

A 型の^{えびら} 簾に付随する b -関数について
(b -Functions associated with quivers of type A)

杉山 和成 (Kazunari Sugiyama)

千葉工業大学数学教室 (Chiba Institute of Technology)

email: skazu@sky.it-chiba.ac.jp

1 序

Cayley による (といわれている) 恒等式

$$(1.1) \quad \det \left(\frac{\partial}{\partial v_{ij}} \right) \det(v)^{s+1} = (s+1)(s+2) \cdots (s+m) \cdot \det(v)^s \quad (v \in M_m)$$

は Capelli 恒等式の発見の契機になり, 古典的不変式論において重要な役割を果たした (cf. Howe-Umeda [5]). 現代的な立場では, (1.1) 式は正方行列のなす概均質ベクトル空間 $(GL_m \times GL_m, M_m)$ の b -関数としてみるができるが, M. Sato-Kimura [11] により分類された 29 系列の既約な正則概均質ベクトル空間に対する b -関数は非常に複雑で, M. Sato-Kashiwara-Kimura-Oshima [10] による超局所計算法というきわめて高度な理論を用いて計算された. 一方, 最近になって可約な概均質ベクトル空間の b -関数について研究が進み (Ukai [13]), 都合のよい状況では可約な概均質ベクトル空間の b -関数の計算は, 既約概均質ベクトル空間の b -関数の計算 (結果) に帰着できる, ということが分かってきている (F. Sato-Sugiyama [8]). このノートでは, 可約な概均質ベクトル空間の代表的な例である A 型の^{えびら} 簾 (quiver) から構成される概均質ベクトル空間に対して b -関数を計算した結果について報告する.

まず, 簾の表現がつくる概均質ベクトル空間について説明する. r 個の頂点を持つ A_r -型の簾

$$Q: \quad \overset{1}{\bullet} \longleftarrow \overset{2}{\bullet} \longleftarrow \overset{3}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longleftarrow \overset{r}{\bullet}$$

を考える. r 個の正整数の組 $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r$ (これを次元ベクトルとよぶ) が一つ与えられたとき, $GL(\underline{n})$ および $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ を

$$GL(\underline{n}) = GL(n_1) \times GL(n_2) \times \cdots \times GL(n_r),$$

$$\text{Rep}(Q, \underline{n}) = \bigoplus_{i \rightarrow i+1 \text{ in } Q} M(n_{i+1}, n_i) \oplus \bigoplus_{j+1 \rightarrow j \text{ in } Q} M(n_j, n_{j+1}),$$

と定義する. このとき, $GL(\underline{n})$ は $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ へ作用する: $g = (g_1, g_2, \dots, g_r) \in GL(\underline{n})$ とし, $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ の元を $v = (\{X_{i+1,i}\}_{i \rightarrow i+1 \text{ in } Q}, \{X_{j,j+1}\}_{j+1 \rightarrow j \text{ in } Q})$ とかくとき

$$g \cdot v = (\{g_{i+1} X_{i+1,i} g_i^{-1}\}_{i \rightarrow i+1 \text{ in } Q}, \{g_j X_{j,j+1} g_{j+1}^{-1}\}_{j+1 \rightarrow j \text{ in } Q})$$

と定める. 簾の表現論の言葉では, $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ の元を (次元ベクトル $\underline{n}$ をもつ) Q の表現といい, $GL(\underline{n})$ でうつりあう $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ の元は (簾の表現として) 同型であるという. すると, Gabriel の

定理より, 任意の $\underline{n} \in \mathbb{Z}_{>0}^r$ に対して, $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ は有限個の $GL(\underline{n})$ -軌道に分かれることが分かる. 特に, $(GL(\underline{n}), \text{Rep}(Q, \underline{n}))$ は概均質ベクトル空間になる.

例 1.1. 向きが一定 (equioriented) の A_5 -型の籓を考える:

$$Q: \quad \overset{1}{\cdot} \longrightarrow \overset{2}{\cdot} \longrightarrow \overset{3}{\cdot} \longrightarrow \overset{4}{\cdot} \longrightarrow \overset{5}{\cdot}$$

次元ベクトルを $\underline{n} = (n_1, \dots, n_5)$ とするとき, $GL(\underline{n})$ および $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ は

$$\begin{aligned} GL(\underline{n}) &= GL(n_1) \times GL(n_2) \times GL(n_3) \times GL(n_4) \times GL(n_5), \\ \text{Rep}(Q, \underline{n}) &= M(n_2, n_1) \oplus M(n_3, n_2) \oplus M(n_4, n_3) \oplus M(n_5, n_4), \end{aligned}$$

となり, 作用は $g = (g_1, \dots, g_5) \in GL(\underline{n})$ および $v = (X_{2,1}, X_{3,2}, X_{4,3}, X_{5,4}) \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$ に対して

$$g \cdot v = (g_2 X_{2,1} g_1^{-1}, g_3 X_{3,2} g_2^{-1}, g_4 X_{4,3} g_3^{-1}, g_5 X_{5,4} g_4^{-1})$$

で与えられる.

例 1.2. 次の A_5 -型の籓を考える:

$$Q: \quad \overset{1}{\cdot} \longrightarrow \overset{2}{\cdot} \longleftarrow \overset{3}{\cdot} \longrightarrow \overset{4}{\cdot} \longleftarrow \overset{5}{\cdot}$$

次元ベクトルを $\underline{n} = (n_1, \dots, n_5)$ とするとき, $GL(\underline{n})$ および $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ は

$$\begin{aligned} GL(\underline{n}) &= GL(n_1) \times GL(n_2) \times GL(n_3) \times GL(n_4) \times GL(n_5), \\ \text{Rep}(Q, \underline{n}) &= M(n_2, n_1) \oplus M(n_2, n_3) \oplus M(n_4, n_3) \oplus M(n_4, n_5), \end{aligned}$$

となり, 作用は $g = (g_1, \dots, g_5) \in GL(\underline{n})$ および $v = (X_{2,1}, X_{2,3}, X_{4,3}, X_{4,5}) \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$ に対して

$$g \cdot v = (g_2 X_{2,1} g_1^{-1}, g_2 X_{2,3} g_3^{-1}, g_4 X_{4,3} g_3^{-1}, g_4 X_{4,5} g_5^{-1})$$

で与えられる.

2 相対不変式について

A_r 型の籓 (向きは任意とする)

$$Q: \quad \overset{1}{\cdot} \longrightarrow \overset{2}{\cdot} \longleftarrow \dots \longleftarrow \overset{r-2}{\cdot} \longrightarrow \overset{r-1}{\cdot} \longrightarrow \overset{r}{\cdot}$$

から現れる表現について, 次元ベクトルがどのような条件を満たすとき相対不変式が存在するかを一般的に記述する (詳しくは Abeasis [1], Koike [7] を参照).

Q の向きは source ないし sink となっている頂点の部分列

$$\{1 = \nu(0) < \nu(1) < \nu(2) < \dots < \nu(h) < \nu(h+1) = r\}$$

により決まる．向きを一斉に反対にすると概均質ベクトル空間の方では双対になるので，各 $\nu(\kappa)$ が source か sink のどちらになっているかというのは本質的な問題ではない．

次元ベクトル $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r)$ を一つ fix する． $(GL(\underline{n}), \text{Rep}(Q, \underline{n}))$ の基本相対不変式を考えたい．集合 $I_{\underline{n}}(Q)$ を $p < q$ なるペア (p, q) で次の条件 (I1)~(I4) をみたすもの全体とする．

$\nu(\alpha - 1) \leq p < \nu(\alpha), \nu(\beta) < q \leq \nu(\beta + 1)$ という条件から添え字 $\alpha = \alpha(p), \beta = \beta(q)$ が定まるが，このとき

(I1) $p < t \leq \nu(\alpha)$ なる t に対して， $n_t > n_p$,

(I2) $\kappa = 0, 1, \dots, \beta - \alpha - 1$ および $\nu(\alpha + \kappa) < t \leq \nu(\alpha + \kappa + 1)$ をみたす t に対して，

$$n_t > n_{\nu(\alpha+\kappa)} - n_{\nu(\alpha+\kappa-1)} + \dots + (-1)^\kappa n_{\nu(\alpha)} + (-1)^{\kappa+1} n_p,$$

(I3) $\nu(\beta) < t < q$ なる t に対して

$$n_t > n_{\nu(\beta)} - n_{\nu(\beta-1)} + \dots + (-1)^{\beta-\alpha} n_{\nu(\alpha)} + (-1)^{\beta-\alpha+1} n_p,$$

(I4) $n_q = n_{\nu(\beta)} - n_{\nu(\beta-1)} + \dots + (-1)^{\beta-\alpha} n_{\nu(\alpha)} + (-1)^{\beta-\alpha+1} n_p$.

定理 2.1 (Abeasis [1]). $(GL(\underline{n}), \text{Rep}(Q, \underline{n}))$ の余次元 1 の軌道の集合と $I_{\underline{n}}(Q)$ の間に全単射が存在する．特に， $I_{\underline{n}}(Q)$ と基本相対不変式の間に 1 対 1 対応がある．

$(p, q) \in I_{\underline{n}}(Q)$ に対応する既約相対不変式を具体的に構成してみよう． Q の 2 頂点 μ, ν ($\mu < \nu$) の間に sink も source もないとすると，

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{array}{ccccccc} \mu & \longrightarrow & \mu+1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \nu-1 & \longrightarrow & \nu \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \end{array} \\ \text{(b)} \quad & \begin{array}{ccccccc} \mu & \longleftarrow & \mu+1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & \nu-1 & \longleftarrow & \nu \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \end{array} \end{aligned}$$

のどちらかであるが，(a) の場合には

$$X_{\nu, \mu} = X_{\nu, \nu-1} X_{\nu-1, \nu-2} \dots X_{\mu+1, \mu}$$

とおき，(b) の場合には

$$X_{\mu, \nu} = X_{\mu, \mu+1} X_{\mu+1, \mu+2} \dots X_{\nu-1, \nu}$$

とおく．

いま， p が source で q が sink であると仮定する：

$$\begin{array}{ccccccccccc} p & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \nu(\alpha) & \longleftarrow & \nu(\alpha)+1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & \nu(\alpha+1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \nu(\beta) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & q \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

このとき， $v \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$ に対して行列 $Y_{(p, q)}$ を

$$Y_{(p, q)} = \begin{pmatrix} X_{\nu(\alpha), p} & X_{\nu(\alpha), \nu(\alpha+1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & X_{\nu(\alpha+2), \nu(\alpha+1)} & X_{\nu(\alpha+2), \nu(\alpha+3)} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X_{\nu(\beta-1), \nu(\beta-2)} & X_{\nu(\beta-1), \nu(\beta)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & X_{q, \nu(\beta)} \end{pmatrix}$$

とおき, $f_{(p,q)}(v) = \det Y_{(p,q)}$ とおくと, $f_{(p,q)}(v)$ は $(GL(\underline{n}), \text{Rep}(Q, \underline{n}))$ の (恒等的に 0 ではない) 相対不変式になる.

また, p, q の両方が source であるとき, すなわち

$$\begin{array}{ccccccccccc} p & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \nu(\alpha) & \longleftarrow & \nu(\alpha)+1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & \nu(\alpha+1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \nu(\beta) & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & q \end{array}$$

のときには, $v \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$ に対して行列 $Y_{(p,q)}$ を

$$Y_{(p,q)} = \begin{pmatrix} X_{\nu(\alpha),p} & X_{\nu(\alpha),\nu(\alpha+1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & X_{\nu(\alpha+2),\nu(\alpha+1)} & X_{\nu(\alpha+2),\nu(\alpha+3)} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X_{\nu(\beta-2),\nu(\beta-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X_{\nu(\beta),\nu(\beta-1)} & X_{\nu(\beta),q} \end{pmatrix}$$

とおき, $f_{(p,q)}(v) = \det Y_{(p,q)}$ とおくと, $f_{(p,q)}(v)$ は $(GL(\underline{n}), \text{Rep}(Q, \underline{n}))$ の (恒等的に 0 ではない) 相対不変式になる (他の場合, すなわち「 p が sink で q が source」あるいは「 p, q の両方が sink」であるときも同様に構成できる).

例 2.2. 例 1.1 において, $n_1 < n_2 < n_3 = n_4, n_5 = n_1$ とすると, $I_{\underline{n}}(Q) = \{(1, 5), (3, 4)\}$ である. 基本相対不変式は具体的には,

$$f_{(3,4)}(v) = \det X_{4,3}, \quad f_{(1,5)}(v) = \det X_{5,1} = \det(X_{5,4}X_{4,3}X_{3,2}X_{2,1})$$

で与えられる.

例 2.3. 例 1.2 において, $n_1 + n_3 = n_2 + n_4, n_1 < n_2 < n_3, n_5 = n_1$ とすると, $I_{\underline{n}}(Q) = \{(1, 4), (2, 5)\}$ である. 基本相対不変式は具体的には,

$$f_{(1,4)}(v) = \det \begin{pmatrix} X_{2,1} & X_{2,3} \\ O & X_{4,3} \end{pmatrix}, \quad f_{(2,5)}(v) = \det \begin{pmatrix} X_{2,3} & O \\ X_{4,3} & X_{4,5} \end{pmatrix}$$

で与えられる.

例 2.4. A_8 型の籐

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longleftarrow & 4 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 6 & \longleftarrow & 7 & \longleftarrow & 8 \end{array}$$

から現れる表現 $(GL(\underline{n}), \text{Rep}(Q, \underline{n}))$ を考える. 次元ベクトル $\underline{n}$ が

$$n_t > n_1 \ (t = 2, 3), \ n_t > n_3 - n_1 \ (t = 4, 5), \ n_t > n_4 - n_3 + n_1 \ (t = 6, 7), \ n_8 = n_6 - n_4 + n_3 - n_1$$

という条件をみたすとき, $(1, 8) \in I_{\underline{n}}(Q)$ であり, 対応する相対不変式は

$$f_{(1,8)}(v) = \det \begin{pmatrix} X_{3,1} & X_{3,4} & O \\ O & X_{6,4} & X_{6,8} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} X_{3,2}X_{2,1} & X_{3,4} & O \\ O & X_{6,5}X_{5,4} & X_{6,7}X_{7,8} \end{pmatrix}$$

で与えられる.

3 1 変数 b -関数

概均質ベクトル空間の理論 (cf. [6]) より, ある $b_{(p,q)}(s) \in \mathbb{C}[s]$ が存在して,

$$f_{(p,q)}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f_{(p,q)}(v)^{s+1} = b_{(p,q)}(s) \cdot f_{(p,q)}(v)^s$$

となる (cf. (1.1)). $b_{(p,q)}(s)$ は b -関数の分解公式 (F. Sato-Sugiyama [8]) を用いることにより計算できる. $\kappa = 0, 1, \dots, \beta - \alpha$ に対して,

$$\begin{aligned} \bar{n}_{\nu(\alpha+\kappa)} &= \sum_{\tau=0}^{\kappa} (-1)^{\tau} n_{\nu(\alpha+\kappa-\tau)} + (-1)^{\kappa+1} n_p \\ &= n_{\nu(\alpha+\kappa)} - n_{\nu(\alpha+\kappa-1)} + \dots + (-1)^{\kappa} n_{\nu(\alpha)} + (-1)^{\kappa+1} n_p \end{aligned}$$

とおく. このとき

定理 3.1.

$$\begin{aligned} b_{(p,q)}(s) &= \prod_{t=p+1}^{\nu(\alpha)} \prod_{\lambda=1}^{n_p} (s + n_t - n_p + \lambda) \\ &\quad \times \prod_{\kappa=0}^{\beta-\alpha-1} \prod_{t=\nu(\alpha+\kappa)+1}^{\nu(\alpha+\kappa+1)} \prod_{\lambda=1}^{\bar{n}_{\nu(\alpha+\kappa)}} (s + n_t - \bar{n}_{\nu(\alpha+\kappa)} + \lambda) \\ &\quad \times \prod_{t=\nu(\beta)+1}^q \prod_{\lambda=1}^{\bar{n}_{\nu(\beta)}} (s + n_t - \bar{n}_{\nu(\beta)} + \lambda) \end{aligned}$$

注意 3.2. この公式は p および q が source の sink どちらであるかということによらず常に成立する.

例 3.3. 例 2.2 の場合だと,

$$\begin{aligned} b_{(3,4)}(s) &= (s+1)(s+2) \cdots (s+n_3), \\ b_{(1,5)}(s) &= \prod_{t=2}^5 \prod_{\lambda=1}^{n_1} (s + n_t - n_1 + \lambda) \\ &= (s+1) \cdots (s+n_1) \times (s+n_2-n_1) \cdots (s+n_2) \\ &\quad \times (s+n_3-n_1+1)^2 \cdots (s+n_3)^2. \end{aligned}$$

例 3.4. 例 2.3 の場合だと,

$$\begin{aligned} b_{(1,4)}(s) &= (s+n_2-n_1+1) \cdots (s+n_2) \times (s+n_3-n_2+n_1+1) \cdots (s+n_3) \\ &\quad \times (s+n_4-n_3+n_2-n_1+1) \cdots (s+n_4) \\ &= (s+1) \cdots (s+n_3) \times (s+n_2-n_1+1) \cdots (s+n_2). \end{aligned}$$

同様に

$$b_{(2,5)}(s) = (s+1) \cdots (s+n_4) \times (s+n_3-n_2+1) \cdots (s+n_3).$$

例 3.5. 例 2.4 の相対不変式 $f_{(1,8)}(v)$ の b -関数 $b_{(1,8)}(s)$ を定理 3.1 にしたがって書くと,

$$\begin{aligned} b_{(1,8)}(s) &= \prod_{t=2}^3 (s+n_t-n_1+1) \cdots (s+n_t) \\ &\quad \times \prod_{t=4}^5 (s+n_t-n_3+n_1+1) \cdots (s+n_t) \\ &\quad \times \prod_{t=6}^7 (s+n_t-n_4+n_3-n_1+1) \cdots (s+n_t) \\ &\quad \times (s+1) \cdots (s+n_8) \end{aligned}$$

となる.

4 簾の表現論からの準備

多変数の b -関数の結果を記述するのに必要なので, 簾の表現論についていくつかの事柄を復習する (詳細は Abeasis-Del Fra [2] を参照). Q が A_r 型の簾

$$Q: \overset{1}{\cdot} \longrightarrow \overset{2}{\cdot} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \overset{r-2}{\cdot} \longrightarrow \overset{r-1}{\cdot} \longrightarrow \overset{r}{\cdot}$$

であるとする. $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r$ に対して, L_i を $\dim L_i = n_i$ なるベクトル空間とする. $i \rightarrow i+1$ in Q のとき, $A_{i+1,i} \in \text{Hom}(L_i, L_{i+1})$ を任意に選び, $j+1 \rightarrow j$ in Q のとき, $A_{j,j+1} \in \text{Hom}(L_{j+1}, L_j)$ を任意に選ぶ. L_i の適当な基底をとり $\text{Hom}(L_i, L_{i+1}) \cong M(n_{i+1}, n_i)$, $\text{Hom}(L_{j+1}, L_j) \cong M(n_j, n_{j+1})$ と同一視すると,

$$A := (\{A_{i+1,i}\}_{i \rightarrow i+1 \text{ in } Q}, \{A_{j,j+1}\}_{j+1 \rightarrow j \text{ in } Q}) \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$$

とみなすことができる. $\nu(\kappa)$ が sink で, $\nu(\kappa-1), \nu(\kappa+1)$ が source であるとき,

$$(4.1) \quad \psi_\kappa^A : L_{\nu(\kappa-1)} \oplus L_{\nu(\kappa+1)} \rightarrow L_{\nu(\kappa)} \quad ; \quad (z, w) \mapsto (A_{\nu(\kappa), \nu(\kappa-1)} z - A_{\nu(\kappa), \nu(\kappa+1)} w)$$

という写像が定まる. 但し, $\nu(\kappa-1)$ や $\nu(\kappa+1)$ が Q 内に存在しないときは, 対応するベクトル空間を $\{0\}$ と考える.

さて, $1 \leq i \leq j \leq r$ をみたす正整数の組 (i, j) に対して, $Q^{(i,j)}$ を i から始まり j でとまる Q の subquiver とする ($Q^{(i,j)}$ は頂点 i, j を含むとする). さらに, 線形写像

$$\varphi_{ij}^A : \bigoplus_t L_t \longrightarrow \bigoplus_{t'} L_{t'} \quad \left(\begin{array}{l} t \text{ は } Q^{(i,j)} \text{ の source をわたり} \\ t' \text{ は } Q^{(i,j)} \text{ の sink をわたる} \end{array} \right)$$

を (4.1) のような ψ_κ^A をまとめ合わせてできる写像とする.

例 4.1. A_5 -型の籠

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & 2 & \longleftarrow & 3 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 5 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \end{array}$$

のとき ,

$$\begin{aligned} \varphi_{14}^A : L_1 \oplus L_3 &\rightarrow L_2 \oplus L_4 & ; & & (z_1, z_3) &\longmapsto & (A_{2,1}z_1 - A_{2,3}z_3, A_{4,3}z_3) \\ \varphi_{25}^A : L_3 &\rightarrow L_2 \oplus L_5 & ; & & z_3 &\longmapsto & (-A_{2,3}z_3, A_{5,4}A_{4,3}z_3) \\ \varphi_{15}^A : L_1 \oplus L_3 &\rightarrow L_2 \oplus L_5 & ; & & (z_1, z_3) &\longmapsto & (A_{2,1}z_1 - A_{2,3}z_3, A_{5,4}A_{4,3}z_3) \end{aligned}$$

となる .

$A \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$ に対して ,

$$N_{ij}^A := \begin{cases} \text{rank } \varphi_{ij}^A & (i < j) \\ \dim L_i = n_i & (i = j) \end{cases}$$

と定める . ランクパラメータ $N_A := \{N_{ij}^A\}_{1 \leq i \leq j \leq r}$ は $GL(\underline{n})$ -軌道特徴づける不変量である . すなわち , $A \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$ に対して $\mathcal{O}_A$ を A を通る $GL(\underline{n})$ -軌道とすると , $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_B$ となるための必要十分条件は $N_{ij}^A = N_{ij}^B$ ($1 \leq i \leq j \leq r$) となることである . さらに , ランクパラメータ全体の集合には (半) 順序がはいるが , これは軌道の閉包順序と一致する . すなわち , $\mathcal{O}_A \subset \overline{\mathcal{O}}_B$ となるための必要十分条件は $N_{ij}^A \leq N_{ij}^B$ ($1 \leq i \leq j \leq r$) となることである .

b -関数の話に戻る . $(p, q) \in I_{\underline{n}}(Q)$ とする (cf. 定理 2.1) . $A \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$ が $f_{(p,q)}(A) \neq 0$ をみたすならば , φ_{pq}^A は同型写像になる ($f_{(p,q)}(A)$ は φ_{pq}^A の表現行列の行列式を適当に ± 1 倍したものになる) . φ_{pq}^A が同型写像となる $A \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$ に対するランクパラメータ N^A のうち , 上記の順序関係で最小になるものを $N^{(p,q)}$ とかく . $N^{(p,q)}$ に対応する軌道 $\mathcal{O}^{(p,q)}$ は $\{A \in \text{Rep}(Q, \underline{n}) ; f_{(p,q)}(A) \neq 0\}$ 内の閉 $GL(\underline{n})$ -軌道であり , 一意的である (Gyoja [4]) .

$N^{(p,q)} = \{N_{ij}^{(p,q)}\}_{1 \leq i \leq j \leq r}$ に対して ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(p,q)} := & \left\{ \left\{ N_{22}^{(p,q)} - N_{12}^{(p,q)} + 1, \dots, N_{22}^{(p,q)} (= n_2) \right\} ; \right. \\ (4.2) \quad & \left\{ N_{33}^{(p,q)} - N_{23}^{(p,q)} + 1, \dots, N_{33}^{(p,q)} (= n_3) \right\} ; \dots \\ & \left. \dots ; \left\{ N_{rr}^{(p,q)} - N_{r-1,r}^{(p,q)} + 1, \dots, N_{rr}^{(p,q)} (= n_r) \right\} \right\} \end{aligned}$$

とおく . $\mathcal{F}^{(p,q)}$ は $r-1$ 個の集合からなる集合で , 各集合は連続する自然数から構成されていることに注意 . 但し , $N_{k-1,k}^{(p,q)} = 0$ のときは , $\{N_{kk}^{(p,q)} - N_{k-1,k}^{(p,q)} + 1, \dots, N_{kk}^{(p,q)} (= n_k)\}$ は空集合 $\emptyset$ である . さらに , $\mathcal{F}^{(p,q)}$ から 1 次式の集合を

$$\begin{aligned} s + \mathcal{F}^{(p,q)} := & \left\{ \left\{ s + N_{22}^{(p,q)} - N_{12}^{(p,q)} + 1, \dots, s + N_{22}^{(p,q)} (= s + n_2) \right\} ; \right. \\ & \left\{ s + N_{33}^{(p,q)} - N_{23}^{(p,q)} + 1, \dots, s + N_{33}^{(p,q)} (= s + n_3) \right\} ; \dots \\ & \left. \dots ; \left\{ s + N_{rr}^{(p,q)} - N_{r-1,r}^{(p,q)} + 1, \dots, s + N_{rr}^{(p,q)} (= s + n_r) \right\} \right\} \end{aligned}$$

のようにしてつくと , 次の定理が成り立つ .

定理 4.2. $(p, q) \in I_{\underline{n}}(Q)$ に対して, $s + \mathcal{F}^{(p,q)}$ 内の 1 次式をすべて掛け合わせると b -関数 $b_{(p,q)}(s)$ に一致する.

例 4.3. 例 3.3 において, $\underline{n} = (2, 5, 6, 6, 2)$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} b_{(3,4)}(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)(s+6), \\ b_{(1,5)}(s) &= (s+1)(s+2)(s+4)(s+5)^3(s+6)^2. \end{aligned}$$

ランクパラメータ $N^{(3,4)}$ および $N^{(1,5)}$ は

$$\begin{array}{cccccc} N^{(3,4)} : & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 6 & 6 & 0 \\ & & & & 6 & 0 \\ & & & & & 2 \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} N^{(1,5)} : & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & & 5 & 2 & 2 & 2 \\ & & & 6 & 2 & 2 \\ & & & & 6 & 2 \\ & & & & & 2 \end{array}$$

である. このことは下の図 1 をみると容易に分かる (このような図をレース・ダイアグラム (lace diagram, lacing diagram) とよぶことがあるようである. cf. [3]). 図において, 点はベクトル空間 L_i たちの基底を表しており, i 列にある頂点と $i+1$ 列にある頂点が矢印で結ばれているということは, 線形写像 $A_{i+1,i}$ でその基底がうつる, ということを意味している. 下図において現れる矢印を 1 本でも減らすと $f_{(p,q)}(A) \neq 0$ という条件をみたさなくなり, 逆にこれ以上矢印を増やすと最小の軌道という条件をみたさなくなる.

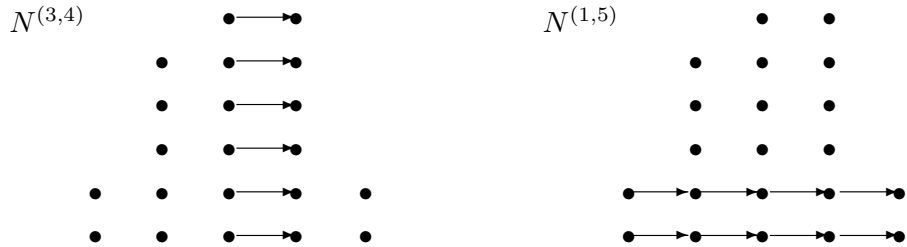


図 1 $N^{(3,4)}$ と $N^{(1,5)}$ に対応するレース・ダイアグラム

ランクパラメータから, (4.2) にしたがって $\mathcal{F}^{(3,4)}$, $s + \mathcal{F}^{(3,4)}$ および $\mathcal{F}^{(1,5)}$, $s + \mathcal{F}^{(1,5)}$ を書き下すと

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(3,4)} &= \{\emptyset; \emptyset; \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \emptyset\}, \\ s + \mathcal{F}^{(3,4)} &= \{\emptyset; \emptyset; \{s+1, s+2, s+3, s+4, s+5, s+6\}; \emptyset\}, \\ \mathcal{F}^{(1,5)} &= \{\{4, 5\}; \{5, 6\}; \{5, 6\}; \{1, 2\}\}, \\ s + \mathcal{F}^{(1,5)} &= \{\{s+4, s+5\}; \{s+5, s+6\}; \{s+5, s+6\}; \{s+1, s+2\}\} \end{aligned}$$

となる. $s + \mathcal{F}^{(3,4)}$ (resp. $s + \mathcal{F}^{(1,5)}$) にでてくる 1 次式と $b_{(3,4)}(s)$ (resp. $b_{(1,5)}(s)$) の因子が重複度をこめて一致していることに注意せよ.

例 4.4. 例 3.4 において, $\underline{n} = (2, 5, 7, 4, 2)$ とする. このとき,

$$b_{(1,4)}(s) = (s+1)(s+2)(s+3)(s+4)^2(s+5)^2(s+6)(s+7),$$

$$b_{(2,5)}(s) = (s+1)(s+2)(s+3)^2(s+4)^2(s+5)(s+6)(s+7).$$

ランクパラメータ $N^{(1,4)}$ および $N^{(2,5)}$ が

$$N^{(1,4)} : \begin{array}{ccccc} 2 & 2 & 5 & 9 & 9 \\ & 5 & 3 & 7 & 7 \\ & & 7 & 4 & 4 \\ & & & 4 & 0 \\ & & & & 2 \end{array} \quad N^{(2,5)} : \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 5 & 7 & 9 \\ & 5 & 5 & 7 & 9 \\ & & 7 & 2 & 4 \\ & & & 4 & 2 \\ & & & & 2 \end{array}$$

となることは, 下のレース・ダイアグラムをみると容易に分かる. 矢印の向きが入れ替わるところで, 頂点を上揃えにするか下揃えにするかが変わっている ([1, p. 467] に倣った). したがって,

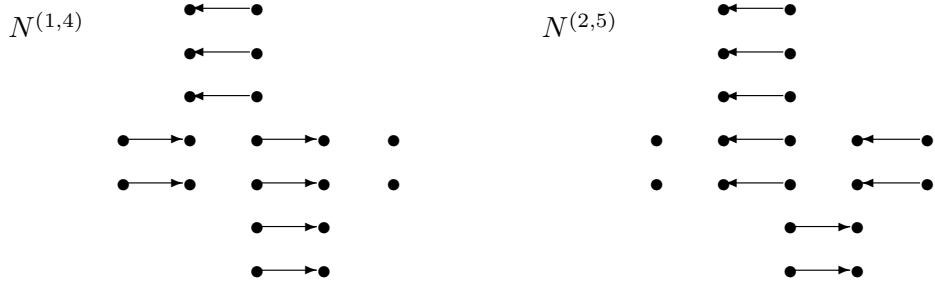


図 2 $N^{(1,4)}$ と $N^{(2,5)}$ に対応するレース・ダイアグラム

$\mathcal{F}^{(1,4)}, s + \mathcal{F}^{(1,4)}$ および $\mathcal{F}^{(2,5)}, s + \mathcal{F}^{(2,5)}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1,4)} &= \{\{4, 5\}; \{5, 6, 7\}; \{1, 2, 3, 4\}; \emptyset\}, \\ s + \mathcal{F}^{(1,4)} &= \{\{s+4, s+5\}; \{s+5, s+6, s+7\}; \{s+1, s+2, s+3, s+4\}; \emptyset\}, \\ \mathcal{F}^{(2,5)} &= \{\emptyset; \{3, 4, 5, 6, 7\}; \{3, 4\}; \{1, 2\}\}, \\ s + \mathcal{F}^{(2,5)} &= \{\emptyset; \{s+3, s+4, s+5, s+6, s+7\}; \{s+3, s+4\}; \{s+1, s+2\}\} \end{aligned}$$

となる. $s + \mathcal{F}^{(1,4)}$ (resp. $s + \mathcal{F}^{(2,5)}$) にでてくる 1 次式と $b_{(1,4)}(s)$ (resp. $b_{(2,5)}(s)$) の因子が重複度をこめて一致していることに注意せよ.

5 多変数 b -関数

まず, 一般の簡約可能概均質ベクトル空間 (G, V) に対する多変数 b -関数の定義を復習する (M. Sato [9]). $f_1, \dots, f_l$ を基本相対不変式として, f_i に対する指標を χ_i とすると, 双対三つ組 (G, V^*) も再び概均質ベクトル空間で, 指標 $\chi_1^{-1}, \dots, \chi_l^{-1}$ に対応する基本相対不変式 $f_1^*, \dots, f_l^*$

が存在する．多重変数 $\underline{s} = (s_1, \dots, s_l)$ に対して， $\underline{f}^{\underline{s}} = \prod_{i=1}^l f_i^{s_i}$ ， $\underline{f}^{*\underline{s}} = \prod_{i=1}^l f_i^{*s_i}$ とする．このとき， $\underline{m} = (m_1, \dots, m_l) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l$ に対して， $s_1, \dots, s_l$ についての多項式 $b_{\underline{m}}(\underline{s})$ が存在して，

$$\underline{f}^{*\underline{m}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \underline{f}^{\underline{s}+\underline{m}}(v) = b_{\underline{m}}(\underline{s}) \cdot \underline{f}^{\underline{s}}(v)$$

となる． $b_{\underline{m}}(\underline{s})$ を $\underline{f} = (f_1, \dots, f_l)$ に対する多変数 b -関数とよぶ．

$(GL(\underline{n}), \text{Rep}(Q, \underline{n}))$ の多変数 b -関数 $b_{\underline{m}}(\underline{s})$ の計算法を述べる． $I_{\underline{n}}(Q)$ の元に適当に番号をふり，

$$I_{\underline{n}}(Q) = \{(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_l, q_l)\}$$

とし，以後は， $f_{(p_1, q_1)} = f_1$ ， $N^{(p_2, q_2)} = N^{(2)}$ ， $\mathcal{F}^{(p_3, q_3)} = \mathcal{F}^{(3)}$ ，... などのような書き方をする．

1°. まず， $s_1 + \mathcal{F}^{(1)}$ ， $s_2 + \mathcal{F}^{(2)}$ ，...， $s_l + \mathcal{F}^{(l)}$ の第 $(k-1)$ 成分たち

$$\begin{aligned} & \left\{ s_1 + N_{k, k-1}^{(1)} - N_{kk}^{(1)} + 1, \dots, s_1 + N_{kk}^{(1)} (= s_1 + n_k) \right\} \\ & \left\{ s_2 + N_{k, k-1}^{(2)} - N_{kk}^{(2)} + 1, \dots, s_2 + N_{kk}^{(2)} (= s_2 + n_k) \right\} \\ & \dots\dots\dots \\ & \left\{ s_l + N_{k, k-1}^{(l)} - N_{kk}^{(l)} + 1, \dots, s_l + N_{kk}^{(l)} (= s_l + n_k) \right\} \end{aligned}$$

に対して，「定数項が同じならば，1 次の項を足し合わせて一つにまとめる」という操作を行う．また空集合 $\emptyset$ は無視する．

例 5.1.

$$\begin{aligned} & \{s_1 + 3, s_1 + 4, s_1 + 5\} \\ & \{s_2 + 4, s_2 + 5\} \\ & \emptyset \\ & \{s_4 + 1, s_4 + 2, s_4 + 3, s_4 + 4, s_4 + 5\} \end{aligned}$$

に対しては，あらたに

$$s_4 + 1, s_4 + 2, s_1 + s_4 + 3, s_1 + s_2 + s_4 + 4, s_1 + s_2 + s_4 + 5$$

という 1 次式が構成される．

2°. 上の 1° の操作をすべての $k = 2, \dots, r$ に対しておこなう．

3°. 上の 2° で得られた 1 次式を

$$s_{i_1} + s_{i_2} + \dots + s_{i_t} + \alpha \quad \longmapsto \quad [s_{i_1} + s_{i_2} + \dots + s_{i_t} + \alpha]_{m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_t}}$$

に置き換えてから全部掛け合わせる．ここで，記号は

$$[A]_m := A(A+1)(A+2) \cdots (A+m-1)$$

という意味である．以上の操作により得られた多項式が $b_{\underline{m}}(\underline{s})$ である．

例 5.2. 例 4.3 において, $f_1 := f^{(3,4)}$, $f_2 := f^{(1,5)}$ と番号をふる (これは恣意的).

$$s_1 + \mathcal{F}^{(1)} = s_1 + \mathcal{F}^{(3,4)} = \{\emptyset; \emptyset; \{s_1 + 1, s_1 + 2, s_1 + 3, s_1 + 4, s_1 + 5, s_1 + 6\}; \emptyset\},$$

$$s_2 + \mathcal{F}^{(2)} = s_2 + \mathcal{F}^{(1,5)} = \{\{s_2 + 4, s_2 + 5\}; \{s_2 + 5, s_2 + 6\}; \{s_2 + 5, s_2 + 6\}; \{s_2 + 1, s_2 + 2\}\}$$

に対して, 上記の 1° の操作を行うと, $\mathcal{F}^{(3,4)}$ の第 1,2,4 成分が空集合なので, 第 1,2,4 成分からはそのまま $\{s_2 + 4, s_2 + 5\}$ $\{s_2 + 5, s_2 + 6\}$, $\{s_2 + 1, s_2 + 2\}$ が現れ, 第 3 成分で

$$\begin{array}{ccc} \{s_1 + 1, s_1 + 2, s_1 + 3, s_1 + 4, s_1 + 5, s_1 + 6\} & \longmapsto & s_1 + 1, s_1 + 2, s_1 + 3, s_1 + 4, \\ \{s_2 + 5, s_2 + 6\} & & s_1 + s_2 + 5, s_1 + s_2 + 6 \end{array}$$

という重ね合わせがおこる. すべての 1 次式を並べると (上記 2° の操作),

$$\begin{array}{l} s_1 + 1, s_1 + 2, s_1 + 3, s_1 + 4, \\ s_2 + 1, s_2 + 2, s_2 + 4, (s_2 + 5)^{\times 2}, s_2 + 6, \\ s_1 + s_2 + 5, s_1 + s_2 + 6 \end{array}$$

となり, 上記 3° のようにして掛け合わせると多変数 b -関数 $b_{\underline{m}}(\underline{s})$ が得られる. すなわち,

$$\begin{aligned} b_{\underline{m}}(\underline{s}) &= [s_1 + 1]_{m_1} [s_1 + 2]_{m_1} [s_1 + 3]_{m_1} [s_1 + 4]_{m_1} \\ &\quad \times [s_2 + 1]_{m_2} [s_2 + 2]_{m_2} [s_2 + 4]_{m_2} [s_2 + 5]_{m_2}^2 [s_2 + 6]_{m_2} \\ &\quad \times [s_1 + s_2 + 5]_{m_1+m_2} [s_1 + s_2 + 6]_{m_1+m_2} \end{aligned}$$

である. レース・ダイアグラムを使うと, 重なり方の様子が見やすくなる. まず, $s_1 + \mathcal{F}^{(3,4)}$ と $s_2 + \mathcal{F}^{(1,5)}$ に現れる因子を次のようにレース・ダイアグラム内の矢印に対応させる. この 2 つのダ

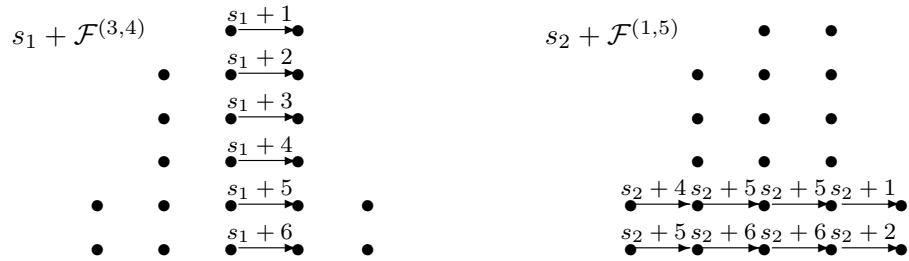
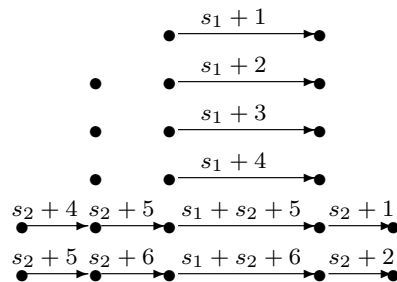


図 3 $s_1 + \mathcal{F}^{(3,4)}$ と $s_2 + \mathcal{F}^{(1,5)}$ に対応するダイアグラム

イアグラムを重ね合わせたときに, 同じ矢印に対応している因子のところで「因子の重ね合わせ」が生じている.



例 5.3. 例 4.4 において, $f_1 := f^{(1,4)}$, $f_2 := f^{(2,5)}$ と番号をふる .

$$s_1 + \mathcal{F}^{(1,4)} = \{\{s_1 + 4, s_1 + 5\}; \{s_1 + 5, s_1 + 6, s_1 + 7\}; \{s_1 + 1, s_1 + 2, s_1 + 3, s_1 + 4\}; \emptyset\},$$

$$s_2 + \mathcal{F}^{(2,5)} = \{\emptyset; \{s_2 + 3, s_2 + 4, s_2 + 5, s_2 + 6, s_2 + 7\}; \{s_2 + 3, s_2 + 4\}; \{s_2 + 1, s_2 + 2\}\}$$

に対して, $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ の操作を行い,

$$\begin{aligned} b_m(\underline{s}) &= [s_1 + 1]_{m_1} [s_1 + 2]_{m_1} [s_1 + 4]_{m_1} [s_1 + 5]_{m_1} \\ &\quad \times [s_2 + 1]_{m_2} [s_2 + 2]_{m_2} [s_2 + 3]_{m_2} [s_2 + 4]_{m_2} \\ &\quad \times [s_1 + s_2 + 3]_{m_1+m_2} [s_1 + s_2 + 4]_{m_1+m_2} [s_1 + s_2 + 5]_{m_1+m_2} \\ &\quad \times [s_1 + s_2 + 6]_{m_1+m_2} [s_1 + s_2 + 7]_{m_1+m_2} \end{aligned}$$

を得る . 今の場合でもレース・ダイアグラムを使うと, 重なり方の様子が見やすくなる . まず,

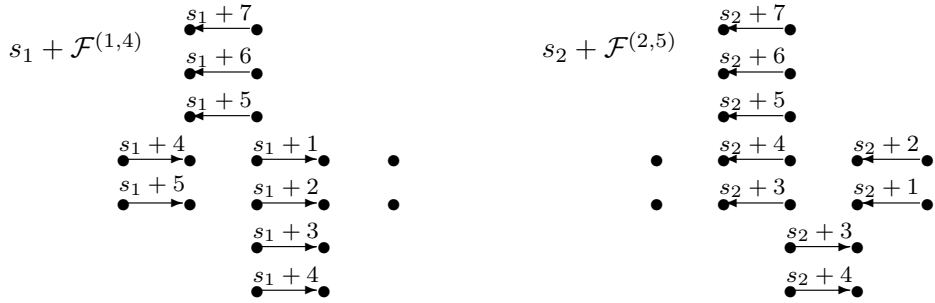
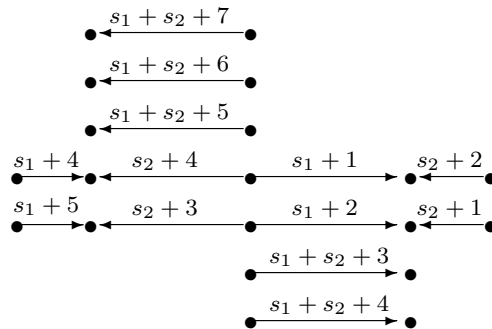


図 4 $s_1 + \mathcal{F}^{(1,4)}$ と $s_2 + \mathcal{F}^{(2,5)}$ に対応するダイアグラム

図 4 のように $s_1 + \mathcal{F}^{(1,4)}$ と $s_2 + \mathcal{F}^{(2,5)}$ に現れる一次式をレース・ダイアグラム内の矢印に対応させる . ここで右向きの矢印と左向きの矢印で因子の対応のさせ方を変えている (講演で詳しく説明する予定) . 先程と同じように, この 2 つのダイアグラムを重ね合わせたときに同じ矢印に対応する因子のところで「因子の重ね合わせ」が生じている .



多変数の b -関数の計算には, b -関数の構造定理 ([9]) と b -関数の局所化 ([13], [12]) を用いる . 時間に余裕があれば, 計算の詳細についても触れたい .

参考文献

- [1] S. Abeasis, Codimension 1 orbits and semi-invariants for the representations of an oriented graph of type $\mathcal{A}_n$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **282**(1984), 463–485.
- [2] S. Abeasis and A. Del Fra, Degenerations for the representations of a quiver of type $\mathcal{A}_m$, *J. Algebra* **93**(1985), 376–412.
- [3] A. Knutson, E. Miller and M. Shimozono, Four positive formulae for type A quiver polynomials, *Invent. Math.* **166**(2006), 229–325.
- [4] A. Gyoja, Theory of prehomogeneous vector spaces without regularity condition, *Publ. RIMS.* **27**(1991), 861–922.
- [5] R. Howe and T. Umeda, The Capelli identity, the double commutant theorem and multiplicity free actions, *Math. Ann.* **290**(1991), 565–619.
- [6] T. Kimura, *Introduction to prehomogeneous vector spaces*, Translations of Mathematical Monographs, vol. **215**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, Translated by Makoto Nagura and Tsuyoshi Niitani and revised by the author.
- [7] K. Koike, Relative invariants of the polynomial rings over Type $A_r, \tilde{A}_r$ quivers, *Adv. Math.* **86**(1991), 235–262.
- [8] F. Sato and K. Sugiyama, Multiplicity one property and the decomposition of b -functions, *Internat. J. Math.* **17**(2006), 195–229.
- [9] M. Sato, Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part) —the English translation of Sato’s lecture from Shintani’s note. Notes by Takuro Shintani. Translated from the Japanese by Masakazu Muro, *Nagoya Math. J.* **120**(1990), 1–34.
- [10] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura and T. Oshima, Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces, *Invent. Math.* **62**(1980), 117–179.
- [11] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their invariants, *Nagoya Math. J.* **65**(1977), 1–155.
- [12] K. Sugiyama, b -Function of a prehomogeneous vector space with no regular component, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **54**(2005), 99–119.
- [13] K. Ukai, b -Functions of prehomogeneous vector spaces of Dynkin-Kostant type for exceptional groups, *Compositio Math.* **135**(2003), 49–101.