

A CHIRAL BOREL-WEIL-BOTT THEOREM

奈良女子大学理学部・荒川 知幸
TOMOYUKI ARAKAWA

1. はじめに

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元単純 Lie 環,

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$$

を $\mathfrak{g}$ に付随するアフィン Kac-Moody 代数とする. $\widehat{\mathfrak{g}}$ の交換関係は以下で与えられる.

- (i) $[x_{(m)}, y_{(n)}] = [x, y]_{(m+n)} + m\delta_{m+n,0}(x|y)K$. ここで $x_{(m)} = x \otimes t^m$.
- (ii) $[K, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0$,
- (iii) $[D, x_{(m)}] = mx_{(m)}$.

$M(\lambda)$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の最高ウェイト λ の Verma 加群とし, $L(\lambda)$ を $M(\lambda)$ の唯一の既約商加群とする. 中心元 K は $L(\lambda)$ に定数で作用するが, その値 $k = \lambda(K)$ はレベルと呼ばれる.

$L(\lambda)$ の指標

$$\text{ch } L(\lambda) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} e^\mu \dim L(\lambda)^\mu$$

の導出は言うまでもなく基本問題である. $L(\lambda)$ が可積分表現の時, $\text{ch } L(\lambda)$ についての具体的な Weyl-Kac の指標公式が知られている ([Kac90]). 柏原・谷崎の一連の結果 ([KT95, KT96, KT98, KT00]) は Kazhdan-Lusztig 多項式を用い形で一般のほぼ全ての $L(\lambda)$ についての指標公式を与えるが, 例外が臨界レベルの場合である. ここで臨界レベルとは $k = \lambda(K) = -h^\vee$, すなわち $(\lambda + \rho)(K) = 0$ の場合である.

臨界レベルにおいて $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現論は劇的に変わり, それはモジュラー表現論の様相を帯びる. その主たる要因は巨大な中心 (Feigin-Frenkel center [FF92]) の存在である.

Feigin-Frenkel center は臨界レベルの $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現論において Lie 環のモジュラー表現論における p -center の役割を果たす. $M(\lambda)$ を Feigin-Frenkel center の作用で割った restricted Verma 加群 $M^{\text{res}}(\lambda)$ の組成列の中での $L(\lambda)$ の現れ方はアフィン Weyl 群で記述され (Arakawa-Feibig [AF09]), さらにその重複度は Lusztig の periodic 多項式 ([Lus80]) で記述されると予想されている (Feign-Frenkel 予想, [AF08] 参照).

このように臨界レベルにおける一般の既約表現 $L(\lambda)$ の指標は極めて複雑であるが, 一方で $G[[t]]$ 可積分な $L(\lambda)$ については具体的な指標公式が知られている ([Ara07a], E. Frenkel). この講演の主たる目的は頂点代数, 特にカイラル微分作用素の層 (cdo) の理論を用いて上記指標公式の一つの意味付けを与えることである (Feodor Malikov との共同研究 [AM09]).

2. 旗多様体上の cdo

X を $\mathfrak{g}$ の旗多様体, すなわち $\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数のなす代数多様体とし, $\mathcal{D}_X^{\text{ch}}$ を X 上の cdo とする. $\mathcal{D}_X^{\text{ch}}$ は Malikov-Schechtman-Vaintrob[MSV99] と Beilinson-Drinfeld[BD04] によって独立に導入されたある種の性質を満たす X 上の頂点作用素の層である. ここでは $\mathcal{D}_X^{\text{ch}}$ の定義は述べないが以下にいくつかの性質を挙げる.

- (i) $\mathcal{D}_X^{\text{ch}}$ は $\mathcal{O}_X$ 加群ではない. ただし自然なフィルトレーションが入り associated graded vertex algebra の層は $p_*\mathcal{O}_{TX_\infty}$ に同型となる. ただし TX_∞ は余接束の infinite jet scheme であり $p: TX_\infty \rightarrow X$ は自然な射影. (cf. X 上の通常の微分作用素の層 $\mathcal{D}_X$ が余接層の量子化である).
- (ii) $\mathcal{D}_X^{\text{ch}}$ は局所的には $\beta\gamma$ システムに同型である (cf. $\mathcal{D}_X$ は局所的には Weyl 代数に同型である.)
- (iii) $\mathcal{D}_X^{\text{ch}}$ の Zhu 代数の層 $\text{Zhu}(\mathcal{D}_X^{\text{ch}})$ は $\mathcal{D}_X$ に同型である ([ACM08, Corollary 3.18]). 更に $\mathcal{D}_X^{\text{ch}}$ の加群 $\mathcal{F}$ に対しそのトップの次数部分 $\mathcal{F}_{\text{top}}$ を対応させる対応は圏同値

$$\mathcal{D}_X^{\text{ch}}\text{-Mod} \cong \mathcal{D}_X\text{-Mod}$$

を与える ([ACM08, Theorem 5.2 (2)]).

3. 臨界レベルのアフィン頂点代数の局所化

複素数 k に対して

$$V^k(\mathfrak{g}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K + \mathbb{C}D)} \mathbb{C}_k$$

とおく. ただし $\mathbb{C}_k$ は K が k で作用し $\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}D$ が零で作用する $\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$ の一次元表現である. $V^k(\mathfrak{g})$ には自然に頂点代数の構造が入り, $\mathfrak{g}$ に付随するレベル k の普遍アフィン頂点代数と呼ばれる (例えば [Kac98] を参照).

頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ については以下が成立する.

- (i) $\text{Zhu}(V^k(\mathfrak{g})) \cong U(\mathfrak{g})$ ($\forall k \in \mathbb{C}$),
- (ii) $V^k(\mathfrak{g})$ 加群の圏はレベル k の滑らかな $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群のなす $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群の圏の充満部分圏に他ならない.

$V^k(\mathfrak{g})$ は一般には単純な頂点代数ではなく $L(k\Lambda_0)$ がその単純商になる. $L(k\Lambda_0)$ は $\mathfrak{g}$ に付随するレベル k のアフィン頂点代数と呼ばれる. $L(k\Lambda_0)$ は $V^k(\mathfrak{g})$ の商なのでその Zhu 代数は $U(\mathfrak{g})$ の商代数である.

臨界レベル, すなわち $k = -h^\vee$ の時で, $V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ の頂点代数の意味での中心 $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ は非自明になり Feigin-Frenkel center と呼ばれる:

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \{a \in V^{-h^\vee}(\mathfrak{g}); [a_m, b_{(n)}] = 0, \forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall b \in V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})\}.$$

可換頂点代数 $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の Zhu 代数は $U(\mathfrak{g})$ の中心 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ に同型である ([Ara07b, Theorem 4.14.2(2)]).

次が知られている.

定理 3.1 (Frenkel-Gaitsgory [FG04]).

$$L(-h^\vee\Lambda_0) = V^{-h^\vee}(\mathfrak{g}) / \{a_{(n)}v; a \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \ v \in V^{-h^\vee}(\mathfrak{g}), \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

上の定理から次を示すことができる.

$$(1) \quad \text{Zhu}(L(-h^\vee\Lambda_0)) \cong U_{[0]}(\mathfrak{g}) := U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathcal{Z}(\mathfrak{g})_+.$$

ただし $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})_+$ は $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ の正の次数部分である.

さて自然な準同型

$$(2) \quad U(\mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$$

は頂点代数の

$$(3) \quad V^{-h^\vee}(\mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_X^{\text{ch}})$$

に持ち上げる ([GMS01, AG02]).

Beilinson-Bernstein[BB81] により (2) は同型

$$(4) \quad U_{[0]}(\mathfrak{g}) \cong \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$$

を誘導することが知られているが、次の結果はそのカイラリゼーションと見ることができる.

定理 3.2 (Arakawa-Chebotarov-Malikov[ACM08]). 準同型 (3) は頂点代数の同型

$$L(-h^\vee \Lambda_0) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{D}_X^{\text{ch}})$$

を誘導する.

注意 3.3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときは定理 3.2 は Malikov-Schechtman-Vaintrob[MSV99] の結果である.

4. 旗多様体上の TCDO

P_+ を $\mathfrak{g}$ の支配的整ウエイトの集合とする. $\lambda \in P_+$ について E_λ を $\mathfrak{g}$ の最高ウエイト λ の有限次元既約表現とし,

$$\chi_\lambda : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$$

を E_λ での evaluation とする. Borel-Weil の定理により X 上の可逆層 $\mathcal{L}_\lambda$ が存在し

$$E_\lambda \cong \Gamma(X, \mathcal{L}_\lambda)$$

と実現される. このとき $\text{tdo } \mathcal{D}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_\lambda^{-1}$ を用いて (4) は

$$(5) \quad U_{[\lambda]} := U(\mathfrak{g}) / U(\mathfrak{g}) \ker \chi_\lambda \cong \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$$

と一般化される.

一方で $\text{Zhu}(\mathcal{D}_\lambda^{\text{ch}}) \cong \mathcal{D}_\lambda$ なる X 上の頂点代数の層 $\mathcal{D}_X^{\text{ch}}$ は存在しない. そこで $\mathcal{D}_\lambda$ の代わりに λ をパラメーターとみなすことによって得られる普遍 $\text{tdo } \tilde{\mathcal{D}}_X$ を考える. $\tilde{\mathcal{D}}_X$ については以下が成立する.

- (i) $\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{D}}_X) \supset \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$,
- (ii) $\mathcal{D}_\lambda = \tilde{\mathcal{D}}_X \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]} \mathbb{C}_\lambda$.

このとき以下の性質を持つ普遍 $\text{tdco } \tilde{\mathcal{D}}_X^{\text{ch}}$ が存在する ([ACM08]):

- $\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{D}}_X^{\text{ch}}) \supset \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\infty^*]$,
- $\text{Zhu}(\tilde{\mathcal{D}}_X^{\text{ch}}) \cong \tilde{\mathcal{D}}_X$,
- $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\infty^*]$ の作用を指定することによって定まる $\tilde{\mathcal{D}}_X^{\text{ch}}\text{-Mod}$ の部分圏 $\mathcal{D}_\lambda^{\text{ch}}\text{-Mod}$ が存在し, 次の圏同値が成立する¹. .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_\lambda^{\text{ch}}\text{-Mod} & \cong & \mathcal{D}_\lambda\text{-Mod}, \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}_{\text{top}}, \\ \widehat{\mathcal{F}} & \hookleftarrow & \mathcal{F}. \end{array}$$

¹[ACM08, AM09] の記号では $\widehat{\mathcal{F}}$ は $\text{Zhu}_{\chi_\lambda/z} \mathcal{F}$.

圏同値によって $\mathcal{L}_\lambda$ に対応する $\mathcal{D}_\lambda^{\text{ch}}\text{-Mod}$ の対象を $\widehat{\mathcal{L}}_\lambda$ と書くこのとき $\Gamma(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda)$ は自然に臨界レベルの $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群の構造が入る.

定理 4.1 (Arakawa-Chebotarov-Malikov [ACM08]). $P_+ \ni \lambda$ に対し, 次が成立する².

$$\Gamma(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda) \cong L(\widehat{\lambda}).$$

ここで $\widehat{\lambda} = \lambda - h^\vee \Lambda_0$.

定理 4.1 の証明には中心指標を持つ Harish-Chandra $(\widehat{\mathfrak{g}}, G[[t]])$ 加群の圏が完全可約だと言う事実 ([FG07]) を使う.

5. EULER 種数と高次コホモロジー

次の関手の合成を考えよう.

$$\begin{array}{ccccccc} U_{[\lambda]}(\mathfrak{g})\text{-Mod} & \cong & \mathcal{D}_\lambda\text{-Mod} & \cong & \mathcal{D}_\lambda^{\text{ch}}\text{-Mod} & \rightarrow & \widehat{\mathfrak{g}}\text{-Mod} \\ M & \mapsto & \Delta(M) & \mapsto & \widehat{\Delta}(M) & \mapsto & \Gamma(X, \widehat{\Delta}(M)). \end{array}$$

ここで, $\Delta(M) = \mathcal{D}_\lambda \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$. また $\widehat{\Delta}(M)$ は圏同値によって $\Delta(M)$ に対応する $\mathcal{D}_\lambda^{\text{ch}}\text{-Mod}$ の対象である. 最初の関手は Beilinson-Bernstein 対応であり, 従って最後の関手を除いては全て圏同値である. 故に最後の関手が圏同値にはなり得ない. 特に高次コホモロジーの消滅は期待できない.

そこでまず Euler 指標を考える:

$$\chi(X, \widehat{\mathcal{F}}) = \sum_i (-1)^i \text{ch } H^i(X, \widehat{\mathcal{F}}).$$

ここで $\text{ch } H^i(X, \widehat{\mathcal{F}})$ は $H^i(X, \widehat{\mathcal{F}})$ の $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群としての形式指標である. 上の 3 つの圏同値から Euler 指標は写像

$$\begin{array}{ccc} K_0(U_{[0]}\text{-Mod}) & \rightarrow & \{\text{formal characters}\} \\ [M] & \mapsto & \chi(X, \widehat{\Delta}(M)) \end{array}$$

を与えるので Euler 指標を知りたければ例えば $\mathfrak{g}$ の Verma 加群 $\bar{M}_\lambda$, あるいはその双対 $\bar{M}_\lambda^*$ の像を調べれば良い.

命題 5.1 ([AM09]). $\lambda \in P_+$ と $w \in W (= \mathfrak{g}$ の Weyl 群) について,

$$H^i(X, \widehat{\Delta}(\bar{M}_{w \circ \lambda}^*)) = \begin{cases} M^{\text{res}}(w \circ \widehat{\lambda})^* & (i = 0), \\ 0 & (i \neq 0). \end{cases}$$

特に,

$$\chi(X, \widehat{\Delta}(\bar{M}_{w \circ \lambda}^*)) = \text{ch } M^{\text{res}}(w \circ \widehat{\lambda})^* = \frac{e^{w \circ \widehat{\lambda}}}{\prod_{\alpha \in \widehat{\Delta}_+^{\text{re}}} (1 - e^{-\alpha})}.$$

命題 5.1 より次が直ちに従う.

定理 5.2 (Arakawa-Malikov [AM09]). $\lambda \in P_+$ について,

$$\chi(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda) = \sum_{w \in W} \frac{(-1)^{\ell(w)} e^{w \circ \widehat{\lambda}}}{\prod_{\alpha \in \widehat{\Delta}_+^{\text{re}}} (1 - e^{-\alpha})}.$$

²正確には $[\widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{g}}]$ 加群としての同型

特に

$$\chi_q(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda) := \sum_d \chi(X, (\widehat{\mathcal{L}}_\lambda)_d) q^d = \frac{\dim E_\lambda}{\prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{\dim X}}.$$

注意 5.3. $\chi(X, \mathcal{D}_X^{\text{ch}})$ の homogeneous specialization $\chi_q(X, \mathcal{D}_X^{\text{ch}})$ は一種の楕円種数とみなすことができる ([Wit07]).

次に高次コホモロジー $H^i(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda)$ を考える. Harish-Chandra $(\widehat{\mathfrak{g}}, G[[t]])$ 加群の圏の完全可約性より各コホモロジー $H^i(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda)$ は $L(\widehat{\lambda} - d\delta)$ ($d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の形の既約表現の直和になることが分かる³.

定理 5.4 (Arakawa-Malikov [AM09]). $\lambda \in P_+$ について,

$$H^i(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda) \cong \bigoplus_{\substack{w \in W \\ \ell(w)=i}} L(\lambda - \langle \lambda - w \circ \lambda, \rho^\vee \rangle \delta).$$

特に,

$$\text{ch } H^i(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda) = \text{ch } L(\widehat{\lambda}) \times \sum_{\substack{w \in W \\ \ell(w)=i}} q^{\lambda - \langle \lambda - w \circ \lambda, \rho^\vee \rangle}$$

($q = e^{-\delta}$).

以上二つの定理から Euler 指標の 2 つの異なる表示を得た. これから $L(\widehat{\lambda})$ の指標公式

$$\text{ch } L(\widehat{\lambda}) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w \circ \widehat{\lambda}}}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - q^{\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle}) \prod_{\alpha \in \widehat{\Delta}_+^{r_e}} (1 - e^{-\alpha})}$$

が従う.

REFERENCES

- [ACM08] T. Arakawa, D. Chebotarov, and F. Malikov. Algebras of twisted chiral differential operators and affine localization of $\mathfrak{g}$ -modules. *preprint*, 2008. arXiv:0810.4964[math.AG].
- [AF08] Tomoyuki Arakawa and Peter Fiebig. On the restricted verma modules at the critical level. *preprint*, 2008. arXiv:0812.3334v1[math.RT].
- [AF09] Tomoyuki Arakawa and Peter Fiebig. The linkage principle for restricted critical level representations of affine kac-moody algebras. *preprint*, 2009. arXiv:0909.4214[math.RT].
- [AG02] S. Arkhipov and D. Gaitsgory. Differential operators on the loop group via chiral algebras. *Int. Math. Res. Not.*, No. 4, pp. 165–210, 2002.
- [AM09] Tomoyuki Arakawa and Feodor Malikov. A chiral Borel-Weil-Bott theorem. *preprint*, 2009. arXiv:0903.1281[math.AG].
- [Ara07a] Tomoyuki Arakawa. Characters of representations of affine Kac-Moody Lie algebras at the critical level. *preprint*, 2007. arXiv:0706.1817v2[math.QA].
- [Ara07b] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of W -algebras. *Invent. Math.*, Vol. 169, No. 2, pp. 219–320, 2007.
- [BB81] Alexandre Beilinson and Joseph Bernstein. Localisation de g -modules. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 292, No. 1, pp. 15–18, 1981.
- [BD04] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld. *Chiral algebras*, Vol. 51 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

³定理 4.1 の同型が $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 加群としての同型なのでウェイトの δ の係数の差だけが意味がある.

- [FF92] Boris Feigin and Edward Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel'fand-Dikiĭ algebras. In *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, Vol. 16 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pp. 197–215. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.
- [FG04] Edward Frenkel and Dennis Gaitsgory. D -modules on the affine Grassmannian and representations of affine Kac-Moody algebras. *Duke Math. J.*, Vol. 125, No. 2, pp. 279–327, 2004.
- [FG07] Edward Frenkel and Dennis Gaitsgory. Local geometric langlands correspondence: the spherical case. *preprint*, 2007. arXiv:0711.1132v1 [math.QA].
- [GMS01] Vassily Gorbounov, Fyodor Malikov, and Vadim Schechtman. On chiral differential operators over homogeneous spaces. *Int. J. Math. Math. Sci.*, Vol. 26, No. 2, pp. 83–106, 2001.
- [Kac90] Victor G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.
- [Kac98] Victor Kac. *Vertex algebras for beginners*, Vol. 10 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 1998.
- [KT95] Masaki Kashiwara and Toshiyuki Tanisaki. Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level. *Duke Math. J.*, Vol. 77, No. 1, pp. 21–62, 1995.
- [KT96] Masaki Kashiwara and Toshiyuki Tanisaki. Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level. II. Nonintegral case. *Duke Math. J.*, Vol. 84, No. 3, pp. 771–813, 1996.
- [KT98] Masaki Kashiwara and Toshiyuki Tanisaki. Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras. III. Positive rational case. *Asian J. Math.*, Vol. 2, No. 4, pp. 779–832, 1998. Mikio Sato: a great Japanese mathematician of the twentieth century.
- [KT00] Masaki Kashiwara and Toshiyuki Tanisaki. Characters of irreducible modules with non-critical highest weights over affine Lie algebras. In *Representations and quantizations (Shanghai, 1998)*, pp. 275–296. China High. Educ. Press, Beijing, 2000.
- [Lus80] George Lusztig. Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition patterns. *Adv. in Math.*, Vol. 37, No. 2, pp. 121–164, 1980.
- [MSV99] Fyodor Malikov, Vadim Schechtman, and Arkady Vaintrob. Chiral de Rham complex. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 204, No. 2, pp. 439–473, 1999.
- [Wit07] Edward Witten. Two-dimensional models with $(0, 2)$ supersymmetry: perturbative aspects. *Adv. Theor. Math. Phys.*, Vol. 11, No. 1, pp. 1–63, 2007.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NARA WOMEN'S UNIVERSITY, NARA 630-8506, JAPAN
E-mail address: arakawa@cc.nara-wu.ac.jp