

実簡約対称空間上の調和解析－歴史と課題－

Harmonic analysis on real reductive symmetric spaces: history and prospects

佐野 茂 (shigeru SANO)*

2008 年 11 月 12 日

はじめに

20 世紀の前半に、非可換群の分類が明確になされたことは理論上とても興味深い。このように分類が明確に与えられることはまれなことだが、単純群の分類としてディンキンダイアグラムや佐武ダイアグラムを使って明確に与えられたのである。少し広げた簡約群の研究は 20 世紀に活発になされ、多くの成果が生み出されていった。

解析的構造をもつ簡約リー群上では、フーリエ解析に対応する理論の構築が表現論を用いて試みられた。コンパクト群の場合にはワイル、カルタン ([C])、杉浦光夫 ([Su2]) らにより対称空間もこめて研究が深くなされ、歴史的な考察も杉浦光夫によりなされた。ところが、非コンパクト群の場合の歴史についてはまだ十分整理されていない。

非コンパクト簡約リー群では無限次元表現論がヒルベルト空間論やバナッハ空間論を用いられて展開された。無限次元表現に対する指標や不変固有超関数の理論にはシュワルツの超関数論が用いられた。さらに非コンパクトリーマン対称空間上でのヘルガソン予想には佐藤の超関数論が用いられた ([K-])。このように新しい解析学での成果を取り込みながら理論が雄大に構築されていった。この分野では日本人の貢献も大きい、こうした興味深い歴史を追ってみたい。

以前、現在までの理論における問題点を指摘しておいた ([S4])。そこを復習しながら、改善した新たな構想を示す。実簡約リー群上の調和解析において Harich-Chandra は主系列表現の実現、指標そして不変固有超関数など多くの仕事をし、さらに保型形式論より概念を入れて研究を進めることにより成功している。その後理論は実簡約対称空間上の調和解析へと発展していった。最近になり完備性 (completeness) の証明までなされたので、この間の成果をまとめてみる。

G/H を H-C クラスの簡約対称空間とする。簡約群 G の対称空間 G/H への作用を考えると表現論から調和解析の基本的な問題は次のようにまとめられる。

(1) G/H 上の左不変微分作用素環 $D(G/H)$ によるスペクトル分解を与える。すなわち $L^2(G/H)$ の関数を $D(G/H)$ の固有関数で分解する。

*北海道職業能力開発大学校, 小樽市銭函 ssano@uitec.ac.jp

(2) G の $L^2(G/H)$ における正則表現

$$(T_g f)(x) = f(g^{-1}x) \quad (x \in G/H, g \in G)$$

を G の既約ユニタリ表現により分解する．これは Plancherel 公式である．

(3) eH (e は G の単位元) 上のディラック測度を H -不変固有超関数で展開する．これは逆 Fourier 変換である．

例えば $G \times G$ での対合 σ を $\sigma(g, h) = (h, g)$ とする． $\Delta = (G \times G)^\sigma$ を σ -不変な元全体からなる $G \times G$ の閉部分群とする．群 G と対称空間 $G \times G/\Delta$ とは対応 $G \ni g \mapsto (g, e)\Delta \in G \times G/\Delta$ により同一視できる．このことより簡約対称空間は簡約リー群の自然な一般化といえる．そこで G 上の調和解析の諸成果を G/H 上に拡張しようという試みが多くの人々によりなされていった．

このように群多様体の一般化とみなすのは自然な研究方向だが，群の場合の指標や不変固有超関数などの軌道理論が使えないなどけっして余易ではなかった．多くの論文が発表されたが，この方向では従来の研究内容を超えるものは出てこなかった．そこで Harish-Chandra プログラムと呼ぶことにする．

一方対称空間 G/H の双対リーマン対称空間 G^d/K^d をとる．この空間 G^d/K^d 上では Micro-local-analysis を用いてヘルガソン予想が解決されたが，ここでの成果を生かし，大島利雄らは G^d の極小放物部分群 P^d の G^d/K^d での閉軌道に対応して離散系列表現の特徴づけをおこなった．また $L^2(G/H)$ の正則表現に寄与する表現が緩増加表現 (tempered representation) であることを明確にして，その表現を特徴づけるために境界値をとる方法を与えた．さらに対称空間に大島のコンパクト化や構造論を導入して調和解析を展望した．この研究方向を大島プログラムと呼ぶ．

これら 2 つのプログラムに沿って，多くの成果が 1980 年代に発表された．さらに 1990 年代に入り，2 つのプログラムは融合され見通しのよい理論へと結実していった．これらの研究プログラムと完備性の証明までの諸結果を述べていく．さらに 5 節では，提出された理論における課題を指摘し，その課題をどのように解決したらよいかのプログラムを与える．

1 簡約対称空間

G を H-C クラスの簡約対称空間とする． σ を G の対合的自己同形とする． G^σ を G の σ 不変元全体の部分群とし， G^σ の開部分群 H をとる． θ を σ と可換な Cartan 対合とする． $K = G^\theta$ とする． $\mathfrak{g}$ を G のリー環とし， σ による固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$ とする．また θ による固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とする．以下いくつかの例を上げる．

例

$$SL(n, \mathbb{R})/SO(n-j, j), \quad GL(n, \mathbb{R})/GL(n-j, \mathbb{R}) \times GL(j, \mathbb{R})$$

$$SL(n, \mathbb{C})/SU(n-j, j)$$

2 離散系列表現—大島プログラム—

この節では

$$V \subset L^2(G/H)$$

の G -不変部分空間に実現される G の既約ユニタリ表現を離散系列表現という．この離散系列表現が存在するための条件をまとめる．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} + \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$$

これらの双対は

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + \sqrt{-1}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) + \sqrt{-1}(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}, \\ \mathfrak{h}^d &= \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + \sqrt{-1}(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}), \quad \mathfrak{k}^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + \sqrt{-1}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) \end{aligned}$$

となる． G_c を G の複素化とする． G^d , K^d , H^d を $\mathfrak{g}^d$, $\mathfrak{k}^d$, $\mathfrak{h}^d$ に対応する G_c の解析的部分群とする． $\tau \in \hat{K}$ に対して空間を

$$Ana(G/H, \tau) = \{f \in Ana(G/H) : f(k^{-1}x) = \tau(k)f(x) \quad k \in K\},$$

$$Ana(G^d/K^d, \tau) = \{f \in Ana(G^d/K^d) : f(h^{-1}x) = \tau(h)f(x) \quad h \in H^d\}$$

で定義する．

例

$G/H = SL(n, \mathbb{R})/SO((n-j, j))$ の双対は $G^d/K^d = SU(n-j, j)/SU(n)$

$SL(n, \mathbb{C})/SL(n, \mathbb{R})$ の双対は $SL(n, \mathbb{C})/SU(n)$ ．

さらに

$$\begin{aligned} Ana_K(G/H) &= \sum_{\tau \in \hat{K}} Ana(G/H, \tau) \\ Ana_{H^d}(G^d/K^d) &= \sum_{\tau \in \hat{H}^d(K)} Ana(G^d/K^d, \tau) \end{aligned}$$

とおき対応 γ を

$$\gamma : Ana_K(G/H) \rightarrow Ana_{H^d}(G^d/K^d)$$

次の条件

$$(1) f^\gamma(x) = f(x) \quad f \in Ana_K(G/H), \quad x \in G \cap G^d$$

$$(2) \gamma \text{ は左 } U(\mathfrak{g})\text{-作用と右 } U(\mathfrak{g})^h\text{-作用と可換}$$

を満足するように定義する．

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大可換部分空間とする． $\mathfrak{p}^d = \sqrt{-1}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大可換部分空間で $\mathfrak{a}$ を含むものを $\mathfrak{a}_p^d$ とする． $(\mathfrak{a}_p^d, \Sigma^+(\mathfrak{a}_p^d))$ に対応した G^d の極小放物部分群を $P^d = M^d A_p^d N^d$ とする． $\mu \in (\mathfrak{a}_p^d)^*$ に対し関数空間

$$\mathcal{B}(G^d/P^d : L_\mu) = \{f \in \mathcal{B}(G^d) : f(xman) = a^{\mu-\rho} f(x), \quad x \in G^d, \quad m \in M^d\}$$

$$Ana(G/H : \mathcal{M}_\mu) = \{f \in Ana(G/H) : Df = \chi_\mu(D)f, \quad D \in \mathbf{D}(G/H)\}$$

$$Ana(G^d/K^d : \mathcal{M}_\mu^d) = \{f \in Ana(G^d/K^d) : Df = \chi_\mu^d(D)f, \quad D \in \mathbf{D}(G^d/K^d)\}$$

を定義し , ポワソン変換 $\mathcal{P}_\mu$

$$\mathcal{P}_\mu : \mathcal{B}(G^d/P^d : L_\mu) \rightarrow \text{Ana}(G^d/K^d : \mathcal{M}_\mu^d)$$

を

$$(\mathcal{P}_\mu)f(xK^d) = \int_{K^d} e^{<-\mu-\rho, H(x^{-1}k)>} f(k) dk$$

で与える . さらに

$$\mathcal{B}(G^d/P^d : L_\mu, \tau) = \{f \in \mathcal{B}(G^d/P^d : L_\mu) : f(k^{-1}x) = \tau(k)f(x) \quad k \in K^d\}$$

$$\mathcal{B}_{H^d}(G^d/P^d : L_\mu) = \sum_{\tau \in \hat{H}^d(K)} \mathcal{B}(G^d/P^d : L_\mu, \tau)$$

とおくと

$$\mathcal{P}_\mu : \mathcal{B}_{H^d}(G^d/P^d : L_\mu) \rightarrow \text{Ana}_{H^d}(G^d/K^d)$$

$$\beta_\mu : \text{Ana}_{H^d}(G^d/K^d) \rightarrow \mathcal{B}_{H^d}(G^d/P^d : L_\mu)$$

は $(U(\mathfrak{g}), H^d)$ -同型となる . まとめると $\beta \cdot \gamma(\text{Ana}_K(G/H : \mathcal{M}_\mu) \cap L^2(G/H))$ は $\mathcal{B}_{H^d}(G^d/P^d : L_\mu)$ の部分空間を特徴付ける .

定理 2.1

$\mu \in (\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d)_c^*$ は $\text{Re} < \mu, \alpha > \geq 0, \forall \alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d)^+$ をみたすとする . このとき

(1)

$\text{Ana}_K(G/H : \mathcal{M}_\mu) \cap L^2(G/H) \neq 0$ ならば

$$\text{rank } G/H = \text{rank } K/K \cap H$$

$$\text{Re} < \mu, \alpha > > 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d)^+$$

を満足 .

(2)

$\text{rank } G/H = \text{rank } K/K \cap H, \quad \text{Re} < \mu, \alpha > > 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d)^+$ ならば次の $\mathfrak{g}_c$ -同型

$$\gamma^{-1} \cdot \mathcal{P}_\mu : \sum_{j=1}^m \mathcal{B}_{H^d}(G^d/P^d : L_\mu) \xrightarrow{\sim} \text{Ana}_K(G/H : \mathcal{M}_\mu) \cap L^2(G/H)$$

が成立 .

大島利雄はこの成果をもとにさらに緩増加表現を特徴づけることにより Plancherel 公式にでてくる表現を求め , さらに境界値をとることにより Plancherel 測度を求めるという調和解析の展望を与えている ([O1,2],[OM],[OS1,2]) .

3 保型形式論の概念の展開－Harish-Chandra プログラム－

群上の調和解析に Harish-Chandra は保型形式より不変項 (constant term) や尖点形式 (cusp form) などの概念を導入して成果を上げたが、これらの概念は簡約対称空間へと一般化されていった ([D],[BS])。こうした成果をまとめてみる。

$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大可換部分群 $\mathfrak{a}_0$ を固定し、 $A_0 = \exp \mathfrak{a}_0$ とおく。 $\theta\sigma$ -不変な A_0 を含む放物部分群 P をとり、その σ -Langlands 分解を $P = MAN$ とする。 $L = P \cap \theta(P)$ は Levi 部分で $A = \{a \in L : \sigma(a) = a^{-1}\}$ である。一般には M は通常の Langlands 分解より大きい。

仮定 上のような放物部分群 P を適当にとると、 G の両側 (P, H) 軌道

$$PH \subset G$$

は唯一つの開軌道となると仮定する。

例えばリーマン対称空間のときは $\sigma = \theta$ で極小放物部分群 P_0 をとれば条件を満足する。さらに群多様体 $G = G \times G/\Delta$ のとき、 P を G の尖点的放物部分群 (cuspidal parabolic subgroup) とすると放物部分群 $P = P \times \bar{P}$ は条件を満足する。一般には尖点的放物部分群より大きな放物部分群をとることになる。

対称空間上の関数の極限への増大度を明確にするため記号を準備する。分解 $G = KA_0H$ により

$$\zeta(x) = |a| \quad (x = kaH \in G/H, k \in K, a \in A_0)$$

とおく。次に群 G 上の Ξ 関数を用いて、 G/H 上の増大度を捉えるために

$$\Theta(x) = \sqrt{\Xi(g\sigma(g)^{-1})} \quad (x = gH \in G/H)$$

とおく。

(τ, V) を K の有限次元ユニタリ表現とし、関数 $f : G/H \rightarrow V$ が $f(kx) = \tau(k)f(x)$ ($k \in K, x \in G/H$) を満足するとき τ -球関数という。 τ -球関数 $f(x)$ が条件、定数 $r \geq 0$ が存在して、すべての $D \in U(\mathfrak{g})$ に対して

$$\sup_{x \in G/H} |(l(D)f)(x)|(1 + \zeta(x))^{-r}\Theta(x)^{-1} < \infty$$

を満たすとき、弱不等式を満足するという。

すべての $r \geq 0$ とすべての $D \in U(\mathfrak{g})$ に対して

$$\sup_{x \in G/H} |(l(D)f)(x)|(1 + \zeta(x))^r\Theta(x)^{-1} < \infty$$

を満たすとき、強不等式を満足するという。

関数空間を次のように定義する。

$C^\infty(G/H, \tau) : G/H$ 上の C^∞ な τ -球関数

$\mathcal{C}(G/H, \tau) : C^\infty(G/H, \tau)$ に属する強不等式を満足する関数

$\mathcal{A}(G/H, \tau) : C^\infty(G/H, \tau)$ に属する $D(G/H)$ -有限な関数

$\mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau) : \mathcal{A}(G/H, \tau)$ に属する弱不等式を満足する関数

$\mathcal{A}_2(G/H, \tau) : \mathcal{A}(G/H, \tau)$ に属する 2 乗可積分関数
 $\mu \in \mathfrak{a}_c^*$ を $\langle \mu - \rho, \alpha \rangle > 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a})$ をみたすようにとる . $\tau_M = \tau|_{M \cap K}$ とし
 $\phi \in \mathcal{A}_2(M/M \cap H, \tau_M)$ をとり

$$\Phi_\mu(x) = \begin{cases} a^{-\mu+\rho_P} \phi(m) & (x = namH \in PH), \\ 0 & (x \notin PH) \end{cases}$$

とおく . Eisenstein 関数を

$$E(P, \phi, \mu)(x) = \int_K \tau(k^{-1}) \Phi_\mu(kx) dk$$

で定義する . この Eisenstein 関数により表現をとらえている . 実際 , この放物部分群からの誘導表現

$$\pi = \text{Ind}_{P \uparrow G} \xi_\phi \otimes \mu \otimes 1$$

により一般化された主系列表現を与える . この主系列表現 π の H -不変超関数ベクトル w と K -有限ベクトル v を適当にとると , π の contragredient 表現 π' を用いて $\langle \pi'(g)w, v \rangle$ ($g \in G$) で Eisenstein 積分は表される . また $\mathfrak{a}_c^*$ 上の関数として次の性質をもつ .

定理 3.1 $E(P, \phi, \mu)$ は $\mathfrak{a}_c^*$ 上の関数に有理関数として拡張できる . さらに

$$p_\phi(\mu) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a})} \{(\alpha, \mu) + C_\alpha\} \quad (C_\alpha \in \mathbb{C})$$

なる形の多項式関数を適当にとると $E(P, \phi, \mu)p_\phi(\mu)$ は $i\mathfrak{a}^*$ のまわりで正則関数になる .

定理 3.2 $\mu \in i\mathfrak{a}^*$ に対し $E(P, \phi, \mu)(x)$ は定義されるとき G/H 上の緩増加関数となる .

また不変項の概念は次のように一般化される . 放物部分群 $P = MAN$ の Levi 部分 $L = MA$ において , $\phi \in \mathcal{A}_{tem}(G/H, \tau)$ に対して次の関係を満足する $\phi_P \in \mathcal{A}_{tem}(L/L \cap H, \tau_L)$ が一意に存在する

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ P}} \{\delta_P^{1/2}((\exp tX)l) \phi((\exp tX)l) - \phi_P((\exp tX)l)\} = 0 \quad (X \in \mathfrak{a}^+, l \in L/L \cap H)$$

$Q = M_Q A_Q N_Q$ を G の $\sigma\theta$ -不変放物部分群で $P = MAN$ と Levi 部分 $MA = M_Q A_Q$ は同じものとする . $Ad(G)$ より誘導される $\mathfrak{a}$ での Weyl 群を $W(\mathfrak{a})$ とする . Eisenstein 積分 $E(P, \phi, \mu)$ の Q 方向の不変項をとると , 対応 $\mathfrak{a}_c^* \ni \mu \rightarrow C_{Q|P}(s, \mu) \in \text{End}(\mathcal{A}_2(M/M \cap H, \tau_M))$ で

$$E(P, \phi, \mu)_Q(ma) = \sum_{s \in W(\mathfrak{a})} (C_{Q|P}(s, \mu) \phi)(m) a^{-s\mu} \quad (m \in M_P, a \in A_P, \mu \in \mathfrak{a}^*)$$

を満足するようにできる . この C -関数を用いて Eisenstein 積分を次のように

$$E^0(P, \phi, \mu) = E(P, C_{P|P}(1, \mu)^{-1} \phi, \mu)$$

正規化する．この群多様体のときには指標を用いて Fourier 変換を定義したが，対称空間のときには変換をどう与えるかは問題となる．このような正規化は一つのやりかたである．

次に G の σ -Langlands 分解された $\sigma\theta$ -不変放物部分群 $P = MAN$, $P' = M'A'N'$ をとる． $\phi \in \mathcal{A}_2(M/M \cap H, \tau_M)$, $\phi' \in \mathcal{A}_2(M'/M' \cap H, \tau'_M)$ に対して $\mathfrak{a}_c^*$ 上の多項式 p_ϕ , $p_{\phi'}$ を $i\mathfrak{a}^*$ の近傍で $F(\mu) = p_\phi(\mu)E(P, \phi, \mu)$, $i\mathfrak{a}'^*$ の近傍で $F'(\mu) = p_{\phi'}(\mu)E(P', \phi', \mu)$ がそれぞれ正則となるようにとる．

以下 G を半単純と仮定する． $T \in \mathfrak{a}'_0$ をとり C'_T を $W(\mathfrak{a}_0)T$ の convex hull とする．さらに G/H の部分集合 $C_T = K(\exp C'_T)H$ とおき，積分

$$\Omega^T(\mu, \mu') = \int_{C_T} (F(\mu)(x), F(\mu')(x)) dx$$

定理 3.3 次の条件を満足する $i\mathfrak{a}^* \times i\mathfrak{a}^*$ 上の解析的関数 $\omega^T(\mu, \mu')$ が存在する．

(1) A と A' が K で共役にならないとき $\omega^T(\mu, \mu') = 0$ ．

(2) $T \rightarrow \infty$ のとき $\omega^T(\mu, \mu') \rightarrow \Omega^T(\mu, \mu')$

この ω^T の形は具体的に求まり，このことから次の定理を得る．

定理 3.4(正則性定理) 正規化された Eisenstein 積分 $E^0(P, \phi, \mu)$ は $i\mathfrak{a}^*$ の近傍で正則である．

この定理は群多様体のときに N. Wallach により与えられている ([W1,2]) ．

4 Fourier 変換

$f \in \mathcal{C}(G/H, \tau)$ に対して $\mu \in i\mathfrak{a}^*$ と $\phi \in \mathcal{A}_2(M/M \cap H, \tau_M)$ をとり，Fourier 変換を

$$((\mathcal{F}_P^0 f)(\mu), \phi) = \int_{G/H} (f(x), E^0(P, \phi, \mu)(x)) dx$$

で定義する．このとき

定理 4.1 シュワルツ空間 $S(i\mathfrak{a}^*)$ として

$$\mathcal{F}_P^0 f \in S(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathcal{A}_2(M/M \cap H, \tau_M)$$

定理 4.2 $\Phi \in S(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathcal{A}_2(M/M \cap H, \tau_M)$ に対して

$$\mathcal{I}_P^0(x) = \int_{i\mathfrak{a}^*} E^0(P, \Phi(\mu), \mu) d\mu \quad x \in G/H$$

は $\mathcal{I}_P^0(x) \in \mathcal{C}(G/H, \tau)$ となる．

定理 4.3 次の $\mathcal{C}(G/H, \tau)$ 上の変換 $\mathcal{P}_\tau$ は

$$\mathcal{P}_\tau = \sum_{P \in \mathbb{F}} (W(\mathfrak{a}_P))^{-1} \mathcal{I}_P^0 \mathcal{F}_P^0$$

(1) $\mathcal{C}(G/H, \tau)$ 上の正射影変換となる．

(2) $\mathcal{C}(G/H, \tau)$ 上の恒等変換となる．

5 理論の課題と構想

前節までにまとめたように，理論は一応の完成をみている．ここでは残された課題を上げてみよう．まず，提出理論ではそれぞれの対称空間を独立の空間として考えている点である．例えば次の対称空間

$$Sp(2n, \mathbb{R})/Sp(n, \mathbb{C}), Sp(2n, \mathbb{R})/S(GL(2n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}),$$

$$Sp(2n, \mathbb{R})/S(U(2n-j, j) \times \mathbb{R}), Sp(2n, \mathbb{R})/Sp(2n-j, \mathbb{R}) \times Sp(j, \mathbb{R})$$

は $G = Sp(2n, \mathbb{R})$ の対称空間である． G のどの表現が正則表現 $L^2(G/H)$ の分解に寄与しているかどうかは他の正則表現 $L^2(G)$ や $L^2(G/H')$ の分解と比較できるように統一的に理論構成するのが望ましい．ところがこの理論では，それぞれ対称空間ごとに主系列表現を決める G の放物部分群 P を軌道 PH が開軌道となるようにとるために，主系列表現が対称空間ごとに異なり不統一となっている．

また対称空間 G/H の離散系列表現は G の離散系列表現がそのまま現れる場合と G の主系列表現の連続パラメーターが退化した場合とがあるがその部分も不明確になっている．さらに表現の重複度についても，元になる放物部分群を色々と変えてしまうので不鮮明である．

群多様体 G は対称空間 $G \times G/\Delta$ と同一視できるが，この場合には表現の指標により展開されるのが自然な理論と言える．ところが提出理論では指標とは関係付けられない Eisenstein 積分を用いている．そのため不変固有超関数など，群多様体における魅力ある理論が消されている．またその c -双対である G_c/G についても不変帯球超関数の理論が使えたが，この理論も消されている．やはり対称空間に概念を広げたからには既存の理論を自然に含み，統一的に理解できるのが望ましい．

こうした問題点を解決するには，どの対称空間 G/H に対しても， G の尖点的放物部分群 $P = M_P A_P N_P$ を用いて主系列表現を構成するのがよい．ところが軌道 PH が G の開軌道には一般的にはならないので，新たに尖点的放物部分群 P に従う軌道分解を与えることにする（文献 [S3]）．

そしてこの新しい軌道分解に従って，Eisenstein 積分を定義して理論構成をしていくこととする．こうすることにより，先に述べた理論上の問題点を解消することができるのである．

6 尖点的放物部分群に付随した Eisenstein 積分

$\mathfrak{q}$ の θ -不変 Cartan 部分空間 $\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$ をとる．この $\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$ を含む， $\mathfrak{g}$ の θ, σ -不変 Cartan 部分環 $\mathfrak{j}$ をとる（[Su1]）．

$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{j} \cap \mathfrak{p}$, に対して $L = Z_G(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ そして $X(L) = \text{Hom}(L, \mathbb{R}^\times)$ とおく． L の部分群を

$$M = \bigcap_{\chi \in X(L)} \text{Ker } |\chi|, \quad A_{\mathfrak{p}} = \exp \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}.$$

と定義すると，分解 $L = M A_{\mathfrak{p}}$, $M \cap A_{\mathfrak{p}} = \{e\}$ を得る．ルート系 $\Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{g})$ の順序を $\mathfrak{h}$ -compatible となるようにとり， $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}^\alpha$, $N = \exp \mathfrak{n}$, とおくと G の尖点的放物

部分群 $P = MA_{\mathfrak{p}}N$ が決まる．これは尖点的放物部分群 P のラグランジュ分解 $P = M_P A_P N_P$ ($M_P = M, A_P = A_{\mathfrak{p}}, N_P = N$) と表わせる． $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{p}$ に対応した Weyl 群 W とその部分群 W_H を

$$W = N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a}), \quad W_H = N_{K \cap H}(\mathfrak{a})/Z_{K \cap H}(\mathfrak{a}).$$

と定義し，その商空間を $W^* = W/W_H$ とおく．各 $w \in W^*$ に対する軌道 $K_H w P H$ は G/H の開軌道となる．開軌道 $\bigcup_{w \in W^*} K_H w P H \subset G/H$ は互いに素で稠密である ([S3])．この軌道分解を用いて統一的に調和解析を展開していく．

尖点的放物部分群 $P = MA_{\mathfrak{p}}N$ に対する先の軌道分解を用いて Eisenstein 積分を定義しよう． $\nu \in \mathfrak{a}_c^*$, $\phi \in A_2(M/M \cap H, \tau|_M)$ に対して，次のように Φ_{ν}^w を定義する． $\Phi_{\nu}^w(gH) = \tau(lw)\phi(m) \exp(-\nu + \rho_P)(X)$, $gH = lwmanH \in K_H w P H$, ($a = \exp X \in A = \exp \mathfrak{a}, l \in K_H, man \in P$), $\Phi_{\nu}^w(gH) = 0$, $gH \notin K_H w P H$ ここで $\rho_P = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$ である．

Eisenstein 積分を次のように定義する

$$E(P^w, \phi, \nu)(x) = \int_K \tau(k^{-1}) \Phi_{\nu}^w(kx) dk \quad (x \in G/H)$$

この Eisenstein 積分の意味するところを，いくつかの場合について例で考えてみよう．

１．リーマン対称空間 G/K 場合， $\sigma = \theta$ となり球関数を表している．球関数による展開はよく知られた理論となる．

２．対称空間 $G \times G/\Delta$ の場合，対合自己同形 $\sigma((x, y)) = (y, x)$ に対し $\Delta = (G \times G)^{\sigma} = \{(g, g) : g \in G\}$ となり，対応 $G \ni g \rightarrow (g, e) \in G \times G/\Delta$ により同一視したとき，群多様体 G の主系列表現の指標は対称空間 $G \times G/\Delta$ の Eisenstein 積分により表される．群多様体における不変固有超関数の魅力ある理論が，対称空間において H -不変帯球超関数として捉えられ統一的に理解できることになる．

３．対称空間 G_c/G の場合，複素簡約リー群 G_c における複素共役をとる対合自己同形 $\sigma(g) = \text{conj}(g)$ により $(G_c)^{\sigma} = G$ とする．この複素簡約リー群 G_c においては Borel 部分群 B により主系列表現が与えられる．対称空間 G_c/G ではこの Borel 部分群 B から決まる主系列表現の退化した系列がランクの数だけ現れる．またこれらの系列は不変帯球超関数により捉えられる．こうした理論も適切に全体の一部として入ってくる．

定理 6.1 $\mathcal{A}_{\text{temp}}(G/H, \tau)$ の関数 φ に対して， $\mathcal{A}_{\text{temp}}(L/L \cap H, \tau)$ に属する φ_P が存在して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_P^{1/2}(m(\exp tX)) \varphi(m(\exp tX)) - \varphi_P(m(\exp tX)) = 0 \quad (m \in L, X \in \mathfrak{a}')$$

が成り立つ．ここで， δ_P は P のモジュラー関数である．

このように結果が自然に構成されていき，全体の理論は見通しのよいものとなると期待される．関連する問題として一つだけ上げておく．

問題 Γ を G の離散部分群とする．このとき正則表現 $L^2(G/\Gamma)$ を既約ユニタリ表現で分解せよ．

この問題は 20 世紀においても研究されてきたが，co-finite の場合にも正確な結果が出ていない．現在の数学の水準では厳密なプランシエル公式は無理なのかもしれない．今世紀に研究が進むと考えたい．

参考文献

- [BS] E.van den Ban, H.Schlichtkrull, *Harmonic analysis on reductive symmetric spaces*, European Congress of Mathematics, Barcelona 2000, **vol 1**,(2001),pp. 565–582.
- [C] E.Cartan, *Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos*, Rend.Circ.Mat.Palermo, **53**,(1929),pp. 217–252.
- [D] P.Delorme, *Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs*, Ann. of Math., **147**,(1998),pp. 417–452.
- [Ha1] Harish-Chandra, *Eisenstein Series over Finite Fields*, Proceedings of a Conference in honor of Professor Marshall Stone at the University of Chicago, (1968),pp. 76–88.
- [Ha2] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups I*, J. Funct. Anal., **19**,(1975),pp. 104–204.
- [Ha3] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups II*, Invent. Math., **36**,(1976a),pp. 1–55.
- [Ha4] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups III*, Ann. of Math., **104**,(1976),pp. 117–201.
- [Hi1] T.Hirai, *Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semi simple Lie groups, IV*, Japan J.Math.,**3**(1977),pp. 1–48.
- [Hi2] T.Hirai, *The characters of the discrete series for semisimple Lie groups*, J.Math.Kyoto Univ. ,**21**(1981),pp. 417–500.
- [K-] M.Kashiwara, A.Kowata, K.Minemura, K.Okamoto, T.Oshima and M.Tanaka, *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space*, Ann, of Math.,**107**,(1977),pp. 145–200.
- [O1] 大島利雄, 半単純対称空間上の調和解析, 数学, (1985),pp. 97–112.
- [O2] T.Oshima, *Fourier analysis on semisimple symmetric spaces, Non commutative harmonic analysis and Lie groups(Marseille-Luminy,1980)*, Lecture Notes in Math., **880**,Springer,(1981),pp. 357–369.
- [O3] T.Oshima, *Asymptotic behaviour of spherical functions on semisimple symmetric spaces*, Adv. Studies in Pure Math., **14**,(1988),pp. 357–369.
- [OM] T.Oshima, T.Matsuki, *A description of discrete series for semisimple symmetric spaces*, Adv. Studies in Pure Math., **4**,(1984),pp. 331–390.
- [OS1] T.Oshima, J.Sekiguchi, *Eigenspaces of invariant differential operators on a semisimple symmetric space*, Inv. Math. **57**,(1980),pp. 1–81.

- [OS2] T.Oshima, J.Sekiguchi, *The restricted root system of a semisimple symmetric pair*, Adv. Studies in Pure Math., **4**,(1984),pp. 433-497.
- [S1] S.Sano, Invariant spherical distributions and the Fourier inversion formula on $GL(n, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{R})$ J.Math. Soc. Japan, **36**,(1984),pp. 191-219.
- [S2] S.Sano, Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples G_c/G J.Math. of Kyoto Univ., **31**,(1991),pp. 377-417.
- [S3] 佐野 茂, フーリエ解析の非可換化への最近 9 5 年簡の歩み, Bull.Polytechnic.Univ. **25-A**,(1996),pp. 115-123.
- [S4] 佐野 茂, 簡約対称空間上の正則表現と調和解析 (第 1 3 回数学史シンポジウム), 津田塾大学数学・計算機科学研究所報, **24**,(2003),pp. 118-126.
- [SI] S.Sano, I.Iida, *Automorphic forms on the space $SL(2, \mathbb{Z}) \backslash SL(2, \mathbb{C}) / SU(2)$* , Bull. Polytechnic University, **31-A**,(2002),pp. 189-194.
- [Su1] M.Sugiura, *Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semi-simple Lie algebras*, J.Math.Soc.Japan, **11**,(1959),pp. 374-434; Correction,*ibid.*,**23**,(1971),pp. 379-383.
- [Su2] M.Sugiura, *Representations of compact groups realized by spherical functions on symmetric spaces*, Proc.Japan Acad., **38**,(1962),pp. 111-113.
- [Su3] M.Sugiura, Unitary representation and harmonic analysis -an introduction-, Kodansha Ltd and Halsted press,(1975).
- [Su4] 杉浦光夫, リー群論, 共立出版 (2000) .
- [SY] 杉浦光夫, 山内恭彦, 連続群論入門, 培風館 (1960) .
- [W1] N.Wallach, Real Reductive Groups I, Academic Press, Pure and Applied Mathematics **132-I**,(1988).
- [W2] N.Wallach, Real Reductive Groups II, Academic Press, Pure and Applied Mathematics **132-II**,(1992).