 = 0)$$

となり、超幾何微分方程式

$$(16) \quad z(1-z)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)y' - \alpha\beta y = 0,$$

において

$$(17) \quad \gamma = 1 - \theta_0, \quad \{\alpha, \beta\} = \{\kappa_1, \kappa_2 + 1\}$$

の場合に対応する。

つまり、「超幾何微分方程式」と「3 点 $\{0, 1, \infty\}$ に特異点をもつ 2×2 フックス型微分方程式系」が 1 対 1 に対応している。

3.2. 4 点に確定特異点をもつ 2×2 のフックス型微分方程式系. 次に、 2×2 行列 4 個についての加法的ドリーニュ・シンブソン問題 ($A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 0$) と、4 点に確定特異点をもつ 2×2 フックス型微分方程式系について考察する。この節では、 2×2 行列 A_0, A_1, A_2, A_3 の代わりに A_∞, A_0, A_1, A_t を用いる。

A_∞, A_0, A_1, A_t の固有値はそれぞれ相異なるとし、各固有値たちを固定したときに $A_\infty + A_0 + A_1 + A_t = 0$ をみたす行列たち A_∞, A_0, A_1, A_t を探す、あらかじめ addition を行うことで A_0 の固有値は $\theta_0, 0$ 、 A_1 の固有値は $\theta_1, 0$ 、 A_t の固有値は $\theta_t, 0$ とし、一斉相似変換により

$$(18) \quad A_\infty = -(A_0 + A_1 + A_t) = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}, \quad \kappa_1 - \kappa_2 = \theta_\infty,$$

としておく。トレースの和が 0 という条件より、

$$(19) \quad \kappa_1 = (\theta_\infty - \theta_0 - \theta_1 - \theta_t)/2, \quad \kappa_2 = -(\theta_\infty + \theta_0 + \theta_1 + \theta_t)/2$$

となる。

$$(20) \quad A_0 = \begin{pmatrix} u_0 + \theta_0 & -w_0 \\ u_0(u_0 + \theta_0)/w_0 & -u_0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} u_1 + \theta_1 & -w_1 \\ u_1(u_1 + \theta_1)/w_1 & -u_1 \end{pmatrix}, \\ A_t = \begin{pmatrix} u_t + \theta_t & -w_t \\ u_t(u_t + \theta_t)/w_t & -u_t \end{pmatrix},$$

とおき、特異点を $\{0, 1, t, \infty\}$ としたときの対応するフックス型微分方程式を書いておく。

$$(21) \quad \frac{dY}{dz} = A(z)Y, \quad A(z) = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_t}{z-t} = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix}.$$

ここでの加法的ドリーニュ・シンブソン問題は、 $\mathbf{m} = (1, 1; 1, 1; 1, 1; 1, 1)$, $\underline{\lambda} = (0, \theta_0; 0, \theta_1; 0, \theta_t; \kappa_1, \kappa_2)$ に関するもので、 $\text{idx}(\mathbf{m}) = 0$ であるのでアクセサリーパラメーターの個数は 2 となる。[8] で定められたアクセサリーパラメーターを以下で導入していく。式 (18) から $z(z-1)(z-t)a_{12}(z)$ は高々一次式となることから、一つのパラメーター λ を

$$(22) \quad a_{12}(z) = -\frac{w_0}{z} - \frac{w_1}{z-1} - \frac{w_t}{z-t} = \frac{k(z-\lambda)}{z(z-1)(z-t)},$$

と定める。そして、別のパラメーター μ を

$$(23) \quad a_{11}(\lambda) = \frac{u_0 + \theta_0}{\lambda} + \frac{u_1 + \theta_1}{\lambda-1} + \frac{u_t + \theta_t}{\lambda-t} = \mu,$$

を満たすものとして導入する。

簡単のため、 $\lambda \neq 0, 1, t, \infty$ とする。 $u_0, u_1, u_t, w_0, w_1, w_t$ を式 (18), (22), (23) から求めると、

(24)

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{k\lambda}{t}, \quad w_1 = -\frac{k(\lambda-1)}{t-1}, \quad w_t = \frac{k(\lambda-t)}{t(t-1)}, \\ u_0 &= -\theta_0 + \frac{\lambda}{t\theta_\infty} [\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 + \{2\kappa_1(\lambda-1)(\lambda-t) - \theta_1(\lambda-t) \\ &\quad - t\theta_t(\lambda-1)\}\mu + \kappa_1\{\kappa_1(\lambda-t-1) - \theta_1 - t\theta_t\}], \\ u_1 &= -\theta_1 - \frac{\lambda-1}{(t-1)\theta_\infty} [\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 + \{2\kappa_1(\lambda-1)(\lambda-t) + (\theta_\infty - \theta_1)(\lambda-t) \\ &\quad - t\theta_t(\lambda-1)\}\mu + \kappa_1\{\kappa_1(\lambda-t+1) + \theta_0 - (t-1)\theta_t\}], \\ u_t &= -\theta_t + \frac{\lambda-t}{t(t-1)\theta_\infty} [\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 + \{2\kappa_1(\lambda-1)(\lambda-t) - \theta_1(\lambda-t) \\ &\quad + t(\theta_\infty - \theta_t)(\lambda-1)\}\mu + \kappa_1\{\kappa_1(\lambda-t+1) + \theta_0 + (t-1)(\theta_\infty - \theta_t)\}], \end{aligned}$$

となる。パラメーター k は対角行列による一斉相似変換で吸収され、4 点に確定特異点をもつ 2×2 のフックス型微分方程式系における加法的ドリーニュ・シンブソン問題はアクセサリーパラメーターとして λ, μ を導入して解かれたことになる。式 (20) から決まるフックス型微分方程式系 (21) を $D_Y(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$ と記す。式 (21) において $y_2(z)$ を消去することにより、以下の二階線形微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} (25) \quad & \frac{d^2 y_1(z)}{dz^2} + \left(\frac{1-\theta_0}{z} + \frac{1-\theta_1}{z-1} + \frac{1-\theta_t}{z-t} - \frac{1}{z-\lambda} \right) \frac{dy_1(z)}{dz} \\ & + \left(\frac{\kappa_1(\kappa_2+1)}{z(z-1)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{z(z-1)(z-\lambda)} - \frac{t(t-1)H}{z(z-1)(z-t)} \right) y_1(z) = 0, \\ & H = \frac{1}{t(t-1)} [\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 - \{\theta_0(\lambda-1)(\lambda-t) + \theta_1\lambda(\lambda-t) \\ & \quad + (\theta_t-1)\lambda(\lambda-1)\}\mu + \kappa_1(\kappa_2+1)(\lambda-t)]. \end{aligned}$$

これを $D_{y_1}(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu)$ と記すことにする。特異点 $z = 0, 1, t, \lambda, \infty$ はすべて確定特異点となっており、 $z = \lambda$ は特性指数が $0, 2$ の見かけの特異点である。

ところで、第六パンルヴェ方程式系は式 (25) での λ, μ, t についての関数 H を用いて

$$(26) \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \frac{d\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

と記述される非線形常微分方程式系である。 t を変数とみなしたときに λ, μ が式 (26) を満たすとき、微分方程式 (21) のモノドロミーが保存されることが知られている。つまり、フックス型微分方程式系 (式 (21)) からモノドロミー保存変形により第六パンルヴェ方程式系 (式 (26)) が導出され、その従属変数としてアクセサリーパラメーター λ, μ が用いられる。

また、微分方程式 (25) において、 λ を確定特異点 $\{0, 1, t, \infty\}$ のいずれかに合流させ、伴って μ についても適当な極限をとれば、ホインの微分方程式

$$(27) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-t} \right) \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-t)} y = 0,$$

$(\gamma + \delta + \epsilon = \alpha + \beta + 1)$ を得ることができる。この操作をより精密に見るために、第六パンルヴェ方程式系の初期値空間を考慮に入れると見通しが良くなる。そして、第六パンルヴェ方程式系の初期値空間は、 $\lambda = 0, 1, t, \infty$ の場合も込めて考えた加法的ドリーニュ・シンプソン問題の解の表示に対しても有用である ([21])。

4. MIDDLE CONVOLUTION

Middle convolution は Katz による著書「Rigid local systems」([10]) で定式化されているものであり、層やコホモロジーの演算などが用いられている。Dettweiler と Reiter は [4, 5] において Katz の middle convolution をより平易な道具立てで再定式化した。ここでは、Dettweiler と Reiter によるフックス型微分方程式に対しての middle convolution の定式化について解説する。

n, r を正の整数とする。 $n \times n$ 行列の組 $A_1, A_2, \dots, A_r$ とこれらに付随するフックス型微分方程式系

$$(28) \quad \frac{dY}{dz} = \left(\frac{A_1}{z-t_1} + \frac{A_2}{z-t_2} + \dots + \frac{A_r}{z-t_r} \right) Y$$

に対して、 $\nu \in \mathbb{C}$ に依存する convolution 行列 $B_1, B_2, \dots, B_r \in \mathbb{C}^{nr \times nr}$ を

$$(29) \quad B_1 = \begin{pmatrix} A_1 + \nu & A_2 & \dots & A_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_1 & A_2 + \nu & \dots & A_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dots\dots\dots, \quad B_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_r + \nu \end{pmatrix},$$

で定め、これらの行列の組に対してフックス型微分方程式系

$$(30) \quad \frac{dU}{dz} = \left(\frac{B_1}{z-t_1} + \frac{B_2}{z-t_2} + \dots + \frac{B_r}{z-t_r} \right) U,$$

を付随させる。

$t_0 = \infty$ とおき、 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{t_1, \dots, t_r, t_{r+1}(= \infty)\}$ におい積分の基点 o を固定する。 $p \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して α_p は、始点が $w = o$ であり点 $w = p$ を反時計周りに回り始点 $w = o$ に戻ってくる径路とする。また、 $[\alpha, \beta] = \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ を Pochhammer の径路とする。すると、以下の Proposition が成り立つ。

Proposition 1. ([5]) $Y = {}^t(y_1(z), \dots, y_n(z))$ を微分方程式 (28) の解とする。それぞれの $i \in \{0, 1, \dots, r\}$ に対し、関数

$$(31) \quad U = \begin{pmatrix} \int_{[\alpha_z, \alpha_{t_i}]} (w - t_1)^{-1} y_1(w) (z - w)^\nu dw \\ \vdots \\ \int_{[\alpha_z, \alpha_{t_i}]} (w - t_1)^{-1} y_n(w) (z - w)^\nu dw \\ \int_{[\alpha_z, \alpha_{t_i}]} (w - t_2)^{-1} y_1(w) (z - w)^\nu dw \\ \vdots \\ \int_{[\alpha_z, \alpha_{t_i}]} (w - t_2)^{-1} y_n(w) (z - w)^\nu dw \\ \vdots \\ \int_{[\alpha_z, \alpha_{t_i}]} (w - t_r)^{-1} y_1(w) (z - w)^\nu dw \\ \vdots \\ \int_{[\alpha_z, \alpha_{t_i}]} (w - t_r)^{-1} y_n(w) (z - w)^\nu dw \end{pmatrix},$$

は微分方程式 (30) の解となる。

Proposition 1 により、微分方程式 (28) の解が与えられたら式 (31) の形の関数が convolution 行列によって表される微分方程式 (30) の解となることがわかった。さて

$$(32) \quad \mathcal{K}_1 = \begin{pmatrix} \text{Ker}(A_1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathcal{K}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{Ker}(A_r) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_r, \quad \mathcal{L}(\nu) = \text{Ker}(B_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(B_r).$$

とおく。 $\mathbb{C}^{nr}/(\mathcal{K} + \mathcal{L}(\nu))$ の次元を m とすると、これは $\mathbb{C}^m$ がベクトル空間として同型になるが、 B_k ($k = 1, \dots, r$) の商空間 $\mathbb{C}^m$ への作用をあらわす $m \times m$ 行列を $\tilde{B}_k$ と記すとき、(加法的) middle convolution mc_ν を $mc_\nu(A_1, A_2, \dots, A_r) = (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_r)$ で定める。これは、 r 個の $n \times n$ 行列から r 個の $m \times m$ 行列への対応となっており、 m は $\nu \neq 0$ のとき $m = nr - \dim(\text{Ker}(A_0 - \nu)) - \sum_{j=1}^r \dim(\text{Ker}(A_j))$ と計算され、 ν に依存している。また、微分方程式 (28) から $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_r$ に付随するフックス型微分方程式系

$$(33) \quad \frac{d\tilde{U}}{dz} = \left(\frac{\tilde{B}_1}{z - t_1} + \frac{\tilde{B}_2}{z - t_2} + \dots + \frac{\tilde{B}_r}{z - t_r} \right) \tilde{U},$$

への対応についても (加法的) middle convolution と呼ぶことにする。微分方程式 (28) の解から微分方程式 (33) の解への積分変換は、同型 $\mathbb{C}^{nr}/(\mathcal{K} + \mathcal{L}(\nu)) \simeq \mathbb{C}^m$ のとり方と $\mathbb{C}^m$ における基底の選び方を決めておけば Proposition 1 を用いることで原理的に計算することができる。

Dettweiler と Reiter によって示された middle convolution mc_ν に関する命題を記しておく。

Proposition 2. ([4]) ベクトル空間 V は $\mathbf{A} = (A_0, A_1, \dots, A_r)$ の作用で既約とする。

(i) *addition* や *middle convolution* を施したのも既約となり、これらの操作で *index of rigidity* は不変である。

(ii) $mc_{\nu+\mu}(V) = mc_{\nu}(mc_{\mu}(V))$, $mc_0(V) = V$ であり、とくに $mc_{-\nu} \circ mc_{\nu} = \text{id}$ が成立する。

5. MIDDLE CONVOLUTION の例

5.1. 3 点 $\{0, 1, \infty\}$ に確定特異点をもつ 2×2 フックス型微分方程式系. 3.1 節で扱った微分方程式

$$(34) \quad \frac{dY}{dz} = \left(\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} \right) Y, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{pmatrix}.$$

に対して *middle convolution* を考える。ここで A_0, A_1 は式 (10), (11) により与えられている。まず、convolution 行列は 4×4 行列となり、それは

$$(35) \quad B_0 = \begin{pmatrix} A_0 + \nu & A_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0 & A_1 + \nu \end{pmatrix}$$

と与えられる。 A_0, A_1 はそれぞれ 0 固有値をもつので $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ は 1 次元となり、

$$(36) \quad \mathcal{K}_0 = \begin{pmatrix} \text{Ker}(A_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} w_0 \\ u_0 + \theta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Ker}(A_1) \end{pmatrix} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_1 \\ u_1 + \theta_1 \end{pmatrix}$$

となる。また、 $A_{\infty} = -(A_0 + A_1) = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$ より、 $\mathcal{L}(\nu) = \text{Ker}(B_0) \cap \text{Ker}(B_1)$ は $\nu \neq 0, \kappa_1, \kappa_2$ のときは $\mathcal{L}(\nu) = \{0\}$ で *middle convolution* を施した後の微分方程式も 2×2 となる。 $\nu = 0$ のときは、*middle convolution* を施した後の微分方程式も同一の方程式となる。 $\nu = \kappa_1$ のときには $\mathcal{L}(\nu) = \mathbb{C}(1 \ 0 \ 1 \ 0)^T$, $\nu = \kappa_2$ のときには $\mathcal{L}(\nu) = \mathbb{C}(0 \ 1 \ 0 \ 1)^T$ となり、*middle convolution* を施した後の微分方程式 1×1 となることが期待される。 $\nu = \kappa_1$ のときを考える。

$$(37) \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & w_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 + \theta_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 + \theta_1 \end{pmatrix},$$

とし、 $\tilde{U} = S^{-1}U$ とおく。 U は $n = 2, r = 2, t_1 = 0, t_2 = 1$ の場合の微分方程式 (30) の解であり、 S の第 2 列、第 3 列、第 4 列はそれぞれ式 (32) の対応物である $\mathcal{L}(\nu), \mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ のベクトルとなっている。このとき、 $\tilde{U}$ は次の形の微分方程式

$$(38) \quad \frac{d\tilde{U}}{dz} = \begin{pmatrix} \frac{\theta_0 + \kappa_1}{z} + \frac{\theta_1 + \kappa_1}{z-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_1 + \kappa_1}{z-1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u_0}{kz} & 0 & \frac{\kappa_1}{z} & 0 \\ \frac{u_1}{k(z-1)} & 0 & 0 & \frac{\kappa_1}{z-1} \end{pmatrix} \tilde{U},$$

をみたすことがわかる。 $\tilde{U} = (\tilde{u}_1(z), \tilde{u}_2(z), \tilde{u}_3(z), \tilde{u}_4(z))^T$, $\tilde{y}(z) = \tilde{u}_1(z)$ とおくと、middle convolution mc_{κ_1} を施して後の微分方程式

$$(39) \quad \frac{d\tilde{y}(z)}{dz} = \left(\frac{\theta_0 + \kappa_1}{z} + \frac{\theta_1 + \kappa_1}{z-1} \right) \tilde{y}(z),$$

が得られる。同様にして計算すると、middle convolution mc_{κ_2} を施して得られる微分方程式は

$$(40) \quad \frac{d\tilde{y}(z)}{dz} = \left(\frac{\theta_0 + \kappa_2}{z} + \frac{\theta_1 + \kappa_2}{z-1} \right) \tilde{y}(z),$$

となる。

さて、微分方程式 (39) の解は $\tilde{y}(z) = Cz^{\theta_0+\kappa_1}(z-1)^{\theta_1+\kappa_1}$ である。 $mc_{-\kappa_1}mc_{\kappa_1} = \text{id}$ となることから微分方程式 (39) に $mc_{-\kappa_1}$ を施してみよう。この場合では商空間をとる必要はなく、得られる微分方程式は

$$(41) \quad \frac{dW}{dz} = \left(\frac{1}{z} \begin{pmatrix} \theta_0 & \theta_1 + \kappa_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta_0 + \kappa_1 & \theta_1 \end{pmatrix} \right) W,$$

となり、Proposition 10 より得られる積分表示は

$$(42) \quad W = \begin{pmatrix} \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} \frac{1}{w} w^{\theta_0+\kappa_1} (w-1)^{\theta_1+\kappa_1} (z-w)^{-\kappa_1} dw \\ \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} \frac{1}{w-1} w^{\theta_0+\kappa_1} (w-1)^{\theta_1+\kappa_1} (z-w)^{-\kappa_1} dw \end{pmatrix},$$

($i = 0, 1, \infty$) となる。無限遠点にて対角化すると、

$$(43) \quad \tilde{W} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa_2+\theta_0}{\kappa_1-\kappa_2} & -\frac{k}{\kappa_2} \\ -\frac{\kappa_2+\theta_1}{\kappa_1-\kappa_2} & -\frac{k}{\kappa_2} \end{pmatrix}^{-1} W, \quad \frac{d\tilde{W}}{dz} = \left(\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} \right) \tilde{W}$$

となって微分方程式 (34) が復元される。そして、

$$(44) \quad \tilde{W} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{(\kappa_2+\theta_1)\kappa_2}{k(\kappa_1-\kappa_2)} & \frac{(\kappa_2+\theta_0)\kappa_2}{k(\kappa_1-\kappa_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} w^{\theta_0+\kappa_1-1} (w-1)^{\theta_1+\kappa_1} (z-w)^{-\kappa_1} dw \\ \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} w^{\theta_0+\kappa_1} (w-1)^{\theta_1+\kappa_1-1} (z-w)^{-\kappa_1} dw \end{pmatrix},$$

($i = 0, 1, \infty$) という解の積分表示が得られたことになる。これの第一成分をとることにより、関数

$$(45) \quad y(z) = \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} w^{\alpha-\gamma} (w-1)^{\gamma-\beta-1} (z-w)^{-\alpha} dw, \quad (i = 0, 1)$$

は超幾何微分方程式 (16) の解であることがわかる。

5.2. 4 点 $\{0, 1, t, \infty\}$ に確定特異点をもつ 2×2 フックス型微分方程式系. 3.2 節で扱った微分方程式 $D_Y(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$ 、つまり

$$(46) \quad \frac{dY}{dz} = A(z)Y, \quad A(z) = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_t}{z-t} = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix}.$$

で A_0, A_1, A_t は式 (20), (24) により与えられているものに対して middle convolution を考える。まず、convolution 行列は 6×6 行列となる。 A_0, A_1, A_t はそれぞれ 0 固有値をもち、 K_0, K_1, K_t はそれぞれ 1 次元となる。また、 $A_\infty =$

$-(A_0 + A_1 + A_t) = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$ より、 $\mathcal{L}(\nu) = \text{Ker}(B_0) \cap \text{Ker}(B_1) \cap \text{Ker}(B_t)$ は $\nu \neq 0, \kappa_1, \kappa_2$ のときは $\mathcal{L}(\nu) = \{0\}$ で middle convolution を施した後の微分方程式は 3×3 となる。 $\nu = 0$ のときは、middle convolution を施した後の微分方程式も同一の方程式となる。 $\nu = \kappa_1, \kappa_2$ のときには $\dim \mathcal{L}(\nu) = 1$ となり、middle convolution を施した後の微分方程式は 2×2 となる。

$\nu = \kappa_1$ のとき、middle convolution を施した後の微分方程式は Filipuk によって計算されている。また、積分変換の式も計算することができ、まとめると以下の定理のようになる。

Theorem 3. ([6, 20]) フックス型微分方程式系 $D_Y(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$ から $\nu = \kappa_1$ についての middle convolution を施して得られる微分方程式系は、 $D_Y(\kappa_1 + \theta_0, \kappa_1 + \theta_1, \kappa_1 + \theta_t, -\kappa_2; \lambda + \kappa_1/\mu, \mu; k)$ である。

また、 $Y = {}^t(y_1(z), y_2(z))$ をフックス型微分方程式系 $D_Y(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$ の解としたとき、関数 $\tilde{Y} = {}^t(\tilde{y}_1(z), \tilde{y}_2(z))$ を

$$(47) \quad \begin{aligned} \tilde{y}_1(z) &= \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} \left\{ \kappa_1 y_1(w) + (w - \tilde{\lambda}) \frac{dy_1(w)}{dw} \right\} \frac{(z - w)^{\kappa_1}}{w - \lambda} dw, \\ \tilde{y}_2(z) &= \frac{-\theta_\infty}{\kappa_2} \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} \frac{dy_2(w)}{dw} (z - w)^{\kappa_1} dw. \end{aligned}$$

で定めると、これはそれぞれの $i \in \{0, 1, t, \infty\}$ に対しフックス型微分方程式系 $D_Y(\kappa_1 + \theta_0, \kappa_1 + \theta_1, \kappa_1 + \theta_t, -\kappa_2; \lambda + \kappa_1/\mu, \mu; k)$ の解となる。

第六パンルヴェ方程式の対称性 $W(D_4^{(1)})$ のディンキン図式 $D_4^{(1)}$ の真ん中の頂点に対応する変換 s_2 は、式としては

$$(48) \quad \begin{aligned} s_2 : \theta_0 &\rightarrow \kappa_1 + \theta_0, \quad \theta_1 \rightarrow \kappa_1 + \theta_1, \quad \theta_t \rightarrow \kappa_1 + \theta_t, \quad \theta_\infty \rightarrow -\kappa_2, \\ \lambda &\rightarrow \lambda + \kappa_1/\mu, \quad \mu \rightarrow \mu, \quad t \rightarrow t. \end{aligned}$$

で与えられるが、これが $\nu = \kappa_1$ についての middle convolution から実現されたことになる。

よって、フックス型微分方程式系 $D_Y(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$ の解が求められれば、岡本変換 s_2 によって得られるフックス型微分方程式系 $D_Y(\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_t, \tilde{\theta}_\infty; \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}; \tilde{k})$ の解の積分表示を得ることができる。ところで、微分方程式 (21) の解は $\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ の場合には Hermite-Krichever 仮設法により求められる ([19])。この解を用いて Theorem 3 を適用することにより、 $\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty \in \mathbb{Z}$ かつ $\theta_0 + \theta_1 + \theta_t + \theta_\infty \in 2\mathbb{Z} + 1$ の場合に解の積分表示を得ることができる ([20])。rigid とは限らない場合でも「可積分」となり得るのである。

$\nu = \kappa_2$ の場合には、以下の定理と系が得られる。

Theorem 4. ([21])

$$(49) \quad \tilde{\lambda} = \lambda - \frac{\kappa_2}{\mu - \frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\theta_1}{\lambda-1} - \frac{\theta_t}{\lambda-t}}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\kappa_2 + \theta_0}{\tilde{\lambda}} + \frac{\kappa_2 + \theta_1}{\tilde{\lambda} - 1} + \frac{\kappa_2 + \theta_t}{\tilde{\lambda} - t} + \frac{\kappa_2}{\lambda - \tilde{\lambda}},$$

とおく。 $Y = {}^t(y_1(z), y_2(z))$ がフックス型微分方程式系 $D_Y(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$ の解ならば、以下で定義される関数 $\tilde{Y} = {}^t(\tilde{y}_1(z), \tilde{y}_2(z))$ はそれぞれの $i \in \{0, 1, t, \infty\}$ に対して $D_Y(\kappa_2 + \theta_0, \kappa_2 + \theta_1, \kappa_2 + \theta_t, \kappa_2 + \theta_\infty; \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}; k)$ の解となる。

(50)

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1(z) &= \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} \frac{dy_1(w)}{dw} (z-w)^{\kappa_2} dw, \\ \tilde{y}_2(z) &= \frac{\kappa_2 \lambda (\lambda-1)(\lambda-t)}{k(\lambda-\tilde{\lambda})} \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} \left\{ \frac{\frac{dy_1(w)}{dw} - \mu y_1(w)}{\lambda-w} + \frac{\mu}{\kappa_1} \frac{dy_1(w)}{dw} \right\} (z-w)^{\kappa_2} dw.\end{aligned}$$

Corollary 5. ([14, 21]) $y_1(z)$ がフックス型微分方程式 $D_{y_1}(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu)$ の解であれば、

$$(51) \quad \tilde{y}(z) = \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} y_1(w) (z-w)^{\kappa_2-1} dw,$$

は $D_{y_1}(\kappa_2 + \theta_0, \kappa_2 + \theta_1, \kappa_2 + \theta_t, \kappa_2 + \theta_\infty; \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ の解である。ここで、 $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ は式 (49) により定まるものである。

この系は Novikov ([14]) によって別の方法で得られたものと一致する。

μ を固定して $\lambda \rightarrow 0$ という極限を考えるとホインの微分方程式についての定理が得られる。

Theorem 6. ([11, 21])

$$(52) \quad \begin{aligned}(\mu - \alpha)(\mu - \beta) &= 0, \quad \gamma' = \gamma + 1 - \mu, \quad \delta' = \delta + 1 - \mu, \quad \epsilon' = \epsilon + 1 - \mu, \\ \alpha' &= 2 - \mu, \quad \beta' = -2\mu + \alpha + \beta + 1, \\ q' &= q + (1 - \mu)(\epsilon + \delta t + (\gamma - \mu)(t + 1)),\end{aligned}$$

とおき、 $v(w)$ をホインの微分方程式

$$(53) \quad \frac{d^2 v}{dw^2} + \left(\frac{\gamma'}{w} + \frac{\delta'}{w-1} + \frac{\epsilon'}{w-t} \right) \frac{dv}{dw} + \frac{\alpha' \beta' w - q'}{w(w-1)(w-t)} v = 0,$$

の解とする。それぞれの $i \in \{0, 1, t, \infty\}$ に対して

$$(54) \quad y(z) = \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} v(w) (z-w)^{-\mu} dw$$

は次のホインの微分方程式の解となる。

$$(55) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-t} \right) \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha \beta z - q}{z(z-1)(z-t)} y = 0.$$

この定理は、Kazakov と Slavyanov によって [11] で得られたものと本質的に同じものになっているが、導出法は異なっている。他の極限でもホインの微分方程式の積分変換が出てくるが、第六パnulヴェ方程式の初期値空間を用いると記述がすっきりとなる ([21])。

Theorem 6 において、 $\gamma, \delta, \epsilon, \alpha+1/2, \beta+1/2 \in \mathbb{Z}$ ならば $\gamma', \delta', \epsilon', \alpha'-\beta' \in \mathbb{Z}+1/2$ が成立する。また、 $\gamma', \delta', \epsilon', \alpha'-\beta' \in \mathbb{Z}+1/2$ のときのホインの微分方程式 (53)

では有限帯ポテンシャルに関連する解が知られており、モノドロミーの計算なども試みられている ([23, 7, 16, 17, 18])。よって、ホインの微分方程式 (55) において $\gamma, \delta, \epsilon, \alpha + 1/2, \beta + 1/2 \in \mathbb{Z}$ の場合に、 $\gamma', \delta', \epsilon', \alpha' - \beta' \in \mathbb{Z} + 1/2$ のときの有限帯ポテンシャルに関連する解を用いることで積分 (54) の形の解が得られる。

6. MIDDLE CONVOLUTION によるサイズの縮小化

$(A_0, A_1, \dots, A_r)$ が一組与えられたとき、addition と middle convolution を繰り返すことで行列のサイズを小さくしていつて微分方程式を簡易化していき、行き着く先を調べる。実際には、 $(A_0, A_1, \dots, A_r)$ から addition により各 A_i ($i = 1, \dots, r$) の kernel (固有値 0 の固有空間) を大きくし、 $A_0 - \nu$ の Kernel が大きくなるように ν を選んで middle convolution mc_ν を施す、という操作を繰り返す。行き着く先に関して次の定理が成立する。

Theorem 7. ([15] (c.f. [13]) 既約な $(A_0, A_1, \dots, A_r)$ に対し、addition と middle convolution を繰り返すことで、次元ベクトル $\mathbf{m}$ の行き着く先は以下になる。

- (1) Index of rigidity が 2 の場合には $\mathbf{m} = (1)$ に帰着される。
- (2) Index of rigidity が 0 の場合、ある正の数 d についての以下のいずれかに対応する。

$$(56) \quad \mathbf{m} = \begin{cases} (d, d; d, d; d, d; d, d) & D_4^{(1)} \text{ case, } (r = 3) \\ (d, d, d; d, d, d; d, d, d) & E_6^{(1)} \text{ case, } (r = 2) \\ (2d, 2d; d, d, d, d; d, d, d, d) & E_7^{(1)} \text{ case, } (r = 2) \\ (3d, 3d; 2d, 2d, 2d; d, d, d, d, d, d) & E_8^{(1)} \text{ case, } (r = 2) \end{cases}$$

- (3) (1), (2) 以外の場合、つまり index of rigidity が負の数になる場合、その数を決めると次元ベクトル $\mathbf{m}$ は有限個のパターンのいずれかに帰着される。たとえば index of rigidity が -2 の場合には $\mathbf{m} = (1, 1; 1, 1; 1, 1; 1, 1; 1, 1)$ など 13 個の場合のいずれかに帰着され、 $\mathbf{m} = (1, 1; 1, 1; 1, 1; 1, 1; 1, 1)$ には確定特異点 5 点の 2×2 のフックス型微分方程式系の一般形が対応する。

(1) に対応する主張は Katz によって得られていたが、Theorem 7 ではリジッドでない場合にも拡張されている。リジッドな常微分方程式として、超幾何微分方程式以外には Jordan-Pochhammer の微分方程式や一般超幾何級数 ${}_rF_{r-1}(z)$ の満たす r 階の微分方程式がある。ここで、Jordan-Pochhammer の微分方程式とは、 $b, c \in \{t_1, \dots, t_r, \infty\}$ としたときに

$$(57) \quad y(z) = \int_b^c (w - z)^{\rho-1} (w - t_1)^{\alpha_1} (w - t_2)^{\alpha_2} \dots (w - t_r)^{\alpha_r} dw$$

が満たす単独 r 階線形常微分方程式である。一般超幾何級数 ${}_rF_{r-1}(z)$ は

$$(58) \quad {}_rF_{r-1}(z) = {}_rF_{r-1} \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \\ \beta_1, \dots, \beta_{r-1} \end{matrix} ; z \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_j (\alpha_2)_j \dots (\alpha_r)_j}{j! (\beta_1)_j \dots (\beta_{r-1})_j} z^j,$$

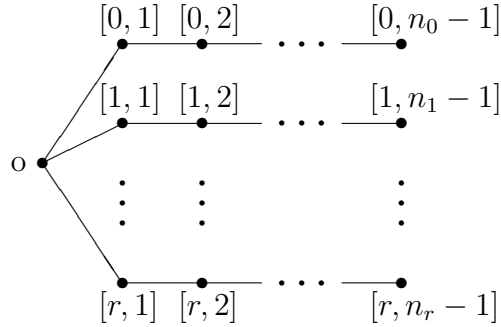
$$(\alpha)_j = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + j - 1),$$

で与えられる関数であり、積分表示をもっている。

なお、Theorem 7 では帰着される m に対するドリーニュ・シンプソン問題の可解性には触れられていない。

7. CRAWLEY-BOEVEY によるドリーニュ・シンプソン問題の解答

7.1. **Crawley-Boevey の定理.** Crawley-Boevey は、加法的ドリーニュ・シンプソン問題に対する解答を以下のディンキン図形をもつ一般化対称カルタン行列 C から決まる Kac-Moody リー代数のルート系を用いて与えた。



C の行と列にはそれぞれ頂点の集合 $I = \{o\} \cup \{[i, j] \mid 0 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n_i - 1\}$ が対応し、対角成分は $C_{vv} = 2$ ($v \in I$) であり、非対角成分は一つの辺で結ばれているか否かで -1 か 0 とする。 $v \in I$ に関する $\mathbb{Z}^I$ (各成分が整数である I で添字付けされた列ベクトルの集合) における reflection $s_v : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}^I$ を $s_v(\alpha) = \alpha - (\epsilon_v^T C \alpha) \epsilon_v$ で定義し、reflection から生成される群をワイル群と呼ぶ。ここで ϵ_v は v 成分のみが 1 である単位ベクトルとする。Fundamental region とは、 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ で $\text{support}(\alpha)$ (0 でない成分) はディンキン図形において連結であり、ベクトル $C\alpha$ の各成分は 0 以下であるものたちの集合とする。 C に付随する root の集合は、 ϵ_v ($v \in I$)、fundamental region の元たちと、これらのベクトルのワイル群による像および符号を一斉に反転させたものとして実現される。 ϵ_v ($v \in I$) から移される root を real root と呼び、fundamental region から移される root を imaginary root と呼ぶ。 $\mu \in \mathbb{C}^I$ に対して R_μ^+ を、positive root ($\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ で root となるもの) で $\mu \cdot \alpha := \sum_{v \in I} \mu_v \alpha_v = 0$ をみたすものたちの集合とする。 $\alpha \in \mathbb{Z}^I$ に対して $p(\alpha) = 1 - \frac{1}{2} \alpha^T C \alpha \in \mathbb{Z}$ とする。すると、root α に対しては $p(\alpha) \geq 0$ が成立し、等号成立条件はちょうど α が real root になることである。 Σ_μ を、 $\alpha \in R_\mu^+$ で $\alpha = \beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \dots$ という R_μ^+ の元による 2 つ以上の和に書けるとときには必ず $p(\alpha) > p(\beta^{(1)}) + p(\beta^{(2)}) + \dots$ をみたす α たちの集合とする。

Theorem 8. (Crawley-Boevey [3]) $\alpha \in \mathbb{Z}^I$ を $\alpha_o = n$ と $\alpha_{[i,j]} = \sum_{l=j+1}^{n_i} m_{i,l}$ で定め、 $\mu \in \mathbb{C}^I$ を $\mu_o = -\sum_{i=0}^r \lambda_{i,1}$ と $\mu_{[i,j]} = \lambda_{i,j} - \lambda_{i,j+1}$ で定める。加法的ドリーニュ・シンプソン問題が解をもつ (1) をみたす既約な $A_i \in C_i$ が存在する) ための必要十分条件は、 $\alpha \in \Sigma_\mu$ となることである。

α が real root のときには一斉相似変換を除いて加法的ドリーニュ・シンプソン問題の解はただ一つであり、 α が imaginary root のときには一斉相似変換を除いても既約な解が無数個存在する。

この定理は、加法的ドリーニュ・シンプソン問題の可解性をさきほどのディンキン図形から決まる quiver に関するある quiver variety の実在性の問題に言い換えて [2] での結果に帰着させて証明されているようであるが、[2] はドリーニュ・シンプソン問題とは無関係に書かれたようである。

ところで、 $\mathbb{Z}^I$ には reflection で Kac-Moody ルート系のワイル群の構造が入っているのだが、ワイル群の構造に関して Kac による本 ([9]) に載っている定理より、positive imaginary root に対してそれを reflection で移していったときに fundamental region の中に移る先は存在して唯一である。また、次元ベクトルに対する middle convolution はワイル群の合成で実現できる。よって、middle convolution の合成によって次元ベクトルを小さくしていったときに行き着く先の次元ベクトルは、middle convolution の合成の仕方に依らずに一意に決まる。しかし、固有値たちの行き着く先は一般に一意に決まらない。例えば $D_4^{(1)}$ 型では、5.2 節での変換によって固有値たちの行き着く先が変化しうる。

7.2. 各固有空間の次元の最大公約数が 1 にならない場合のドリーニュ・シンプソン問題. Index of rigidity の定義より、 $\text{idxm} = l$ ならば次元ベクトル $d\mathbf{m}$ (d は 2 以上の整数) に対応する行列の組の index of rigidity は、 $\text{idx}(d\mathbf{m}) = d^2l$ となることが従う。とくに、 $\text{idx}(\mathbf{m}) = 0 \Leftrightarrow \text{idx}(d\mathbf{m}) = 0$ 、 $\text{idx}(\mathbf{m}) < 0 \Leftrightarrow \text{idx}(d\mathbf{m}) < 0$ が成り立つ。次元ベクトル $\mathbf{m}$ を固定したときにドリーニュ・シンプソン問題が generic に可解であるということを、トレースの和 $= 0$ という条件をみたす固有値の組 $\underline{\lambda}$ に対して、それ以外の有限個の $(\lambda_{1,1}, \dots)$ についての超平面の外ではドリーニュ・シンプソン問題の解が存在するということで定める。

Theorem 9. ([15]) 次元ベクトル $\mathbf{m}$ の最大公約数は 1 とし、 d は 2 以上の整数とする。

(1) $\text{idx}(d\mathbf{m}) = 0$ ならば、 $d\mathbf{m}$ に対するドリーニュ・シンプソン問題はどんな固有値の組 $\underline{\lambda}$ に対しても解が存在しない。

(2) $\text{idx}(d\mathbf{m}) < 0$ ならば、「 $d\mathbf{m}$ に対するドリーニュ・シンプソン問題が generic に可解である」は「 $\mathbf{m}$ に対するドリーニュ・シンプソン問題が generic に可解である」ことは同値となる。

Theorem 9(1) より、index of rigidity が 0 で既約な $(A_0, A_1, \dots, A_r)$ に対し、addition と middle convolution を繰り返すことで次元ベクトル $\mathbf{m}$ の行き着く先は

$$(59) \quad \mathbf{m} = \begin{cases} (1, 1; 1, 1; 1, 1; 1, 1) & D_4^{(1)} \text{ case,} \\ (1, 1, 1; 1, 1, 1; 1, 1, 1) & E_6^{(1)} \text{ case,} \\ (2, 2; 1, 1, 1, 1; 1, 1, 1, 1) & E_7^{(1)} \text{ case,} \\ (3, 3; 2, 2, 2; 1, 1, 1, 1, 1, 1) & E_8^{(1)} \text{ case,} \end{cases}$$

のいずれかになることがわかる。これは Kostov によって別方法で本質的に得られている。

7.3. 固有値がすべて 0 の場合. $R_\mu^+ \subset R_0^+ = \{ \text{positive root 全体} \}$ より、与えられた次元ベクトル $\mathbf{m}$ に対して固有値がすべて 0 の場合にドリーニュ・シンプソン問

題が解をもてば、トレース = 0 の条件をみたすすべての固有値の場合についても解をもつ。

固有値がすべて 0 の場合 (nilpotent case) のドリーニュ・シンプソン問題については、次元ベクトル $\mathbf{m}$ が fundamental region に入る root になることが必要条件となる。言い換えると、次元ベクトル $\mathbf{m}$ が addition と middle convolution でサイズが小さくできないことが必要条件となる。

次元ベクトル $\mathbf{m}$ が fundamental region に入る root である場合については、以下のパターンでは解をもたず、それ以外の場合は解をもつ。

アフィンルート系の imaginary root で、次元ベクトル $\mathbf{m}$ の最大公約数が 1 でない場合 (以下で $d \geq 2$)。このときは任意の固有値でドリーニュ・シンプソン問題は解をもたない。

$$(60) \quad \mathbf{m} = \begin{cases} (d, d; d, d; d, d; d, d) & D_4^{(1)} \text{ case, } (r = 3) \\ (d, d, d; d, d, d; d, d, d) & E_6^{(1)} \text{ case, } (r = 2) \\ (2d, 2d; d, d, d, d; d, d, d, d) & E_7^{(1)} \text{ case, } (r = 2) \\ (3d, 3d; 2d, 2d, 2d; d, d, d, d, d, d) & E_8^{(1)} \text{ case, } (r = 2) \end{cases}$$

Kostov が almost special と呼んでいる場合。これは、以下で $d \geq 2$ の場合。このときは、generic な固有値でドリーニュ・シンプソン問題は解をもつ。

$$(61) \quad \mathbf{m} = \begin{cases} (d, d-1, 1; d, d; d, d; d, d) \\ (d, d, d-1, 1; d, d, d; d, d, d) \\ (2d, 2d; d, d, d, d-1, 1; d, d, d, d) \\ (3d, 3d; 2d, 2d, 2d; d, d, d, d, d, d-1, 1) \end{cases}$$

8. 不確定特異点をもつ場合の MIDDLE CONVOLUTION

8.1. 背景. 不確定特異点を含みうる線形常微分方程式系

$$(62) \quad \frac{dY}{dz} = \left(- \sum_{j=1}^{m_0} A_j^{(0)} z^{j-1} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i} \frac{A_j^{(i)}}{(z-t_i)^{j+1}} \right) Y, \quad Y \in V = \mathbb{C}^n$$

を考察していく。 $A_j^{(i)}$ はすべて $n \times n$ 行列としている。特異点は $z = t_1, \dots, t_r, \infty$ である。 $m_i = 0$ ($i \neq 0$) ならば、 $z = t_i$ は確定特異点であり、 $m_0 = 0$ ならば $z = \infty$ は確定特異点である、とくに、 $m_0 = \dots = m_r = 0$ の場合は Fuchs 型微分方程式系となり、前に考察したものとなっている。

さて、川上拓志は、(∞ 以外の) 不確定特異点も含む場合の middle convolution を、一般化大久保型方程式に帰着させることで考察した ([12])。ここで、大久保型方程式とは

$$(63) \quad (zI_n - T) \frac{d\Psi}{dz} = A\Psi,$$

という形の微分方程式で、 T は対角行列としたものである。 T が対角行列 (または対角化可能な行列) とすると、 T の固有値が確定特異点となる。また、 $z = \infty$ も確定特異点となっている。一般大久保型方程式とは、微分方程式 (63) であって T に条件をつけないものである。 T の固有値 t が半単純でない、つまり固有値 t の

固有空間の次元とその広義固有空間の次元が異なるとき、一般に $z = t$ は不確定特異点となってしまう。また、 $z = \infty$ は確定特異点となっている。

大久保型方程式では convolution に対応するオイラー変換は記述しやすい。つまり、パラメーター μ に付随するオイラー変換の結果は、式 (63) では右辺の行列を $A + \mu I_n$ と変えたものとなっている。川上はこの命題を念頭におき、[12] にて (∞ 以外の) 不確定特異点も含む場合の middle convolution を、一般大久保型方程式に対応させることで考察した。そこでは、一般大久保型方程式 (63) から $m_0 = 0$ の場合の微分方程式 (62) への対応を構築しており、その全射性が重要性をもっている。

本稿では、不確定特異点も含む場合の middle convolution を一般大久保型方程式を経由せずに直接定義していく。直接定義のメリットは、 $m_0 \neq 0$ の場合にも定義できること、および商空間をとり方が明示的であることである。

$\mathbf{A} = (A_{m_0}^{(0)}, \dots, A_1^{(0)}, A_{m_1}^{(1)}, \dots, A_0^{(1)}, A_{m_2}^{(2)}, \dots, A_0^{(r)})$ とおく。 $\mathbf{A}$ に対して、convolution(商空間をとる前)、middle convolution を定義していく。

8.2. Convolution とオイラー変換. $\mathbf{A} = (A_{m_0}^{(0)}, \dots, A_1^{(0)}, A_{m_1}^{(1)}, \dots, A_0^{(r)})$ と書き ($A_j^{(i)} \in \text{End}(V)$)、 $V' = V^{\oplus M} = \mathbb{C}^{nM}$, $M = r + \sum_{i=0}^r m_i$, $\mu \in \mathbb{C}$ としたとき、 $c_\mu(\mathbf{A}) = \tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{A}_{m_0}^{(0)}, \dots, \tilde{A}_1^{(0)}, \tilde{A}_{m_1}^{(1)}, \dots, \tilde{A}_0^{(r)})$, $\tilde{A}_j^{(i)} \in \text{End}(V') = \mathbb{C}^{nM \times nM}$ を以下のように定義する。(空白部分は 0 とする。)

$$(64) \quad \begin{aligned} \tilde{A}_{m_0}^{(0)} &= \begin{pmatrix} A_{m_0}^{(0)} & \cdots & A_2^{(0)} & A_1^{(0)} & A_{m_1}^{(1)} & \cdots & A_0^{(1)} & A_{m_2}^{(2)} & \cdots & A_0^{(r)} \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}_j^{(0)} &= \begin{pmatrix} & & & \mu & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \mu & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \mu & & \\ A_{m_0}^{(0)} & \cdots & A_2^{(0)} & A_1^{(0)} & A_{m_1}^{(1)} & \cdots & A_0^{(1)} & A_{m_2}^{(2)} & \cdots & A_0^{(r)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$(65) \quad \tilde{A}_{m_i}^{(i)} = \begin{pmatrix} & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ A_{m_0}^{(0)} & \cdots & A_{m_i}^{(i)} & \cdots & A_1^{(i)} & A_0^{(i)} + \mu & A_{m_{i+1}}^{(i+1)} & \cdots & A_0^{(r)} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_j^{(i)} = \begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & \mu & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mu & & \\ A_{m_0}^{(0)} & \cdots & A_{m_i}^{(i)} & \cdots & A_1^{(i)} + \mu & A_0^{(i+1)} & \cdots & A_0^{(r)} \end{pmatrix}.$$

これを成分を用いて書く。

(66)

$$V' = \mathbb{C}^{nM} = \mathbb{C}^{nm_0} \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}^{n(m_i+1)} \ni \begin{pmatrix} v_{m_0}^{(0)} \\ \vdots \\ v_1^{(0)} \\ v_{m_1}^{(1)} \\ \vdots \\ v_0^{(r)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{m_0}^{(0)'} \\ \vdots \\ v_1^{(0)'} \\ v_{m_1}^{(1)'} \\ \vdots \\ v_0^{(r)'} \end{pmatrix} = \tilde{A}_j^{(i)} \begin{pmatrix} v_{m_0}^{(0)} \\ \vdots \\ v_1^{(0)} \\ v_{m_1}^{(1)} \\ \vdots \\ v_0^{(r)} \end{pmatrix}$$

とおくと、 $i = 0$ のときは

$$(67) \quad v_{j'}^{(i')'} = \begin{cases} \mu v_{j'-j}^{(0)} & i' = 0, j' > j, \\ \sum_{i_0=0}^r \sum_{j_0=\delta_{i_0,0}}^{m_{i_0}} A_{j_0}^{(i_0)} v_{j_0}^{(i_0)} & i' = 0, j' = j, \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$

$i \neq 0$ のときは

$$(68) \quad v_{j'}^{(i')'} = \begin{cases} \mu v_0^{(i)} + \sum_{i_0=0}^r \sum_{j_0=\delta_{i_0,0}}^{m_{i_0}} \frac{\mu v_{j'-j}^{(i)}}{0} A_{j_0}^{(i_0)} v_{j_0}^{(i_0)} & i' = i, j' > j, \\ & i' = i, j' = j, \\ & \text{その他.} \end{cases}$$

となる。

次の Proposition は、行列の convolution はオイラー変換に対応していることを示している。

Proposition 10. ([22]) $Y = \begin{pmatrix} y_1(z) \\ \vdots \\ y_n(z) \end{pmatrix}$ は、微分方程式

$$(69) \quad \frac{dY}{dz} = \left(- \sum_{j=1}^{m_0} A_j^{(0)} z^{j-1} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i} \frac{A_j^{(i)}}{(z - t_i)^{j+1}} \right) Y$$

の解とする。

(i) γ を適切な径路とし、 $\mathbb{C}^{nM}$ に値をとる関数 U を

$$(70) \quad U = \begin{pmatrix} U_{m_0}^{(0)}(z) \\ \vdots \\ U_1^{(0)}(z) \\ U_{m_1}^{(1)}(z) \\ \vdots \\ U_0^{(r)}(z) \end{pmatrix}, \quad U_j^{(0)}(z) = - \begin{pmatrix} \int_{\gamma} w^{j-1} y_1(w) (z-w)^{\mu} dw \\ \vdots \\ \int_{\gamma} w^{j-1} y_n(w) (z-w)^{\mu} dw \end{pmatrix} \quad (j=1, \dots, m_0)$$

$$(71) \quad U_j^{(i)}(z) = \begin{pmatrix} \int_{\gamma} (w-t_i)^{-j-1} y_1(w) (z-w)^{\mu} dw \\ \vdots \\ \int_{\gamma} (w-t_i)^{-j-1} y_n(w) (z-w)^{\mu} dw \end{pmatrix} \quad (i \neq 0)$$

で定義すると、これは

$$(72) \quad \frac{dU}{dz} = \left(- \sum_{j=1}^{m_0} \tilde{A}_j^{(0)} x^{j-1} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i} \frac{\tilde{A}_j^{(i)}}{(x-t_i)^{j+1}} \right) U.$$

の解となる。

(ii) $\mu = -N - 1$, $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば、

$$(73) \quad U_j^{(0)}(z) = - \left(\frac{d}{dz} \right)^N z^{j-1} Y, \quad U_j^{(i)}(z) = \left(\frac{d}{dz} \right)^N \frac{Y}{(z-t_i)^{j+1}}, \quad (i \neq 0)$$

としたときの U は微分方程式 (72) の解となる。

8.3. **Convolution** での部分空間. Middle convolution を定めるために商空間を決めよう。 $V' = V^{\oplus M} = \mathbb{C}^{nM}$ の部分空間を以下のように定める。

$$(74) \quad \mathcal{K}^{(i)} = \left\{ \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ v_{m_i}^{(i)} \\ v_{m_i-1}^{(i)} \\ \vdots \\ v_0^{(i)} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} A_{m_i}^{(i)} & A_{m_i-1}^{(i)} & \cdots & A_0^{(i)} \\ 0 & A_{m_i}^{(i)} & \cdots & A_1^{(i)} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{m_i}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{m_i}^{(i)} \\ v_{m_i-1}^{(i)} \\ \vdots \\ v_0^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{K} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{K}^{(i)}, \quad \mathcal{L}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} v_{m_0}^{(0)} \\ \vdots \\ v_1^{(0)} \\ v_{m_1}^{(1)} \\ \vdots \\ v_0^{(r)} \end{pmatrix} \left| \sum_{i=0}^r \sum_{j=\delta_{i,0}}^{m_i} A_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0 \right. \right\},$$

$$\mathcal{L}(\mu) = \left\{ \begin{pmatrix} v_{m_0}^{(0)} \\ \vdots \\ v_1^{(0)} \\ v_{m_1}^{(1)} \\ \vdots \\ v_0^{(r)} \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} v_j^{(i)} = 0 \ (i \neq 0, j \neq 0), \\ v_0^{(1)} = \dots = v_0^{(r)} = -\ell, \\ A_{m_0}^{(0)} \dots A_1^{(0)} A_0^{(0)} - \mu \\ 0 \ A_{m_0}^{(0)} \dots A_1^{(0)} \\ 0 \ 0 \ \ddots \ \vdots \\ 0 \ \dots \ 0 \ A_{m_0}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{m_0}^{(0)} \\ \vdots \\ v_1^{(0)} \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Proposition 11. ([22]) $\mathcal{K}$ と $\mathcal{L}(\mu)$ は $\langle \tilde{\mathbf{A}} \rangle$ の作用で不変である。つまり、 $\tilde{A}_j^{(i)} \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ と $\tilde{A}_j^{(i)} \mathcal{L}(\mu) \subset \mathcal{L}(\mu)$ がすべての i, j で成立する。

Proof. $\mathcal{K}$ に関する証明を与えておく。 $v = (v_{m_0}^{(0)} \dots v_1^{(0)} v_{m_1}^{(1)} \dots v_0^{(r)})^T \in \mathcal{K}$ としよう。すると、 $(v_{m_1}^{(0)} \dots v_1^{(0)})^T = 0$ と $(v_{m_i}^{(i)} \dots v_0^{(i)})^T \in \mathcal{K}^{(i)} (\subset V^{(i)})$ が $i = 1, \dots, r$ で成立する。よって、 $\sum_{j=1}^{m_0} A_j^{(0)} v_j^{(0)} = 0$ と $\sum_{j=0}^{m_i} A_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0$ が $i = 1, \dots, r$ に対して成り立つ。 $\tilde{A}_j^{(i)}$ の定義より、 $i' \neq i$ のときの $\tilde{A}_j^{(i)} v$ の (i') 成分は 0 となる。 $\tilde{A}_j^{(i)} v$ ($i \neq 0$) の (i) 成分は

$$(75) \quad \tilde{A}_j^{(i)} v = \begin{pmatrix} \mu v_{m_i-j}^{(i)} \\ \vdots \\ \mu v_1^{(i)} \\ \mu v_0^{(i)} + \sum_{i'=0}^r \sum_{j'=\delta_{i',0}}^{m_{i'}} A_{j'}^{(i')} v_{j'}^{(i')} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} v_{m_i-j}^{(i)} \\ \vdots \\ v_1^{(i)} \\ v_0^{(i)} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

と書け、 $(v_{m_i}^{(i)} \dots v_0^{(i)})^T \in \mathcal{K}^{(i)}$ より $(v_{m_i-j}^{(i)} \dots v_0^{(i)} 0 \dots)^T \in \mathcal{K}^{(i)}$ が従う。よって、 $i = 1, \dots, r$ に対して $\tilde{A}_j^{(i)} v \in \mathcal{K}$ が成り立つ。また、 $(v_{m_0}^{(0)} \dots v_1^{(0)})^T = 0$ から $\tilde{A}_j^{(0)} v = 0 \in \mathcal{K}$ が成り立つ。□

8.4. Middle convolution. Convolution $c_\mu(\mathbf{A}) = \tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{A}_{m_0}^{(0)}, \dots, \tilde{A}_1^{(0)}, \tilde{A}_{m_1}^{(1)}, \dots, \tilde{A}_0^{(r)})$ での各成分は $V' = \mathbb{C}^{nM}$ への作用として定義されていたが、さきほどの Proposition より、 $\tilde{\mathbf{A}}$ の各成分は $\mathcal{K} + \mathcal{L}(\mu)$ に閉じて作用する。よって、 $V' / (\mathcal{K} + \mathcal{L}(\mu))$ にも作用が定義できる。

ベクトル空間 $V' / (\mathcal{K} + \mathcal{L}(\mu))$ への $\tilde{\mathbf{A}}$ の作用を $mc_\mu(\mathbf{A})$ と記す。 $V' / (\mathcal{K} + \mathcal{L}(\mu))$ を作用込みで $mc_\mu(V) (= mc_\mu(\mathbb{C}^n))$ と記し、ベクトル空間 V の μ に関する middle convolution と呼ぶ。Dettweiler と Reiter が [4] にてフックス型微分方程式 (とそのモノドロミー) に対して理論展開したものと同様に、以下の命題たちが成り立つ。

Proposition 12. ([22]) (i) $\mu \neq 0$ ならば、 $\mathcal{K} \cap \mathcal{L}(\mu) = \{0\}$.
(ii) $\mu = 0$ ならば、 $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(\mu)$.

Proposition 13. ([22]) $\bigcup_{i=0}^r \bigcup_{j'=\delta_{i',0}}^{m_{i'}} \text{Im}(A_{j'}^{(i')}) = V$ が成立するならば、写像

$$(76) \quad (v_{m_0}^{(0)} \dots v_1^{(0)} v_{m_1}^{(1)} \dots v_0^{(r)})^T \mapsto \sum_{i=0}^r \sum_{j=\delta_{i,0}}^{m_i} A_j^{(i)} v_j^{(i)}$$

は同型 $mc_0(V) \simeq V$ を与える。

Proposition 14. ([22]) (i) V が既約ならば、 $mc_{\mu_1}(V)$ も既約。

(ii) V が既約ならば、 $V \simeq mc_{-\mu}(mc_{\mu}(V))$ 。

Conjecture 1. V が既約ならば、 $mc_{\mu_1+\mu_2}(V) \simeq mc_{\mu_2}(mc_{\mu_1}(V))$ 。

8.5. **Addition.** $\bar{\mu} = (\mu_{m_0}^{(0)}, \dots, \mu_1^{(0)}, \mu_{m_1}^{(1)}, \dots, \mu_0^{(r)}) \in \mathbb{C}^M$ とし、

$$(77) \quad M_{\bar{\mu}}(\mathbf{A}) = (A_{m_0}^{(0)} + \mu_{m_0}^{(0)} I_n, \dots, A_1^{(0)} + \mu_1^{(0)} I_n, A_{m_1}^{(1)} + \mu_{m_1}^{(1)} I_n, A_0^{(r)} + \mu_0^{(r)} I_n)$$

を $\mathbf{A}$ の $\bar{\mu}$ に付随する addition と呼ぶ。これは、微分方程式

$$(78) \quad \frac{dY}{dz} = \left(- \sum_{j=1}^{m_0} A_j^{(0)} z^{j-1} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i} \frac{A_j^{(i)}}{(z - t_i)^{j+1}} \right) Y$$

の解において、以下のように関数倍する変換に対応する。

$$(79) \quad Y \mapsto \exp \left(- \sum_{j=1}^{m_0} \frac{\mu_j^{(0)}}{j} z^j - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\mu_j^{(i)}}{j(z - t_i)^{j+1}} \right) \prod_{i=1}^r (z - t_i)^{\mu_0^{(i)}} Y.$$

8.6. **Index of rigidity.** $\mathbf{A} = (A_{m_0}^{(0)}, \dots, A_1^{(0)}, A_{m_1}^{(1)}, \dots, A_0^{(r)})$, $A_j^{(i)} \in \text{End}(V)$ とし、 $A^{(i)} \in \text{End}(V^{\oplus(m_i+1)})$ ($i = 0, \dots, r$) を

$$(80) \quad A^{(i)} = \begin{pmatrix} A_{m_i}^{(i)} & A_{m_i-1}^{(i)} & \dots & A_0^{(i)} \\ 0 & A_{m_i}^{(i)} & \dots & A_1^{(i)} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{m_i}^{(i)} \end{pmatrix},$$

で定める。ただし、 $A_0^{(0)} = -(A_0^{(1)} + \dots + A_0^{(r)})$ である。 $\mathcal{C}^{(i)}$ を、 $\text{End}(V^{\oplus(m_i+1)})$ の部分空間として以下で定める。

$$(81) \quad \mathcal{C}^{(i)} = \left\{ C^{(i)} = \begin{pmatrix} C_{m_i}^{(i)} & C_{m_i-1}^{(i)} & \dots & C_0^{(i)} \\ 0 & C_{m_i}^{(i)} & \dots & C_1^{(i)} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C_{m_i}^{(i)} \end{pmatrix} \middle| A^{(i)} C^{(i)} = C^{(i)} A^{(i)} \right\}.$$

このとき、

$$(82) \quad \text{idx}(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^r \dim(\mathcal{C}^{(i)}) - \left(\left(\sum_{i=0}^r m_i \right) + r - 1 \right) (\dim(V))^2$$

を、 $\mathbf{A}$ の index of rigidity と呼ぶ。条件 $A^{(i)} C^{(i)} = C^{(i)} A^{(i)}$ は

$$(83) \quad \sum_{l=0}^k \left(A_{m_i-l}^{(i)} C_{m_i-(k-l)}^{(i)} - C_{m_i-(k-l)}^{(i)} A_{m_i-l}^{(i)} \right) = 0, \quad k = 0, \dots, m_i.$$

と書き換えられ、この表示より以下の Proposition が成立する。

Proposition 15. *Index of rigidity* は *addition* により不変である。つまり $\text{idx}(M_{\bar{\mu}}(\mathbf{A})) = \text{idx}(\mathbf{A})$ がすべての $\bar{\mu} \in \mathbb{C}^M$ で成り立つ。

Conjecture 2. V が既約ならば、*index of rigidity* は *middle convolution* により不変である。つまり、 $\text{idx}(mc_\mu(\mathbf{A})) = \text{idx}(\mathbf{A})$ がすべての $\mu \in \mathbb{C}$ で成り立つ。

これから、条件式 (83) を i を固定して $m_i = 1$ の場合に調べる。添え字 (i) を省略すると条件式は

$$(84) \quad A_1 C_1 = C_1 A_1, \quad A_1 C_0 - C_0 A_1 + A_0 C_1 - C_1 A_0 = 0.$$

と書き換えられる。

以下、 A_1 は半単純とする。このとき、ある正則行列 P を用いて

$$(85) \quad P^{-1} A_1 P = \begin{pmatrix} d_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 I_{n_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_k I_{n_k} \end{pmatrix},$$

(d_i は相異なる) とできる。 $P^{-1} A_0 P$ での対応する対角ブロックも半単純と仮定する。対角ブロックを対角化することで、

$$(86) \quad Q^{-1} P^{-1} A_0 P Q = \begin{pmatrix} A_0^{[1,1]} & A_0^{[1,2]} & \cdots & A_0^{[1,k]} \\ A_0^{[2,1]} & A_0^{[2,2]} & \cdots & A_0^{[2,k]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_0^{[k,1]} & A_0^{[k,2]} & \cdots & A_0^{[k,k]} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q^{[1]} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q^{[2]} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & Q^{[k]} \end{pmatrix},$$

$$A_0^{[l,l]} = \begin{pmatrix} d_{l,1} I_{n_{l,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{l,2} I_{n_{l,2}} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{l,k_l} I_{n_{l,k_l}} \end{pmatrix}, \quad d_{l,i} \neq d_{l,j} \ (i \neq j).$$

を満たすような正則行列 Q をとることができる。また、 $Q^{-1} P^{-1} A_1 P Q = P^{-1} A_1 P$ が成立する。 $A_1 C_1 = C_1 A_1$ より、 C_1 は

$$(87) \quad Q^{-1} P^{-1} C_1 P Q = \begin{pmatrix} C_1^{[1]} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_1^{[2]} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_1^{[k]} \end{pmatrix},$$

$$C_1^{[l]} = \begin{pmatrix} C_1^{[l],[1,1]} & C_1^{[l],[1,2]} & \cdots & C_1^{[l],[1,k_l]} \\ C_1^{[l],[2,1]} & C_1^{[l],[2,2]} & \cdots & C_1^{[l],[2,k_l]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1^{[l],[k_l,1]} & C_1^{[l],[k_l,2]} & \cdots & C_1^{[l],[k_l,k_l]} \end{pmatrix},$$

と書ける。ここで $C_1^{[l]}$ は $n_l \times n_l$ 行列、 $C_1^{[l],[i,j]}$ は $n_{l,i} \times n_{l,j}$ 行列である。

$$(88) \quad Q^{-1}P^{-1}C_0PQ = \begin{pmatrix} C_0^{[1,1]} & C_0^{[1,2]} & \cdots & C_0^{[1,k]} \\ C_0^{[2,1]} & C_0^{[2,2]} & \cdots & C_0^{[2,k]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_0^{[k,1]} & C_0^{[k,2]} & \cdots & C_0^{[k,k]} \end{pmatrix},$$

と記すと、 $A_1C_0 - C_0A_1 + A_0C_1 - C_1A_0 = 0$ より $C_1^{[l],[i,j]} = 0$ ($i \neq j$) と $C_0^{[i,j]} = -(A_0^{[i,j]}C_1^{[j]} - C_1^{[i]}A_0^{[i,j]})/(d_i - d_j)$ ($i \neq j$) が成立することがわかる。よって、独立なパラメーターは $C_1^{[l],[i,i]}$ と $C_0^{[i,i]}$ の各成分であり、その次元は

$$(89) \quad \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{k_l} (n_{l,j})^2 + \sum_{l=1}^k (n_l)^2$$

である。

これより、 A_1 と A_0 がさきほどの仮定をみたし $d_1 = 0$ かつ $d_{1,1} = 0$ のときに、 $\mathcal{K}$ の定義で出てきた以下の条件を調べていく。

$$(90) \quad A_1v_0 = 0, \quad A_1v_1 + A_0v_0 = 0.$$

ここで

$$(91) \quad v_1 = Q^{-1}P^{-1} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ \vdots \\ v_{1,n} \end{pmatrix}, \quad v_0 = Q^{-1}P^{-1} \begin{pmatrix} v_{0,1} \\ \vdots \\ v_{0,n} \end{pmatrix},$$

とおく。 $A_1v_0 = 0$ より $v_{0,i} = 0$ ($i > n_1$) が成立し、さらに

$$(92) \quad (A_0v_0)_i = \begin{cases} 0, & i \leq n_{1,1}, \\ d_{1,j}v_{0,i}, & n_{1,1} + \cdots + n_{1,j-1} < i \leq n_{1,1} + \cdots + n_{1,j-1} + n_{1,j}, \end{cases}$$

が $i \leq n_1$ のときに満たされる。他方、

$$(93) \quad (A_1v_1)_i = \begin{cases} 0, & i \leq n_1, \\ d_jv_{1,i}, & n_1 + \cdots + n_{j-1} < i \leq n_1 + \cdots + n_{j-1} + n_j, \end{cases}$$

より、 $A_1v_1 + A_0v_0 = 0$ から $v_{0,i} = 0$ ($n_{1,1} < i \leq n_1$) が成立し、 $v_{1,i}$ ($n_1 < i$) もそれぞれ定まる。よって、 $v_{0,1}, \dots, v_{0,n_{1,1}}, v_{1,1}, \dots, v_{1,n_1}$ が独立にとれる変数であり、式 (90) をみたすベクトル v_0, v_1 たちのなす空間の次元は $n_1 + n_{1,1}$ である。

ここでの設定のもとで middle convolution を行った結果の行列を記述する。 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_0$ を middle convolution を行ったのちの商空間での行列表示とする。 $\tilde{A}_1$ を対角

化することで、ある正則行列 R を用いて

(94)

$$R^{-1}\tilde{A}_1R = \begin{pmatrix} d_2I_{n_2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & d_kI_{n_k} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}' = \begin{pmatrix} (d_{1,2}+\mu)I_{n_{1,2}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (d_{1,k_1}+\mu)I_{n_{1,k_1}} \end{pmatrix},$$

$$R^{-1}\tilde{A}_0R = \begin{pmatrix} A_0^{[2,2]} + 2\mu I_{n_2} & * & \cdots & \cdots & * \\ * & \ddots & * & \ddots & * \\ \vdots & * & A_0^{[k,k]} + 2\mu I_{n_k} & * & * \\ \vdots & \ddots & * & \tilde{A}' & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

とできる。よって、 A_1 の固有値の集合と $\tilde{A}_1$ の固有値の集合は一致し、その重複度は 0 固有値以外では一致している。0 固有値の重複度の違いは、 A_1 と $\tilde{A}_1$ のサイズの違いに対応している。 $i \neq 1$ のとき、 A_1 の固有値 d_i での固有空間のブロックにおける A_0 (つまり $A_0^{[i,i]}$) の固有値 α での固有空間の次元と、 $\tilde{A}_1$ の固有値 d_i での固有空間のブロックにおける $\tilde{A}_0$ の固有値 $\alpha + 2\mu$ での固有空間の次元は等しくなる。 $\alpha \neq 0$ のとき、 $\alpha + \mu \neq 0$ という条件のもとで A_1 の固有値 d_1 での固有空間のブロックにおける A_0 の固有値 α での固有空間の次元と、 $\tilde{A}_1$ の固有値 d_1 での固有空間のブロックにおける $\tilde{A}_0$ の固有値 $\alpha + \mu$ での固有空間の次元は等しくなる。また、 $\tilde{n}$ を行列 $\tilde{A}_0$ のサイズとすると、 A_1 の固有値 d_1 での固有空間のブロックにおける A_0 の固有値 0 での固有空間の次元と $\tilde{n} - n_{1,1}$ の和は、 $\tilde{A}_1$ の固有値 d_1 での固有空間のブロックにおける $\tilde{A}_0$ の固有値 0 での固有空間の次元と等しくなる。 $m_i = 0$ のときに固有値の重複度を次元ベクトル $\mathbf{n}_i = (n_{1,1}, n_{2,1}, \dots, n_{k,1})$ のような形で表したが、 $m_i = 1$ のときで A_1, A_0 がここまでで述べた形であるとき、次元ベクトルに対応するものを

$$(95) \quad (n_1, n_2, \dots, n_k) - ((n_{1,1}, \dots, n_{1,k_1}), (n_{2,1}, \dots, n_{2,k_2}), \dots, (n_{k,1}, \dots, n_{k,k_k}))$$

と記す。 $m_1 = 1$ で他の m_i ($i \neq 1$) が 0 となっているとき、middle convolution と addition を繰り返して行列のサイズを小さくしていったときの行き着く先として、次の Proposition が成り立つ。

Proposition 16. ([22]) $m_1 = 1$ かつ $m_0 = m_2 = \dots = m_r = 0$ とし、既約性と半単純性を仮定し、固有値たち $\underline{\lambda}$ は *generic* とする。

(i) もし $\text{idx}(\mathbf{A}) = 2$ ならば、 $\mathbf{A}$ は *middle convolution* と *addition* を繰り返すことにより、 $r = 1$, $A_1^{(1)} = A_0^{(1)} = 0$ という自明な場合に帰着される。

(ii) もし、 $\text{idx}(\mathbf{A}) = 0$ ならば、 $\mathbf{A}$ は *middle convolution* と *addition* を繰り返すこ

とにより、以下のいずれかに帰着される。

$$\begin{aligned}
(96) \quad D_4^{(1)} &: (l, l) - ((l), (l)), (l, l), (l, l) \\
E_6^{(1)} &: (l, l, l) - ((l), (l), (l)), (l, l, l) \\
E_7^{(1)} &: (l, l, l, l) - ((l), (l), (l), (l)), (2l, 2l) \\
&\quad (2l, 2l) - ((l, l), (l, l)), (l, l, l, l) \\
&\quad (3l, 2l) - ((l, l, l), (2l)), (l, l, l, l) \\
E_8^{(1)} &: (2l, 2l, 2l) - ((l, l), (l, l), (l, l)), (3l, 3l) \\
&\quad (3l, 3l, 2l) - ((l, l, l), (l, l, l), (2l)), (4l, 4l) \\
&\quad (5l, 4l, 3l) - ((l, l, l, l, l), (2l, 2l), (3l)), (6l, 6l) \\
&\quad (5l, 4l) - ((l, l, l, l, l), (2l, 2l)), (3l, 3l, 3l) \\
&\quad (3l, 3l) - ((l, l, l), (l, l, l)), (2l, 2l, 2l) \\
&\quad (5l, 3l) - ((l, l, l, l, l), (3l)), (2l, 2l, 2l, 2l) \\
&\quad (4l, 3l) - ((2l, 2l), (3l)), (l, l, l, l, l, l)
\end{aligned}$$

$m_0 = m_1 = \dots = m_r = 0$ のときの (ii) に対応するものは (59) で述べられている 4 つの場合で、さらに既約性により最大公約数 l は 1 となる。Proposition 16 (ii) のリストにおいて、 $l \geq 2$ の場合で既約なものが存在するかは不明であり、そもそも $l = 1$ の場合でも不明である。

例として、 $r = 1$, $m_0 = 0$, $m_1 = 1$ で 2×2 の場合で、 $A_1^{(1)}$, $A_0^{(1)}$ のそれぞれの固有値が相異なる場合を考える。このときの index of rigidity は 2 であり、フックス型のときでは rigid な場合に対応する。 $A_1^{(1)}$ を対角化し、 $A_1^{(1)}$, $A_0^{(1)}$ の両方に addition を施すことにより

$$(97) \quad A_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad A_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix},$$

とおくことができる。これに対応する微分方程式 $dY/dz = (A_1^{(1)}/z^2 + A_0^{(1)}/z)Y$ は、 $z = 1/x$ と変数変換することでクンマーの合流型超幾何微分方程式に帰着される。ところで

$$(98) \quad \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & A_0^{(1)} \\ 0 & A_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{1,2} \\ 0 & \beta & a_{2,1} & a_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の kernel は 2 次元となり、 $\dim(\mathcal{K}) = 2$ となる。もし $A_0^{(1)}$ が 0 固有値をもてば、 $A_1^{(1)}$, $A_0^{(1)}$ は同時固有ベクトルをもつことが示され既約性が壊れるので、 $A_0^{(1)}$ は 0 固有値をもたない。 $-A_0^{(1)}$ の固有値 $\mu (\neq 0)$ に対して $\dim(\mathcal{K} + \mathcal{L}(\mu)) = 3$ となり、middle convolution mc_μ により一階の微分方程式に落ちることになる。

他の例として、 $r = 1$, $m_0 = 0$, $m_1 = 1$ で 2×2 の場合で、 $A_1^{(1)}$ は冪零であり $A_0^{(1)}$ の固有値が相異なる場合を考える。このときの index of rigidity も 2 となる。

$$(99) \quad A_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix},$$

とおくとき、addition を施したものでも

$$(100) \quad \begin{pmatrix} A_1^{(1)} + \beta I_2 & A_0^{(1)} + \alpha I_2 \\ 0 & A_1^{(1)} + \beta I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 1 & a_{1,1} + \alpha & a_{1,2} \\ 0 & \beta & a_{2,1} & a_{2,2} + \alpha \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となることから、 $a_{2,1} \neq 0$ ならばこれの kernel はつねに 1 次元以下であり、 $\dim(\mathcal{K}) \leq 1$ となる。 $A_0^{(1)}$ の固有値は相異なるので $\dim(\mathcal{L}(\mu)) \leq 1$ が $\mu \neq 0$ で成り立つ。よって、微分方程式の階数は落ちない。また、 $a_{2,1} = 0$ のときには既約性が壊れている。この例では半単純性が成り立っていないので Proposition 16 の範疇から外れている。フックス型の場合では index of rigidity が 2 で既約なものは一階の方程式に帰着されたが、不確定特異点を含む場合は index of rigidity が 2 で既約なものでも addition と middle convolution の繰り返しで一階の方程式に帰着されることは限らない。

9. おわりに

前半では、フックス型微分方程式系の middle convolution をドリーニュ・シンプソン問題との関連を込めて解説した。一般論では、addition と middle convolution によって方程式のサイズを小さくしていくというアルゴリズムと Crawley-Boevey の定理が顕著である。後半での不確定特異点を含む微分方程式系の middle convolution については、理論展開と具体例の計算の双方において、今後の研究の進展が期待される。フックス型微分方程式系での Crawley-Boevey の定理に対応することが不確定特異点を含む微分方程式系でどのように記述されるかは気になるところである。Boalch による結果 ([1]) がこの方向の研究のアプローチを与えているようだが、よりわかりやすい結果が世に出ることを期待したい。

線形微分方程式に middle convolution を適用することでより易しい微分方程式に帰着できるという描像と middle convolution そのものが表現論をはじめさまざまな分野や対象に応用されることを願っている。

REFERENCES

- [1] Boalch P., Irregular connections and Kac-Moody root systems, Preprint, arXiv:0806.1050 [math.DG].
- [2] Crawley-Boevey W., Geometry of the moment map for representations of quivers, *Compositio Math.*, **126** (2001), 257–293.
- [3] Crawley-Boevey W., On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspace and sum zero. *Duke Math. J.* **118** (2003), 339–352.
- [4] Dettweiler M. and Reiter S., An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem, *J. Symbolic Comput.* **30** (2000), 761–798.
- [5] Dettweiler M. and Reiter S., Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, *J. Algebra* **318** (2007), 1–24.

- [6] Filipuk G., On the middle convolution and birational symmetries of the sixth Painlevé equation, *Kumamoto J. Math.* **19** (2006), 15–23.
- [7] Gesztesy F. and Weikard R., Treibich-Verdier potentials and the stationary (m)KdV hierarchy, *Math. Z.* **219** (1995), 451–476.
- [8] Jimbo M. and Miwa T., Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II, *Phys. D* **2** (1981), 407–448.
- [9] Kac V., Infinite-dimensional Lie algebras. Third edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [10] Katz N. M., Rigid local systems. Annals of Mathematics Studies, 139, Princeton University Press, Princeton, 1996.
- [11] Kazakov A. Ya. and Slavyanov S. Yu., Integral relations for special functions of the Heun class, *Theoret. and Math. Phys.* **107** (1996), 733–739.
- [12] Kawakami H., Generalized Okubo systems and the middle convolution, Ph.D thesis.
- [13] Kostov V. P., The Deligne-Simpson problem—a survey. *J. Algebra* **281** (2004), 83–108.
- [14] Novikov D. P., Integral transformation of solutions of a Fuchs-class equation that corresponds to the Okamoto transformation of the Painlevé VI equation, *Theoret. and Math. Phys.* **146** (2006), 295–303.
- [15] Oshima T., Classification of Fuchsian systems and their connection problem, arXiv:0811.2916 [math.CA], to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu.
- [16] Smirnov A. O., Elliptic solitons and Heun’s equation, *The Kowalevski property*, 287–305, CRM Proc. Lecture Notes, 32, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.
- [17] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system III: the finite gap property and the monodromy, *J. Nonlinear Math. Phys.* **11** (2004), 21–46.
- [18] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system IV: the Hermite-Krichever Ansatz, *Comm. Math. Phys.* **258** (2005), 367–403.
- [19] Takemura K., The Hermite-Krichever ansatz for Fuchsian equations with applications to the sixth Painlevé equation and to finite-gap potentials, *Math. Zeit.* **263** (2009), 149–194.
- [20] Takemura K., Integral representation of solutions to Fuchsian system and Heun’s equation, *J. Math. Anal. Appl.* **342** (2008), 52–69.
- [21] Takemura K., Middle convolution and Heun’s equation, *SIGMA* **5** (2009), 040, 22 pages.
- [22] Takemura K., in preparation.
- [23] Treibich A. and Verdier J.-L., Revêtements exceptionnels et sommes de 4 nombres triangulaires, *Duke Math. J.* **68** (1992), 217–236.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, YOKOHAMA CITY UNIVERSITY, 22-2 SETO, KANAZAWA-KU, YOKOHAMA 236-0027, JAPAN.

E-mail address: takemura@yokohama-cu.ac.jp