

On crystals of Lakshmibai-Seshadri paths and extremal weight modules over quantum affine algebras

Satoshi Naito

Institute of Mathematics, University of Tsukuba,
Tsukuba, Ibaraki 305-8571, Japan (e-mail: naito@math.tsukuba.ac.jp)

and

Daisuke Sagaki

Institute of Mathematics, University of Tsukuba,
Tsukuba, Ibaraki 305-8571, Japan (e-mail: sagaki@math.tsukuba.ac.jp)

0 Introduction.

柏原正樹 [23] は、一般の対称化可能な Kac–Moody リー環 $\mathfrak{g}$ の量子普遍展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ 上の (可積分既約最高ウェイト表現の自然な一般化である) extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ を導入し、その結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ の存在を示した。 $\mathfrak{g}$ がアファイン・リー環で extremal ウェイト λ が ‘レベル・ゼロ’ の場合には、この extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ は量子アファイン環 (quantum affine algebra) $U'_q(\mathfrak{g}) (= U_q([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]))$ の有限次元 (既約) 表現の研究において重要な役割を果たす ([26], [57] 参照)。特に、extremal ウェイト λ がレベル・ゼロ基本ウェイト ϖ_i のときの $V(\varpi_i)$ の商加群として得られる (有限次元) $U'_q(\mathfrak{g})$ -加群 $W(\varpi_i)$ は、レベル・ゼロ基本表現と呼ばれ、数理物理学における可解格子模型の研究 ([17], [18]; [13, Chapters 9 and 10] も参照) や、そこから生じる様々な組合せ論 ([60], [62] 参照) と密接な関わりがある。また、 $\mathfrak{g}$ が A, D, E 型のアファイン・リー環の場合には、この extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ は中島啓 [53], [54] によって旗多様体 (のある Lagrangian 部分多様体上の同変連接層の Grothendieck 群) を用いて構成された ‘universal’ 標準加群¹と同型でもある (この結果については、[57] 参照)。さらに、 $V(\lambda)$ は、V. Chari と A. Pressley [5] が $U'_q(\mathfrak{g})$ の Drinfeld new realization を利用して具体的な生成元と基

¹中島氏自身による (雑誌「数学」の) 論説 [52] も参照されたい。

本関係式により定義した ‘universal’ 量子 Weyl 加群 $W_q(\lambda)$ と同型である (柏原による observation; 証明は [57, Remark 2.15] 参照).

一方, C.S. Seshadri と V. Lakshmibai ([31], [33]; [44] も参照) は, 有限次元複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ をリー環とする (連結かつ単連結な) 複素代数群 G に対する standard monomial theory を作り上げる過程で, $\mathfrak{g}$ の支配的整ウェイト λ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト $\mathfrak{g}$ -加群 $L(\lambda)$ についての (負の符号を含まない) ある指標公式を予想した ([34]). この指標公式は, 型 λ の ‘admissible weighted chain’ の全体が $L(\lambda)$ の (ウェイト・ベクトルからなる) ある基底をパラメトライズすることを主張するものであった. P. Littelmann は, 柏原の結晶基底の理論 (柏原氏自身による, 雑誌「数学」の論説 [21] を参照) に触発されて, この admissible weighted chain を実数の閉区間 $[0, 1]$ から $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ の実形 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の双対空間 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ への区分的に線形で連続な写像 (Lakshmibai–Seshadri (LS) パス) と解釈し, 型 λ の LS パス全体の集合 $\mathbb{B}(\lambda)$ に作用する ‘ルート作用素’ を定義することによって, パスモデルの理論に到達した. そして, このパスモデルの理論を用いて, 一般の対称化可能な Kac–Moody リー環 $\mathfrak{g}$ に対して上述の指標公式を証明した ([36], [38]; [29] も参照). その後, 柏原 [25] と A. Joseph [15] は独立に, $\mathfrak{g}$ の量子普遍展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ 上の支配的整ウェイト λ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト加群の結晶基底は, 型 λ の LS パスの全体 $\mathbb{B}(\lambda)$ とクリスタルとして同型であることを証明した.

我々は, $\mathfrak{g}$ がアフィン・リー環で extremal ウェイト λ がレベル・ゼロの場合に, Littelmann のパスモデルの理論を用いて extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ の結晶基底 $B(\lambda)$ を ($\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ に値を取る) ある種のパスの集合として具体的に実現した. さらに, レベル・ゼロ基本表現 $W(\varpi_i)$ たちと, そのテンソル積加群の結晶基底も, パスの集合として具体的に実現した. 本講演では, 我々の一連の論文 [45]–[47], [49], [50] に基づいて, これらの結果を解説する予定である. 但し, 紙数の制限もあるので, この予稿では extremal ウェイト加群に関する結果のみを解説する.

1 Origin of Littelmann’s path model.

先ず, W.V.D. Hodge [12] による Grassmann 多様体の中の Schubert 多様体の斉次座標環についての先駆的な研究を引き継いで, Seshadri, Lakshmibai 等 [31], [33] により (少なくとも古典型の) 連結かつ単連結な複素 (半) 単純代数群に付随する一般の旗多様体 (の中の Schubert 多様体) の場合にまで拡張された standard monomial theory を, 簡単に復習する. これには, Littelmann の LS パスの原型である ‘admissible weighted chain’ の概念が見出された歴史的経緯を知るという目的の他に, 後で述べる我々の主結果との比較のための参考資料としたいという意図もある.

1.1 Standard monomial theory ([63], [30, Chapter 7], [32], [44] 参照).

G を連結かつ単連結な複素 (半) 単純代数群, T をその極大トーラス, $B \supset T$ を (正ルート系 $\Delta_+ \subset X(T) := \text{Hom}(T, \mathbb{C})$ に対応する) Borel 部分群, $\{\varpi_i \in X(T) \mid i \in I\}$ を基本ウェイト系, $\{\alpha_i \mid i \in I\} \subset \Delta_+$ を単純ルート系, $W := N_G(T)/T = \langle s_i = s_{\alpha_i} \mid i \in I \rangle$ を G の Weyl 群, $w_0 \in W$ をその最長元とする. G は単連結なので, 基本ウェイト系 $\{\varpi_i \mid i \in I\}$ が T の指標群 $X(T)$ の $\mathbb{Z}$ -基底を成している. また, 各基本ウェイト ϖ_i ($i \in I$) に対して, $P_i \supset B$ を対応する極大放物型部分群, $W_{P_i} := N_{P_i}(T)/T \subset W$ をその Weyl 群とし, 勝手な部分集合 $J \subset I$ に対して, $Q_J := \bigcap_{i \in J} P_i \subset G$ を対応する放物型部分群, $W_{Q_J} := N_{Q_J}(T)/T \subset W$ をその Weyl 群とする. このとき, 旗多様体 G/Q_J と G/P_i ($i \in J$) の間の自然な射影 $\pi_i : G/Q_J \rightarrow G/P_i$ は商空間 P_i/Q_J をファイバーとするファイバー束を与え, さらに $(Q_J = \bigcap_{i \in J} P_i$ なので) 閉埋め込み $\pi : G/Q_J \rightarrow \prod_{i \in J} G/P_i$ を誘導する. そして, $W_{Q_J} = \bigcap_{i \in J} W_{P_i}$ であり, 自然な写像 $W/W_{Q_J} \rightarrow \prod_{i \in J} W/W_{P_i}$ は単射となる.

ここでは, G は A_{n-1} 型, すなわち $G = SL_n(\mathbb{C})$, $I = \{1, 2, \dots, n-1\}$, とし, 任意に固定された $j \in I$ に対して $J := \{j, j+1, \dots, n-1\}$ とおく. すると, 旗多様体 G/P_i は ($\mathbb{C}^n$ の i 次元部分空間全体の成す) Grassmann 多様体 $Gr_i(\mathbb{C}^n)$ と同型であり, Plücker 埋め込み $G/P_i \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^i \mathbb{C}^n)$ により, $G/P_i \cong Gr_i(\mathbb{C}^n)$ の斉次座標は階数 i の $n \times i$ 行列の (全部で $\binom{n}{i}$ 個の) i 次小行列式 (Plücker 座標) を取ることで与えられる. 今, 各 $i \in I$ に対して, $\mathcal{L}_i$ を射影空間 $\mathbb{P}(\bigwedge^i \mathbb{C}^n)$ 上の直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\bigwedge^i \mathbb{C}^n)}(1)$ の Plücker 埋め込みによる引き戻しとすれば, これは旗多様体 G/P_i の Picard 群 $\text{Pic}(G/P_i) \cong \mathbb{Z}$ の ample な生成元である. 以下, 自然な射影 $\pi_i : G/Q_J \rightarrow G/P_i$ ($i \in J$) によるこの $\mathcal{L}_i \in \text{Pic}(G/P_i)$ の引き戻しを, 同じ記号 $\mathcal{L}_i$ で表すことにする². このとき, G/Q_J の Picard 群 $\text{Pic}(G/Q_J)$ は $\mathbb{Z}^{n-j}$ と同型であり, $\mathcal{L}_i \in \text{Pic}(G/Q_J)$ ($i \in J$) で生成される. そこで, 多重指数 $a = (a_j, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-j}$ に対して

$$\mathcal{L}^a := \mathcal{L}_j^{\otimes a_j} \otimes \mathcal{L}_{j+1}^{\otimes a_{j+1}} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_{n-1}^{\otimes a_{n-1}} \in \text{Pic}(G/Q_J)$$

とおき, 多重次数付き環 $R(J) := \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-j}} H^0(G/Q_J, \mathcal{L}^a)$ を定める.

注意 1.1. この $R(J)$ は, 閉埋め込み $G/Q_J \subset \prod_{i \in J} G/P_i \subset \prod_{i \in J} \mathbb{P}(\bigwedge^i \mathbb{C}^n)$ に関する旗多様体 G/Q_J の多重斉次座標環と (結果的に) 同型になる.

さて, standard monomial theory の (主な) 目標は以下の通りである:

- (1) $H^0(G/P_i, \mathcal{L}_i)$ ($i \in I$) の ‘canonical’ な基底を構成し,

² $H^0(G/Q_J, \mathcal{L}_i) \cong H^0(G/P_i, \mathcal{L}_i)$ ($i \in J$) に注意する.

(2) 各 $j \in I$ に対する多重次数付き環 $R(J) = \bigoplus_{\underline{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-j}} H^0(G/Q_J, \mathcal{L}^{\underline{a}})$ の基底を, (1) の基底の元たちの ‘standard monomial’ として構成する.

注意 1.2. (1) において, 各 $i \in I$ に対して, $H^0(G/P_i, \mathcal{L}_i)$ は基本ウェイト $\varpi_i \in X(T)$ を最高ウェイトとする G の既約最高ウェイト加群 $L(\varpi_i)$ の双対加群 $L(\varpi_i)^*$ と同型であり, 従って $-w_0(\varpi_i) \in X(T)$ を最高ウェイトとする G の既約最高ウェイト加群であることに注意する. (2) において, 特に $j = 1$ とすれば, $J = \{1, 2, \dots, n-1\} = I$ よって $Q_J = Q_I = \bigcap_{i \in I} P_i = B$ となり, $H^0(G/Q_J, \mathcal{L}^{\underline{a}}) = H^0(G/B, \mathcal{L}^{\underline{a}})$ は $\lambda(\underline{a}) := \sum_{i \in I} a_i \varpi_i \in X(T)$ を最高ウェイトとする G の既約最高ウェイト加群 $L(\lambda(\underline{a}))$ の双対加群 $L(\lambda(\underline{a}))^*$ と同型であり, 従って $-w_0(\lambda(\underline{a})) \in X(T)$ を最高ウェイトとする G の既約最高ウェイト加群である (Borel–Weil–Bott の定理) ことに注意する.

まず, 上記 (1) における ‘canonical’ な基底について説明する. $G = SL_n(\mathbb{C})$ の場合には, 各 $i \in I$ に対して $H^0(G/P_i, \mathcal{L}_i) \cong L(\varpi_i)^* \cong (\bigwedge^i \mathbb{C}^n)^*$ であるから, $H^0(G/P_i, \mathcal{L}_i)$ の ‘canonical’ な基底として Plücker 埋め込み $G/P_i \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^i \mathbb{C}^n)$ に関する G/P_i の斉次座標である Plücker 座標 (を $(\bigwedge^i \mathbb{C}^n)^*$ の元とみなしたもの) が取れる. これらは $\binom{n}{i}$ 個の元から成る集合

$$I_{i,n} := \{ \underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^i \mid 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_i \leq n \}$$

により添字付けられているので, $\{p_{\underline{k}} \in H^0(G/P_i, \mathcal{L}_i) \mid \underline{k} \in I_{i,n}\}$ と書くことにする. ここで, 集合 $I_{i,n}$ は, 縦 1 列のみからなる Young 図形 (1^i) を台とし, 成分が $\{1, 2, \dots, n\}$ の元である (半) 標準盤の全体と同一視される. この集合 $I_{i,n}$ に

$$\underline{k} \geq \underline{l} \iff k_1 \geq l_1, k_2 \geq l_2, \dots, k_i \geq l_i \quad (\underline{k}, \underline{l} \in I_{i,n})$$

によって半順序を入れたものは, Weyl 群 W の部分群 W_{P_i} による剰余類の全体 W/W_{P_i} に Bruhat 順序を入れたものと標準的な方法で同一視できる. 但し, W/W_{P_i} 上の Bruhat 順序とは, 各 $w \in W/W_{P_i}$ に対応する G/P_i の中の Schubert 多様体 $X_{P_i}(w) := \overline{BwP_i/P_i} \subset G/P_i$ たちの包含関係により定まる半順序である:

$$w_1 \geq w_2 \iff X_{P_i}(w_1) \supset X_{P_i}(w_2) \quad (w_1, w_2 \in W/W_{P_i}).$$

従って, 上記の canonical な基底は $\{p_{\underline{k}} \in H^0(G/P_i, \mathcal{L}_i) \mid \underline{k} \in I_{i,n}\} = \{p_w \in H^0(G/P_i, \mathcal{L}_i) \mid w \in W/W_{P_i}\}$ と書ける.

次に, 上記の (2) における ‘standard monomial’ の意味を説明しよう. 今, $\underline{a} = (a_j, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-j}$ に対し, $\lambda(\underline{a}) = \sum_{i \in J} a_i \varpi_i \in X(T)$ とする. このとき, 型 $\lambda(\underline{a}) \in X(T)$ の standard chain (または, standard Young diagram と呼ばれる) とは, 直積集合

$$(W/W_{P_j})^{a_j} \times (W/W_{P_{j+1}})^{a_{j+1}} \times \dots \times (W/W_{P_{n-1}})^{a_{n-1}}$$

の元 $(w_1^{(j)}, \dots, w_{a_j}^{(j)}; \dots; w_1^{(n-1)}, \dots, w_{a_{n-1}}^{(n-1)})$ であって, Bruhat 順序に関する条件

$$w_1^{(j)} \geq \dots \geq w_{a_j}^{(j)} \geq w_1^{(j+1)} \geq \dots \geq w_{a_{n-2}}^{(n-2)} \geq w_1^{(n-1)} \geq \dots \geq w_{a_{n-1}}^{(n-1)} \quad (1.1)$$

を満たすもののことである. この条件 (1.1) においては, 各 i ($j \leq i \leq n-2$) に対して W/W_{P_i} の元と $W/W_{P_{i+1}}$ の元を比較しているので, 注意が必要である. まず, 各 i ($j \leq i \leq n-1$) に対して $\pi_i: W/W_{Q_J} \rightarrow W/W_{P_i}$ を自然な射影とする. このとき, 条件 (1.1) とは, 直積集合 $(W/W_{Q_J})^{a_j} \times (W/W_{Q_J})^{a_{j+1}} \times \dots \times (W/W_{Q_J})^{a_{n-1}}$ の元 $(u_1^{(j)}, \dots, u_{a_j}^{(j)}; \dots; u_1^{(n-1)}, \dots, u_{a_{n-1}}^{(n-1)})$ で,

(i) W/W_{Q_J} において,

$$u_1^{(j)} \geq \dots \geq u_{a_j}^{(j)} \geq u_1^{(j+1)} \geq \dots \geq u_{a_{n-2}}^{(n-2)} \geq u_1^{(n-1)} \geq \dots \geq u_{a_{n-1}}^{(n-1)},$$

(ii) $\pi_i(u_k^{(i)}) = w_k^{(i)}$ ($j \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq a_i$),

を満たすもの (defining chain) が存在することである.

注意 1.3. $G = SL_n(\mathbb{C})$ の場合には, 型 $\lambda(\underline{a}) \in X(T)$ の standard chain の全体と, Young 図形 $((n-1)^{a_{n-1}}, \dots, (j+1)^{a_{j+1}}, j^{a_j})$ と ‘共役 (conjugate)’ な Young 図形を台とし成分が $\{1, 2, \dots, n\}$ の元である半標準盤の全体との間には, 自然な全単射がある. この全単射は, standard chain $(w_1^{(j)}, \dots, w_{a_j}^{(j)}; \dots; w_1^{(n-1)}, \dots, w_{a_{n-1}}^{(n-1)})$ に, 各 $w_k^{(i)} \in W/W_{P_i}$ ($j \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq a_i$) と同一視される縦 1 列の半標準盤を (右から) 順番に並べた半標準盤を対応させることで, 得られる ([30, Chapter 7, §1 and §2] 参照).

この定義の下で, 型 $\lambda(\underline{a}) \in X(T)$ の standard chain

$$(w_1^{(j)}, \dots, w_{a_j}^{(j)}; \dots; w_1^{(n-1)}, \dots, w_{a_{n-1}}^{(n-1)})$$

に対応する standard monomial とは, 多重次数付き環

$$R(J) = \bigoplus_{\underline{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-j}} H^0(G/Q_J, \mathcal{L}^{\underline{a}})$$

における単項式

$$p_{w_1^{(j)}} \cdots p_{w_{a_j}^{(j)}} \cdots p_{w_1^{(n-1)}} \cdots p_{w_{a_{n-1}}^{(n-1)}} \in H^0(G/Q_J, \mathcal{L}^{\underline{a}})$$

のことである. 但し, ここで各 $i \in J$ に対して, $H^0(G/P_i, \mathcal{L}_i)$ と $H^0(G/Q_J, \mathcal{L}_i)$ を同一視していることに注意する.

1.2 Admissible weighted chains ([29], [30, Chapters 4 and 5], [34] 参照).

次に, standard monomial theory の目標の (1) における ‘canonical’ な基底の, (A 型とは限らない) 一般の場合の構成について考える. $G = SL_n(\mathbb{C})$ の場合にこの構成が容易であったのは, 全ての基本ウェイト $\varpi_i \in X(T)$ ($i \in I$) が ‘minuscule’ であったためである. つまり, 全ての正ルート $\beta \in \Delta_+$ に対して, 双対ルート $\beta^\vee$ と $\varpi_i \in X(T)$ のペアリングの値 $\langle \varpi_i, \beta^\vee \rangle$ が 0 または 1 であるという (特殊) 事情に依っていたのである. G が一般の古典型 (A, B, C, D 型) の場合には, 全ての基本ウェイト $\varpi_i \in X(T)$ ($i \in I$) と全ての正ルート $\beta \in \Delta_+$ に対して $\langle \varpi_i, \beta^\vee \rangle = 0, 1, 2$ であるという事実に基づいて, Seshadri, Lakshmibai 等は ‘admissible pair’ と呼ばれる W/W_{P_i} の元のある種の組たちを導入した. そして, この admissible pair の全体によってパラメトライズされた $H^0(G/P_i, \mathcal{L}_i)$ の基底を構成したのである. しかし, 例外型 (E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 型) の場合まで含めたより一般の場合には, 基本ウェイト $\varpi_i \in X(T)$ と正ルート $\beta \in \Delta_+$ に対するペアリングの値 $\langle \varpi_i, \beta^\vee \rangle$ はより大きな値を取り得る. この様な一般の場合においても上記の (1) の基底をパラメトライズさせるために, Seshadri と Lakshmibai は, admissible pair の拡張として admissible weighted chain (または, standard diagram と呼ばれる) の概念を次の様に導入した: $\lambda = \sum_{i \in I} a_i \varpi_i \in X(T)$ を支配的整ウェイト, $L(\lambda)$ を λ を最高ウェイトとする G の既約最高ウェイト加群とし, $Q := \bigcap_{i \in I, a_i \neq 0} P_i$ を G の放物型部分群, $W_Q := N_Q(T)/T \subset W$ をその Weyl 群, そして $\mathcal{L}_\lambda \in \text{Pic}(G/Q)$ を閉埋め込み $G/Q \hookrightarrow \mathbb{P}(L(\lambda))$ による $\mathbb{P}(L(\lambda))$ 上の直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(L(\lambda))}(1)$ の引き戻しとする. また, 各 $w \in W/W_Q$ に対して, $X_Q(w) := \overline{BwQ/Q} \subset G/Q$ を対応する Schubert 多様体とする.

定義 1.4. $\tau, \tau' \in W/W_Q$, $\sigma \in \mathbb{Q}$ ($0 < \sigma < 1$) とする. このとき, τ から τ' への σ -chain とは

$$\underline{\tau} = (\tau = \tau_0 > \tau_1 > \tau_2 > \cdots > \tau_r = \tau'), \quad \tau_k \in W/W_Q \quad (0 \leq k \leq r),$$

なる W/W_Q の元の Bruhat 順序に関する減少列で, 各 k ($1 \leq k \leq r$) に対して

- (1) $X_Q(\tau_k) \subset X_Q(\tau_{k-1})$ は余次元 1 であり,
- (2) $X_Q(\tau_k)$ の $X_Q(\tau_{k-1})$ における (Chevalley による) ‘ λ -重複度’ $m_\lambda(\tau_{k-1}, \tau_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $m_\lambda(\tau_{k-1}, \tau_k)\sigma \in \mathbb{Z}$ が成り立つ,

もののことである.

注意 1.5. $\tau_{k-1}, \tau_k \in W/W_Q$ に対して, $X_Q(\tau_k) \subset X_Q(\tau_{k-1})$ が余次元 1 なら, ある正ルート $\beta \in \Delta_+$ が存在して $\tau_k = s_\beta \tau_{k-1} \pmod{W_Q}$ であり (ここで $s_\beta \in W$ は β

に関する鏡映), このとき λ -重複度 $m_\lambda(\tau_{k-1}, \tau_k)$ は絶対値 $|\langle \tau_{k-1}\lambda, \beta^\vee \rangle|$ で与えられる. そこで, $\tau_{k-1}, \tau_k \in W/W_Q$ の W における minimal coset representative を同じ記号で書くことにすれば, 正ルート $\gamma = -\tau_{k-1}^{-1}\beta \in \Delta_+$ に対して $\tau_k = \tau_{k-1}s_\gamma$ であり, $m_\lambda(\tau_{k-1}, \tau_k) = |\langle \tau_{k-1}\lambda, \beta^\vee \rangle| = |\langle \lambda, \gamma^\vee \rangle|$ が成り立つ. また, この λ -重複度 $m_\lambda(\tau_{k-1}, \tau_k)$ は, $H^0(G/Q, \mathcal{L}_\lambda)$ におけるウェイト $-\tau_{k-1}(\lambda) \in X(T)$ のウェイト・ベクトルが定める射影空間 $\mathbb{P}(L(\lambda))$ 内の超平面を $H_{\tau_{k-1}}$ とすると, $X_Q(\tau_k)$ の $X_Q(\tau_{k-1}) \cap H_{\tau_{k-1}}$ における交叉重複度に等しいことが分かる. さらに, 各 $\tau_k \in W/W_Q$ ($0 \leq k \leq r$) の W における minimal coset representative の長さ (length) は, Schubert 多様体 $X_Q(\tau_k) \subset G/Q$ の次元に等しい.

定義 1.6. 型 $\lambda \in X(T)$ の admissible weighted chain とは, W/W_Q の元の Bruhat 順序に関する減少列 $\underline{\tau} = (\tau_0 > \tau_1 > \cdots > \tau_s)$, $\tau_k \in W/W_Q$ ($0 \leq k \leq s$), と閉区間 $[0, 1]$ 内の有理数の増加列 $\underline{\sigma} = (0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_s < \sigma_{s+1} = 1)$, $\sigma_k \in \mathbb{Q}$ ($0 \leq k \leq s+1$), の組 $(\underline{\tau}; \underline{\sigma})$ であって, 各 k ($1 \leq k \leq s$) に対して τ_{k-1} から τ_k への σ_k -chain が存在するもののことである.

これらの定義の下で Seshadri と Lakshmibai は, 支配的整ウェイト $\lambda \in X(T)$ に対して, 型 λ の admissible weighted chain の全体によってパラメトライズされた $H^0(G/Q, \mathcal{L}_\lambda)$ の (ウェイト・ベクトルから成る) 基底の存在を予想した. そして Littelmann は, 柏原の結晶基底の理論に触発されて, 次節で述べるパス模型の理論に到達し, それを用いて一般の対称化可能な Kac-Moody リー環に対してこの予想を解決した.

2 Cystals of Lakshmibai–Seshadri paths.

次に, Lakshmibai–Seshadri パス (LS パス) と, それらの成すクリスタルについて説明する. 詳細については, [36], [38], [40] 等を参照されたい. なお, [36] や [38] では $\mathfrak{g}$ が一般の対称化可能な Kac-Moody リー環の場合に LS パスの概念を導入しているが, ここでは簡単のため $\mathfrak{g}$ が有限次元複素 (半) 単純リー環の場合に説明する³.

2.1 Notation.

この節で使用する基本的な記号をまとめておく (詳細については標準的なテキスト, 例えば [61, 第 3 章及び第 5 章] 等を参照されたい). $\mathfrak{g}$ を有限次元複素 (半)

³一般の Kac-Moody リー環の場合でも, LS パスや root operator (§2.4 参照) の定義は, ここで述べるものと同様である. また, この節で述べる LS パスに関する事実・定理は, $\mathfrak{g}$ が一般の Kac-Moody リー環の場合でも成立する. (アファイン・リー環の場合については §3.2 参照.)

単純リー環とし, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環, $\Pi^\vee = \{h_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}$ を単純余ルート系, $\Pi = \{\alpha_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$ を単純ルート系とする. $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{g}$ のルート系とし, $\Delta_+ \subset \Delta$ を正ルート系とする. $\{\varpi_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{g}$ の基本ウェイト系とし, $P := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\varpi_i$ を整ウェイト格子, $P_+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i$ を支配的整ウェイト全体の集合とする. $s_j = s_{\alpha_j} \in GL(\mathfrak{h}^*)$ ($j \in I$) を α_j に関する単純鏡映とし, $W = \langle s_j \mid j \in I \rangle \subset GL(\mathfrak{h}^*)$ を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群とする. そして, $U_q(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に付随する (有理関数体 $\mathbb{C}(q)$ 上の) 量子普遍展開環とする.

2.2 Lakshmibai–Seshadri paths.

一般の整ウェイト $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P$ を固定する.

定義 2.1 (Littelmann [38, §4]). $\mu, \nu \in W\lambda$ に対して, 次の条件を満たす $W\lambda$ の元の列 $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r$ ($\mu_0 = \mu, \mu_r = \nu$) と正ルートの列 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \in \Delta_+$ が存在するとき, $\mu > \nu$ と定める: $r \geq 1$ であり, $k = 1, 2, \dots, r$ に対して $\mu_k = s_{\beta_k} \mu_{k-1}$ かつ $\mu_{k-1}(\beta_k^\vee) < 0$ が成立する. ここで, 正ルート $\beta \in \Delta_+$ に対して, $s_\beta \in W$ は β に関する鏡映を表し, $\beta^\vee \in \mathfrak{h}$ は β の双対ルートを表す. $\mu > \nu$ であるとき, 上の条件を満たす列のうち最長のものの長さ r を $\text{dist}(\mu, \nu)$ と書くことにする.

注意 2.2. λ は支配的整ウェイトであるとし, $W_\lambda := \{w \in W \mid w\lambda = \lambda\}$ とおく. このとき, $W_\lambda = \langle s_j \mid j \in I, m_j = 0 \rangle$ が成り立つ. そこで, 商集合 W/W_λ の各剰余類の代表元としてその剰余類に含まれる (唯一つの) 長さが最小の元を取り (minimal coset representative), 自然な全単射 $W\lambda \cong W/W_\lambda \cong \{\text{minimal coset representatives}\} \subset W$ を通して $W\lambda$ を W の部分集合とみなす. このとき, 定義 2.1 の半順序 $>$ は, W 上の ‘組合せ論的’ Bruhat 順序⁴ と一致することが確かめられる. そして容易に分かる様に, この組合せ論的 Bruhat 順序は, 対応する Schubert 多様体の包含関係により定義された ‘幾何学的’ Bruhat 順序と一致する (注意 1.5 参照).

注意 2.3. (後の §3.4 で扱う) $\mathfrak{g}$ がアファイン・リー環で λ がレベル・ゼロの整ウェイトの場合には, 定義 2.1 による $W\lambda$ 上の半順序 $>$ は, (アファイン) Weyl 群 W 上の組合せ論的 Bruhat 順序とはかなり異なったものとなる ([49] 参照).

例 2.4. $\mathfrak{g}$ を A_2 型 (すなわち, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$) とし, $\theta := \alpha_1 + \alpha_2 \in \Delta_+$ (θ は Δ_+ の最高ルート; $\theta^\vee = h_1 + h_2$ に注意) とおく. また, $w_0 = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2 \in W$ (最長元) とする.

⁴ $w, w' \in W$ に対して, 次の条件を満たす W の元の列 $w_0, w_1, \dots, w_r$ ($w_0 = w, w_r = w'$) と正ルートの列 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \in \Delta_+$ が存在するとき, $w > w'$ と定める: $r \geq 1$ であり, $k = 1, 2, \dots, r$ に対して, $w_k = s_{\beta_k} w_{k-1}$ かつ w_k の長さが w_{k-1} の長さより小である.

$\mathfrak{g}$ の Weyl 群 $W \cong S_3$ は, $\mathbb{R}^3$ の標準 (正規直交) 基底 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ (の添字集合 $\{1, 2, 3\}$) に次の様に置換として作用する (e は W の単位元である):

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad w_0 = s_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

このことをふまえて, $\lambda = 4\varpi_1 + 2\varpi_2 = 6\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$ のときに $W\lambda$ 上の順序 $>$ についての Hasse 図を描くと, 図 1 の様になる. 従って, 例えば $\text{dist}(s_1 s_2 s_1 \lambda, \lambda) = 3$ となる.

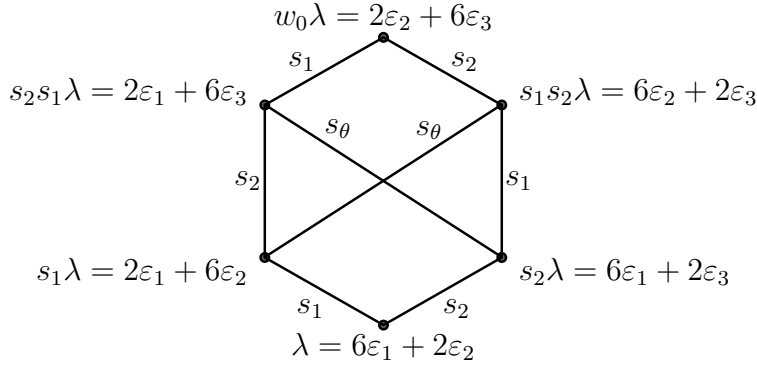


図 1: $W\lambda$ の Hasse 図

定義 2.5 (Littelmann [36, §2.2], [38, §4]). $0 < \sigma < 1$ を有理数とし, $\mu, \nu \in W\lambda$, $\mu > \nu$ とする. (μ, ν) に対する σ -chain とは, 次の条件を満たす $W\lambda$ の元の列 $\underline{\mu} = (\mu = \mu_0 > \mu_1 > \cdots > \mu_r = \nu)$ である: $r \geq 1$ であり, $k = 1, 2, \dots, r$ に対して $\text{dist}(\mu_{k-1}, \mu_k) = 1$ かつ $\sigma\mu_{k-1}(\beta_k^\vee) \in \mathbb{Z}_{<0}$ が成立する. ここで, $\beta_k \in \Delta_+$ は $\mu_k = s_{\beta_k}\mu_{k-1}$ を満たす唯一つの正ルートである ($\mu_{k-1} > \mu_k$, 及び, $\text{dist}(\mu_{k-1}, \mu_k) = 1$ に注意).

例 2.6. 例 2.4 の場合を考える.

(1) $(s_1\lambda)(h_1) = -4$ なので, $(s_1\lambda, \lambda)$ には $(1/4)$ -chain, $(1/2)$ -chain, $(3/4)$ -chain が存在する ($\mu_0 = s_1\lambda, \mu_1 = \lambda, \beta_1 = \alpha_1$).

(2) $(w_0\lambda)(h_2) = -4$, $(s_1 s_2 \lambda)(\theta^\vee) = -2$ なので, $(w_0\lambda, s_1\lambda)$ には $(1/2)$ -chain が存在する ($\mu_0 = w_0\lambda, \mu_1 = s_1 s_2 \lambda, \mu_2 = s_1\lambda, \beta_1 = \alpha_2, \beta_2 = \theta$).

定義 2.7 (Littelmann [36, §2.2], [38, §4]). $W\lambda$ の元の列 $\underline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s)$ と有理数の列 $\underline{\sigma} = (0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_s = 1)$ の組 $\pi = (\underline{\nu}; \underline{\sigma})$ が次の条件 (LS) を満たすとき, π を **型 λ の Lakshmibai–Seshadri パス** (略して LS パス) と呼ぶ.

(LS) $\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_s$ であり, 全ての $k = 1, 2, \dots, s-1$ について, (ν_k, ν_{k+1}) に対する σ_k -chain が存在する.

記号 $\mathbb{B}(\lambda)$ で, 型 λ の LS パス全体の集合を表す.

注意 1.5 と注意 2.2 により, λ が支配的整ウェイトのときには, 型 λ の admissible weighted chain と型 λ の LS パスとは同値な概念であることが分かる.

例 2.8. 例 2.4 の場合を考える. 例 2.6 における計算により, 以下は型 λ の LS パスである (ウェイト wt の定義は後の (2.1) と §2.4 参照):

$$\begin{aligned}\pi_1 &:= \left(w_0\lambda, s_1\lambda; 0, \frac{1}{2}, 1 \right), & \pi_2 &:= \left(s_1\lambda, \lambda; 0, \frac{1}{4}, 1 \right), \\ \pi_3 &:= \left(s_1\lambda, \lambda; 0, \frac{1}{2}, 1 \right), & \pi_4 &:= \left(s_1\lambda, \lambda; 0, \frac{3}{4}, 1 \right), \\ \pi_5 &:= \left(w_0\lambda, s_1\lambda, \lambda; 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right);\end{aligned}$$

$\text{wt}(\pi_1) = \varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3$, $\text{wt}(\pi_2) = 5\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$, $\text{wt}(\pi_3) = 4\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2$, $\text{wt}(\pi_4) = 3\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2$, $\text{wt}(\pi_5) = 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3$. この様にして型 λ の LS パスを全て求めると, その総数は 60 であることが分かる. これは, 例えば Weyl の次元公式から分かる様に, 最高ウェイト λ の有限次元既約最高ウェイト $\mathfrak{g}$ -加群の次元に等しい (後の定理 2.18 参照).

本講演においては, 閉区間 $[0, 1]$ から $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ への区分的に線形で連続な写像 $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ (要するに, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の中の折れ線図形) で, $\pi(0) = 0$ を満たすもののことを $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の中の) パス⁵と呼ぶ. LS パス $\pi = (\underline{\nu}; \underline{\sigma}) \in \mathbb{B}(\lambda)$ が与えられたとき, 以下の規則により, それをパス $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ とみなすことにする.

例 2.9 (図 2 参照). 最初に例 2.8 で与えた例 $\pi_5 = (w_0\lambda, s_1\lambda, \lambda; 0, 1/2, 3/4, 1) \in \mathbb{B}(\lambda)$ を使って説明する. まず, $t = 0$ から $t = 1/2$ までは $w_0\lambda$ を方向ベクトルとして進む: $\pi_5(t) = t(w_0\lambda)$, $0 \leq t \leq 1/2$. 次に, $t = 1/2$ の所で方向転換し, ($t = 1/2$ から) $t = 3/4$ までは $s_1\lambda$ を方向ベクトルとして進む: $\pi_5(t) = (1/2)w_0\lambda + (t - (1/2))s_1\lambda$, $1/2 \leq t \leq 3/4$. 最後に, $t = 3/4$ の所で方向転換し, ($t = 3/4$ から) $t = 1$ までは λ を方向ベクトルとして進む: $\pi_5(t) = (1/2)w_0\lambda + ((3/4) - (1/2))s_1\lambda + (t - (3/4))\lambda$, $3/4 \leq t \leq 1$.

⁵[36] や [38] では, 区分的に線形で連続な写像 $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ で $\pi(0) = 0$ を満たすものの全体に, 単調非減少な関数 $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を介した reparametrization を modulo とする同値関係を入れ, それによる同値類を ‘パス’ と呼んでいる. しかし, これらの論文の主要な結果はこの様な同値関係の下でパスを考えなくても成立することが分かる. そこで, 本講演でもこの同値関係は考えないことにする.

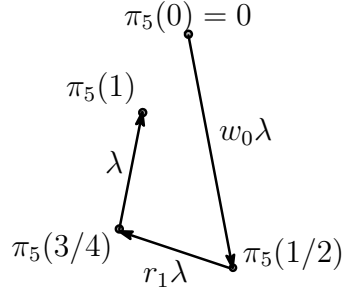


図 2: 例 2.8 の π_5 に対応するパス

一般の $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対応するパス $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ は, 次の (2.1) で与えられる:
 $\pi = (\underline{\nu}; \underline{\sigma}) \in \mathbb{B}(\lambda)$, $\underline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s)$, $\underline{\sigma} = (0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_s = 1)$, に対して,

$$\pi(t) = \sum_{l=1}^{k-1} (\sigma_l - \sigma_{l-1}) \nu_l + (t - \sigma_{k-1}) \nu_k \quad (\sigma_{k-1} \leq t \leq \sigma_k, 1 \leq k \leq s). \quad (2.1)$$

2.3 Brief review on crystals.

ここではクリスタルについて簡単に復習する. 詳細については, [13, §4.5], [21], [24], [27] 等を参照されたい.

定義 2.10. 集合 $\mathcal{B}$ が (P を整ウェイト格子とする) **クリスタル** であるとは, 以下の条件を満たす写像 $\text{wt} : \mathcal{B} \rightarrow P$, $e_j, f_j : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \cup \{\mathbf{0}\}$ ($j \in I$), $\varepsilon_j, \varphi_j : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ($j \in I$) が与えられていることである. ここで, $\mathbf{0}$ は $\mathcal{B}$ に含まれない形式的な元であり, $-\infty$ は $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ ($a \in \mathbb{Z}$) を満たす $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ の最小元である.

- (1) 全ての $b \in \mathcal{B}$ と $j \in I$ について, $\varphi_j(b) = \varepsilon_j(b) + (\text{wt}(b))(h_j)$ が成り立つ.
- (2) $b \in \mathcal{B}$, $j \in I$ とする. もし $e_j b \in \mathcal{B}$ であれば, $\text{wt}(e_j b) = \text{wt}(b) + \alpha_j$ が成り立つ. また, もし $f_j b \in \mathcal{B}$ であれば, $\text{wt}(f_j b) = \text{wt}(b) - \alpha_j$ が成り立つ.
- (3) $b \in \mathcal{B}$, $j \in I$ とする. もし $e_j b \in \mathcal{B}$ であれば, $\varepsilon_j(e_j b) = \varepsilon_j(b) - 1$, $\varphi_j(e_j b) = \varphi_j(b) + 1$ が成り立つ. また, もし $f_j b \in \mathcal{B}$ であれば, $\varepsilon_j(f_j b) = \varepsilon_j(b) + 1$, $\varphi_j(f_j b) = \varphi_j(b) - 1$ が成り立つ.
- (4) $b, b' \in \mathcal{B}$, $j \in I$ とする. このとき, $f_j b = b'$ であることと, $b = e_j b'$ であることは同値である.
- (5) $b \in \mathcal{B}$, $j \in I$ とする. もし $\varepsilon_j(b) = -\infty$ であれば, $e_j b = f_j b = \mathbf{0}$ である.

$\mathcal{B}$ がクリスタルであるとき, $b \in \mathcal{B}$ に対して $\text{wt}(b) \in P$ を b の **ウェイト** と呼ぶ. また, $e_j, f_j : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \cup \{\mathbf{0}\}$ ($j \in I$) を $\mathcal{B}$ 上の **柏原作用素** と呼ぶ.

定義 2.11. クリスタル $\mathcal{B}$ に対して次のルールで ‘ I -colored’ 有向グラフを対応させる: 頂点集合は $\mathcal{B}$ とする. そして, 矢印は $b \xrightarrow{j} b' \Leftrightarrow b' = f_j b$ ($b, b' \in \mathcal{B}, j \in I$) によって定める. この I -colored 有向グラフを $\mathcal{B}$ の **クリスタル・グラフ** と呼ぶ.

以下, ‘ $b \in \mathcal{B}$ を含む連結成分’ と言えば, $\mathcal{B}$ のクリスタル・グラフにおいて b と同じ連結成分に含まれる $\mathcal{B}$ の元全体の成す集合を意味する (これは $\mathcal{B}$ の ‘部分クリスタル’ になる).

定義 2.12. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ をクリスタルとする. $\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_2$ が (クリスタルとして) **同型** であるとは, 全単射 $\Phi: \mathcal{B}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_2$ で, wt, e_j, f_j ($j \in I$), ε_j, φ_j ($j \in I$) と可換なものが存在することである.

定義 2.13. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ をクリスタルとする. $\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_2$ の **テンソル積** $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ とは, 直積集合 $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ 上に次の様に写像を定義することにより定まるクリスタルである: $j \in I$, 及び $b_1 \in \mathcal{B}_1, b_2 \in \mathcal{B}_2$ に対して,

$$\begin{aligned} \text{wt}(b_1 \otimes b_2) &:= \text{wt}(b_1) + \text{wt}(b_2), \\ \varepsilon_j(b_1 \otimes b_2) &:= \max\{\varepsilon_j(b_1), \varepsilon_j(b_2) - (\text{wt}(b_1))(h_j)\}, \\ \varphi_j(b_1 \otimes b_2) &:= \max\{\varphi_j(b_2), \varphi_j(b_1) + (\text{wt}(b_2))(h_j)\}, \\ e_j(b_1 \otimes b_2) &:= \begin{cases} (e_j b_1) \otimes b_2 & (\varphi_j(b_1) \geq \varepsilon_j(b_2) \text{ のとき}), \\ b_1 \otimes (e_j b_2) & (\varphi_j(b_1) < \varepsilon_j(b_2) \text{ のとき}), \end{cases} \\ f_j(b_1 \otimes b_2) &:= \begin{cases} (f_j b_1) \otimes b_2 & (\varphi_j(b_1) > \varepsilon_j(b_2) \text{ のとき}), \\ b_1 \otimes (f_j b_2) & (\varphi_j(b_1) \leq \varepsilon_j(b_2) \text{ のとき}). \end{cases} \end{aligned}$$

ここで, 直積集合の元 $(b_1, b_2) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ を $b_1 \otimes b_2$ と表している. また, $0 \otimes b_2$ や $b_1 \otimes 0$ は 0 と定める.

注意 2.14 (柏原 [24, Lemma 7.1]). 3つのクリスタル $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ が与えられたとき, 自然な全単射 $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2) \otimes \mathcal{B}_3 \rightarrow \mathcal{B}_1 \otimes (\mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3)$, $(b_1 \otimes b_2) \otimes b_3 \mapsto b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3)$ ($b_k \in \mathcal{B}_k, k = 1, 2, 3$) は, クリスタルとしての同型でもある.

2.4 Crystal structure on $\mathbb{B}(\lambda)$ ([36], [38]).

型 $\lambda \in P$ の LS パス全体の集合 $\mathbb{B}(\lambda)$ には, 次の様にしてクリスタルの構造が入る.

ウェイト. $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ ならば $\pi(1) \in P$ であることが容易に分かる. そこで, $\text{wt}: \mathbb{B}(\lambda) \rightarrow P$ を, $\text{wt}(\pi) := \pi(1)$ ($\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$) により定める.

柏原作用素. Littelmann によって導入された **ルート作用素** e_j, f_j ($j \in I$) が, クリスタルの公理における柏原作用素の役割を果たす: $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ と $j \in I$ を固定し,

$H(t) := (\pi(t))(h_j)$ ($t \in [0, 1]$) とおく. このとき, 関数 $H(t)$ の極小値は全て整数であることが知られている ([38, Lemma 4.5 d]). そこで, $m := \min\{H(t) \mid t \in [0, 1]\}$ とおけば, m は 0 以下の整数であり, $H(1) - m$ は 0 以上の整数である.

まず, ('raising') ルート作用素 e_j ($j \in I$) の定義を述べる. $m = 0$ の場合は, $e_j\pi := \mathbf{0}$ と定める. そして $m \leq -1$ の場合は,

$$(e_j\pi)(t) := \begin{cases} \pi(t) & (0 \leq t \leq t_0 \text{ のとき}), \\ r_{j,m+1}(\pi(t)) & (t_0 \leq t \leq t_1 \text{ のとき}), \\ \pi(t) + \alpha_j & (t_1 \leq t \leq 1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

と定める (図 3 の左の絵参照). 但し, $t_1 := \min\{t \in [0, 1] \mid H(t) = m\}$, $t_0 := \max\{t \in [0, t_1] \mid H(t) = m + 1\}$ であり, 各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $r_{j,k}$ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 内の超平面 $H_{j,k} := \{\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \mu(h_j) = k\}$ に関する鏡映 (アファイン変換) である:

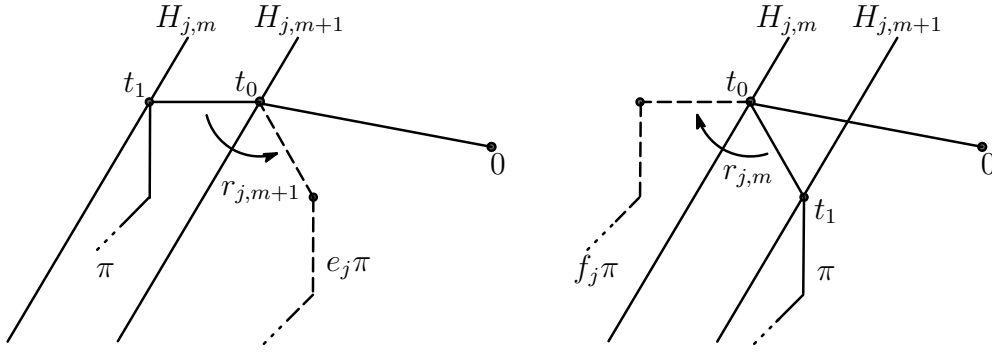


図 3: ルート作用素 e_j (左) と f_j (右)

例 2.15. 例 2.4 の場合を考える. $\pi_5 = (w_0\lambda, s_1\lambda, \lambda; 0, 1/2, 3/4, 1) \in \mathbb{B}(\lambda)$ に e_2 を作用させる (例 2.8, 例 2.9 参照). 例 2.9 より

$$H(t) = (\pi_5(t))(h_2) = \begin{cases} -4t & (0 \leq t \leq 1/2 \text{ のとき}), \\ -2 + 6t & (1/2 \leq t \leq 3/4 \text{ のとき}), \\ -\frac{1}{2} + 2t & (3/4 \leq t \leq 1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

である. よって, $m = \min\{H(t) \mid t \in [0, 1]\} = -2$ であり, $t_1 = \min\{t \in [0, 1] \mid H(t) = m\} = 1/2$, $t_0 = \max\{t \in [0, t_1] \mid H(t) = m + 1\} = 1/4$ となる. 従って,

$$e_2\pi_5 = \left(w_0\lambda, s_2s_1\lambda, s_1\lambda, \lambda; 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right)$$

となる. さらに, $e_2\pi_5 \in \mathbb{B}(\lambda)$ であることも分かる.

次に, ('lowering') ルート作用素 f_j ($j \in I$) であるが, $H(1) - m = 0$ の場合は, $f_j\pi := \mathbf{0}$ と定め, $H(1) - m \geq 1$ の場合は,

$$(f_j\pi)(t) := \begin{cases} \pi(t) & (0 \leq t \leq t'_0 \text{ のとき}), \\ r_{j,m}(\pi(t)) & (t'_0 \leq t \leq t'_1 \text{ のとき}), \\ \pi(t) - \alpha_j & (t'_1 \leq t \leq 1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

と定める (図 3). 但し, $t'_0 := \max\{t \in [0, 1] \mid H(t) = m\}$, $t'_1 := \min\{t \in [t'_0, 1] \mid H(t) = m + 1\}$ である.

定理 2.16 (Littelmann [36, §1 and §4], [38, §2 and §4]). 任意の $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ と $j \in I$ に対して, $e_j\pi, f_j\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \cup \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ. さらに, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ と $j \in I$ に対して $\varepsilon_j(\pi) := \max\{n \geq 0 \mid e_j^n\pi \neq \mathbf{0}\}$, $\varphi_j(\pi) := \max\{n \geq 0 \mid f_j^n\pi \neq \mathbf{0}\}$ と定めると, $(\mathbb{B}(\lambda), e_j, f_j (j \in I), \varepsilon_j, \varphi_j (j \in I), \text{wt})$ は, P を整ウェイト格子とするクリスタルとなる.

2.5 Littelmann's path model.

まず, 次のことに注意する.

注意 2.17. LS パスの定義から, 集合として $\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{B}(w\lambda)$ ($\lambda \in P$, $w \in W$) が成り立つことが容易に分かる. $\mathfrak{g}$ が有限次元複素 (半) 単純リー環の場合には任意の整ウェイト $\lambda \in P$ は支配的整ウェイトと W -共役であるから, この等式によって, 型 λ の LS パス全体の成すクリスタル $\mathbb{B}(\lambda)$ の研究は λ が支配的整ウェイトの場合に帰着される.

定理 2.18 (Littelmann [36, Introduction], [38, Theorem 9.1]). $\lambda \in P_+$ とする. このとき, $\sum_{\pi \in \mathbb{B}(\lambda)} e(\text{wt}(\pi)) = \text{ch } L(\lambda)$ が成立する. ここで, $L(\lambda)$ は最高ウェイト λ の有限次元既約最高ウェイト $\mathfrak{g}$ -加群であり, $\text{ch } L(\lambda)$ は $L(\lambda)$ の (形式的) 指標を表す. また, $e(\cdot)$ は formal exponential である.

次の定理は, 定理 2.16 と定理 2.18 を根拠として Littelmann [37] によって予想され, 柏原 [25, Theorem 4.1] と Joseph [15, Corollary 6.4.27] により独立に証明された (結晶基底に関しては, [21], [24], [27], [13], [14], [15] 等を参照されたい).

定理 2.19. $\lambda \in P_+$ とする. このとき, $\mathbb{B}(\lambda)$ は有限次元既約最高ウェイト $U_q(\mathfrak{g})$ -加群 $V(\lambda)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ と, クリスタルとして同型である.

注意 2.20. $\lambda \in P_+$ とする. LS パスの定義から, 各 $\mu \in W\lambda$ に対して, $\pi_\mu := (\mu; 0, 1)$ が型 λ の LS パスになることが分かる (π_μ は, 式 (2.1) によって, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の原点と μ を結ぶ直線に対応する). 特に, 定理 2.19 の同型によって結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ の最高ウェイト元に対応するのは, 直線 $\pi_\lambda \in \mathbb{B}(\lambda)$ である.

2.6 Standard paths.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in P_+$ に対して, $\underline{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ とおく. そして, $\mathbb{B}(\underline{\lambda}) := \{\pi_1 * \pi_2 * \dots * \pi_n \mid \pi_k \in \mathbb{B}(\lambda_k), 1 \leq k \leq n\}$ と定める. ここで, $\pi := \pi_1 * \pi_2 * \dots * \pi_n : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ は, $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ の ‘concatenation’ である. すなわち,

$$\pi(t) := \sum_{l=1}^{k-1} \pi_l(1) + \pi_k(nt - k + 1), \quad \frac{k-1}{n} \leq t \leq \frac{k}{n} \quad (1 \leq k \leq n),$$

である.

さて, $\pi \in \mathbb{B}(\underline{\lambda})$ に対して $\text{wt}(\pi)$ や $e_j\pi, f_j\pi$ ($j \in I$) を §2.4 と同様の方法で定める. すると, 定理 2.16 と同様にして, $\mathbb{B}(\underline{\lambda})$ には P を整ウェイト格子とするクリスタルの構造が入る. さらに, LS パスの concatenation へのルート作用素の作用を調べることにより ([38, §2.6 and Lemma 2.7] 参照), $\mathbb{B}(\underline{\lambda})$ はクリスタルとして $\mathbb{B}(\lambda_1) \otimes \mathbb{B}(\lambda_2) \otimes \dots \otimes \mathbb{B}(\lambda_n)$ と同型であることが分かる ([36, §1.5]). よって, 定理 2.19 より, クリスタルとしての同型 $\mathbb{B}(\underline{\lambda}) \cong \mathcal{B}(\lambda_1) \otimes \mathcal{B}(\lambda_2) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\lambda_n)$ が成り立つ.

定義 2.21. $\mathbb{B}(\underline{\lambda})$ における $\pi_{\underline{\lambda}} := \pi_{\lambda_1} * \pi_{\lambda_2} * \dots * \pi_{\lambda_n}$ を含む連結成分を $\mathbb{S}(\underline{\lambda})$ と書く. $\mathbb{S}(\underline{\lambda})$ に含まれるパスを **standard パス** と呼ぶ.

注意 2.22. $\mathbb{S}(\underline{\lambda})$ は $\mathbb{B}(\underline{\lambda})$ の部分クリスタルである. また, $\pi_{\underline{\lambda}}(t) \in P_+$ ($t \in [0, 1]$) であるから, [38, Theorem 7.1] によりクリスタルとしての同型 $\mathbb{S}(\underline{\lambda}) \cong \mathcal{B}(\lambda)$ が成り立つ.

$\mathbb{B}(\underline{\lambda})$ の元が standard パスになるための組合せ論的な必要十分条件として次が知られている.

命題 2.23 (Littelmann [39, Theorem 10.1 and Lemma 10.2]). $k = 1, 2, \dots, n$ に対して, $\pi_k = (\nu_1^{(k)}, \dots, \nu_{a_k}^{(k)}; \underline{\sigma}^{(k)}) \in \mathbb{B}(\lambda_k)$ とする. このとき, $\pi_1 * \pi_2 * \dots * \pi_n \in \mathbb{B}(\underline{\lambda})$ が standard パスであるための必要十分条件は, $W\lambda$ の元の列 $\{\xi_l^{(k)}\}_{k=1,2,\dots,n, l=1,2,\dots,a_k}$ (π に対する **defining chain**) で

- (i) $\xi_1^{(1)} \geq \dots \geq \xi_{a_1}^{(1)} \geq \xi_1^{(2)} \geq \dots \geq \xi_{a_{n-1}}^{(n-1)} \geq \xi_1^{(n)} \geq \dots \geq \xi_{a_n}^{(n)}$,
- (ii) $p_k(\xi_l^{(k)}) = \nu_l^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, a_k$),

を満たすものが存在することである. ここで, $p_k : W\lambda \rightarrow W\lambda_k$, $w\lambda \mapsto w\lambda_k$ ($w \in W$), は自然な射影である.

注意 2.24. 命題 2.23 により, §1.1 における standard chain とは, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in P_+$ を $\mathfrak{g}$ の基本ウェイト系 $\{\varpi_i\}_{i \in I}$ から取ったときの standard パスに他ならないことが分かる.

[41] において Littelmann は, 量子 Frobenius 写像を用いて⁶, standard monomial ベクトルと呼ばれる $\pi \in \mathbb{S}(\lambda)$ に付随したウェイト・ベクトル $p_\pi \in L(\lambda)^*$ を定義し, それらの全体 $\{p_\pi \mid \pi \in \mathbb{S}(\lambda)\}$ が $L(\lambda)^*$ の基底を成すことを示している (ここで, p_π のウェイトは $-\pi(1)$ である).

3 Path model for extremal weight modules over quantum affine algebras.

ここでは, 我々が論文 [45], [47] において得た結果を紹介する. 以下では, 簡単のため $\mathfrak{g}$ を nontwisted アファイン・リー環とする.

3.1 Notation.

この節で使用する基本的な記号をまとめておく. 詳細については標準的なテキスト, 例えば [61, 第 4 章及び第 5 章], [16, §6 and §7], [13, §10.1] 等を参照されたい. なお, ここでの単純ルートの番号付けは [61, 第 4 章及び第 5 章] に従っている. また, 整ウェイト格子の取り方は [13, §10.1] に従っている.

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の nontwisted アファイン・リー環とし, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環, $\Pi^\vee = \{h_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}$ を単純余ルート系, $\Pi = \{\alpha_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$ を単純ルート系とする. $c = \sum_{j \in I} a_j^\vee h_j \in \mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の (標準的) 中心元, $\delta \in \mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{g}$ の null root とする. $\{\Lambda_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{g}$ の基本ウェイト系とし, $P = \bigoplus_{j \in I} \mathbb{Z}\Lambda_j \oplus \mathbb{Z}\delta$ を整ウェイト格子, $P^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z}) \subset \mathfrak{h}$ をその双対格子とする. $P_+ = \sum_{j \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\Lambda_j + \mathbb{Z}\delta$ を (P に含まれる) 支配的整ウェイト全体の集合とし, $P_- := -P_+$ を (P に含まれる) 反支配的整ウェイト全体の集合とする. $s_j = s_{\alpha_j} \in GL(\mathfrak{h}^*)$ ($j \in I$) を α_j に関する単純鏡映とし, $W = \langle s_j \mid j \in I \rangle \subset GL(\mathfrak{h}^*)$ を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群とする. $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{g}$ のルート系とし, $\Delta_+ \subset \Delta$ を正ルート系, $\Delta^{\text{re}} := W\Pi \subset \Delta$ を実ルート系, $\Delta_+^{\text{re}} := \Delta^{\text{re}} \cap \Delta_+$ を正実ルート系とする.

さて, $(\cdot, \cdot)$ を $\mathfrak{h}^*$ 上の W -不変な標準内積で $\lambda(c) = (\lambda, \delta)$ ($\lambda \in \mathfrak{h}^*$) を満たすものとし ([16, §6.2] のものと同じ), $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を $(\alpha_j, \alpha_j)d/2 \in \mathbb{Z}$ ($j \in I$) となる最小の正の整数とする. そして, $U_q(\mathfrak{g}) = \langle x_j, y_j, q^h \mid j \in I, h \in d^{-1}P^\vee \rangle$ を $\mathfrak{g}$ に付随する (有理関数体 $\mathbb{C}(q^{1/d})$ 上の) 量子普遍展開環とし, これを量子アファイン展開環と呼ぶ. ここで, x_j, y_j ($j \in I$) はそれぞれ $\alpha_j, -\alpha_j$ に対応する Chevalley 生成元である. さらに, $U'_q(\mathfrak{g})$ を x_j, y_j ($j \in I$) および q^h ($h \in d^{-1} \bigoplus_{j \in I} \mathbb{Z}h_j$) で生成され

⁶standard monomial theory に対する, より幾何学的なアプローチに関しては, [29] 及びその文献表を参照されたい.

る $U_q(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}(q^{1/d})$ -部分代数とする. これは $\mathfrak{g}$ の導来部分代数 $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ に付随する量子普遍展開環で, 量子アファイン環 (quantum affine algebra) と呼ばれる.

3.2 Lakshmibai–Seshadri paths — case of affine Lie algebras.

アファイン・リー環の場合の (型 $\lambda \in P$ の) LS パスの定義は, 有限次元 (半) 単純リー環の場合の LS パスの定義 (§2.2 参照) において, ‘正ルート’ とある所を ‘正実ルート’ に変更したものである (定義 2.1, 定義 2.5, 定義 2.7 のそれぞれで, Δ_+ を Δ_+^{re} に置き換える). $\lambda \in P$ に対して, 型 λ の LS パス全体の集合を $\mathbb{B}(\lambda)$ で表す. §2 で述べた有限次元 (半) 単純リー環の場合と同様に, アファイン・リー環の場合にも次の (1), (2) が成り立つ:

(1) $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ を, (§2.2 の最後の) 式 (2.1) により, 区分的に線形で連続な写像 (パス) $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ と同一視する. このとき, $\pi(1) \in P$ が成立する (§2.4 のウェイトの項参照).

(2) 各 $\lambda \in P$ に対して, $\mathbb{B}(\lambda)$ には §2.4 と同様の方法でクリスタルの構造が入る (ルート作用素 e_j, f_j ($j \in I$) の定義は §2.4 と同様であり, $\text{wt}, \varepsilon_j, \varphi_j$ ($j \in I$) も §2.4 と同様に定める).

ところで, アファイン・リー環の整ウェイトは中心元 $c \in \mathfrak{h}$ における値によって, 正レベルのもの, 負レベルのもの, そして, レベル・ゼロのものの 3 種類に分類される:

$$P = \underbrace{\{\lambda \in P \mid \lambda(c) > 0\}}_{\text{正レベル}} \sqcup \underbrace{\{\lambda \in P \mid \lambda(c) = 0\}}_{\text{レベル・ゼロ}} \sqcup \underbrace{\{\lambda \in P \mid \lambda(c) < 0\}}_{\text{負レベル}}.$$

事実 3.1. $\lambda \in P$ が正レベル (またはレベル・ゼロ, 負レベル) なら, $W\lambda$ の元は全て正レベル (またはレベル・ゼロ, 負レベル) である. さらに, $W\lambda$ は支配的整ウェイト (またはレベル・ゼロ支配的整ウェイト, 反支配的整ウェイト) を唯 1 つ含む. ここで, $\lambda \in P$ が **レベル・ゼロ支配的整ウェイト** であるとは, $\lambda(c) = 0$ かつ $\lambda(h_j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($j \in I_0 := I \setminus \{0\}$) が成り立つことである.

アファイン・リー環の場合にも, 任意の $\lambda \in P$ と $w \in W$ に対して集合としての等式 $\mathbb{B}(w\lambda) = \mathbb{B}(\lambda)$ が成り立つことが容易に分かるので, 事実 3.1 により, 型 $\lambda \in P$ の LS パス全体の成すクリスタル $\mathbb{B}(\lambda)$ の研究は, λ が支配的整ウェイトの場合, λ がレベル・ゼロ支配的整ウェイトの場合, λ が反支配的整ウェイトの場合, の 3 つの場合に帰着される (注意 2.17 で述べた有限次元 (半) 単純リー環の場合と比較されたい). このうち, λ が支配的整ウェイト (または反支配的整ウェイト) の場合については, LS パスの成すクリスタル $\mathbb{B}(\lambda)$ は, 最高ウェイト (または最低ウェイト)

λ の可積分な既約最高ウェイト (または最低ウェイト) $U_q(\mathfrak{g})$ -加群 $V(\lambda)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ とクリスタルとして同型になることが知られている (定理 2.19 参照). そこで, $\lambda \in P$ がレベル・ゼロ支配的整ウェイトの場合が問題になる.

各 $i \in I_0 = I \setminus \{0\}$ に対して, $\varpi_i := \Lambda_i - a_i^\vee \Lambda_0 \in P$ とおく. このとき, 明らかに ϖ_i はレベル・ゼロであり, 任意の $i, j \in I_0$ に対して $\varpi_i(h_j) = \delta_{ij}$ が成立する. また, 勝手なレベル・ゼロ支配的整ウェイトは次の形をしていることが分かる:

$$\sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i + k\delta \quad (m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i \in I_0; k \in \mathbb{Z}). \quad (3.1)$$

ところで, 勝手な整ウェイト $\lambda \in P$ と $k \in \mathbb{Z}$ に対して, 集合としての等式 $\mathbb{B}(\lambda + k\delta) = \{\pi + \pi_{k\delta} \mid \pi \in \mathbb{B}(\lambda)\}$ が成り立つ ([49, §2.7] 参照). ここで $\pi + \pi_{k\delta} : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ は, $(\pi + \pi_{k\delta})(t) := \pi(t) + t(k\delta)$ ($t \in [0, 1]$) で定義されるパスである. このことから, 式 (3.1) の形のレベル・ゼロ支配的整ウェイトについては, 常に $k = 0$ と仮定しても良いことが分かる.

我々は論文 [45], [47] において, $\lambda = m\varpi_i$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, i \in I_0$) である場合には, $\mathbb{B}(\lambda)$ は extremal ウェイト加群の結晶基底とクリスタルとして同型であることを示した (後の定理 3.10 参照). 一方, λ が式 (3.1) の形をした一般のレベル・ゼロ支配的整ウェイトの場合には, $\mathbb{B}(\lambda)$ のクリスタルとしての構造は完全に分かっている ([49]) のだが, $\mathbb{B}(\lambda)$ に同型な結晶基底を持つ (可積分な) $U_q(\mathfrak{g})$ -加群が存在するかどうかは今のところ分かっていない⁷.

3.3 Extremal weight modules.

論文 [45], [47] で得られた結果を述べるために, (量子アファイン展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ 上の) extremal ウェイト加群について復習する. 詳細については, [23, §8], [26, §3 and §5], [59] 等を参照されたい.

定義 3.2 (柏原 [23, §8.1], [26, §3.1]). M を可積分な $U_q(\mathfrak{g})$ -加群, $v \in M$ をウェイト $\lambda \in P$ のウェイト・ベクトルとする. v がウェイト λ の **extremal ウェイト・ベクトル** であるとは, Weyl 群 W でパラメトライズされた (M のウェイト・ベクトルからなる) 族 $\{v_w\}_{w \in W}$ で, 次の (1)–(3) の条件を満たすものが存在することである:

- (1) $w = 1$ であれば, $v_w = v_1 = v$;
- (2) $n := (w\lambda)(h_j) \geq 0$ ならば, $x_j v_w = 0$, かつ $y_j^{(n)} v_w = v_{s_j w}$;
- (3) $n := (w\lambda)(h_j) \leq 0$ ならば, $y_j v_w = 0$, かつ $x_j^{(-n)} v_w = v_{s_j w}$.

⁷ $m_i \neq 0$ となる $i \in I_0$ が 2 個以上ある場合は, $\mathbb{B}(\lambda)$ は extremal ウェイト加群の結晶基底とは決して同型にはならないことが証明できる. 詳細は [49, Appendix] を参照されたい.

ここで, $j \in I$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $x_j^{(n)} := x_j^n / [n]_j!$, $y_j^{(n)} := y_j^n / [n]_j!$ と定める (いわゆる, q -divided power). 但し, $[n]_j! := \prod_{k=1}^n [k]_j$ であり, $[k]_j := (q_j^k - q_j^{-k}) / (q_j - q_j^{-1})$ ($k \in \mathbb{Z}$), $q_j := q^{(\alpha_j, \alpha_j)/2}$ である.

注意 3.3. 定義 3.2 の記号の下で, $v_w \in M$ はウェイト $w\lambda$ のウェイト・ベクトルであることが分かる.

定理 3.4 (柏原 [23, §8]). $\lambda \in P$ とする.

(1) ウェイト λ の extremal ウェイト・ベクトル v_λ で生成される可積分な $U_q(\mathfrak{g})$ -加群 $V(\lambda)$ で次の普遍性を持つものが存在する: M を可積分な $U_q(\mathfrak{g})$ -加群, $v \in M$ をウェイト λ の extremal ウェイト・ベクトルとする. このとき, $V(\lambda)$ から M への $U_q(\mathfrak{g})$ -加群としての準同型で $v_\lambda \in V(\lambda)$ を $v \in M$ に写すものが存在する. この $V(\lambda)$ を, extremal ウェイト λ の **extremal ウェイト加群** と呼ぶ. (λ がレベル・ゼロのときは, 下の事実 3.6 の様な特徴付けもある.)

(2) $V(\lambda)$ は結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ を持つ.

$V(\lambda)$ の生成元 v_λ に対応する $\mathcal{B}(\lambda)$ の元を u_λ で表す.

事実 3.5 (柏原 [23, §8]). (1) $\lambda \in P$, $w \in W$ とする. このとき, $V(\lambda)$ と $V(w\lambda)$ の間には $U_q(\mathfrak{g})$ -加群としての自然な同型が存在する. また, 結晶基底についても, $\mathcal{B}(\lambda)$ と $\mathcal{B}(w\lambda)$ の間にはクリスタルとしての自然な同型が存在する.

(2) λ が支配的整ウェイト (または反支配的整ウェイト) なら, extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ は, 最高ウェイト (または最低ウェイト) λ の可積分な既約最高ウェイト (または最低ウェイト) $U_q(\mathfrak{g})$ -加群と同型である. また, このとき $V(\lambda)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ は, 最高ウェイト (または最低ウェイト) λ の可積分な既約最高ウェイト (または最低ウェイト) $U_q(\mathfrak{g})$ -加群の結晶基底とクリスタルとして同型である.

この事実により, LS パスのとき (§3.2) と同様に, レベル・ゼロ支配的整ウェイトを extremal ウェイトとする extremal ウェイト加群, 及びその結晶基底の構造を調べれば良いことになる. さらに, 式 (3.1) の形をしたレベル・ゼロ支配的整ウェイト $\lambda \in P$ に対する結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ の (クリスタルとしての) 構造を調べるには, $k = 0$ と仮定して良いことも容易に分かる.

$\lambda \in P$ がレベル・ゼロ支配的整ウェイト $\sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I_0$) である場合には, extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ は次の様にも特徴付けられる.

事実 3.6 (柏原 [26, Theorem 5.3 及びそれに続くコメント]). $\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I_0$) をレベル・ゼロ支配的整ウェイトとする. このとき, extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ は, ウェイト λ のウェイト・ベクトル v_λ で生成され, 次の関係式で

定義される $U_q(\mathfrak{g})$ -加群と同型である:

$$\begin{cases} \lambda(\beta^\vee) \geq 0 \text{ を満たす } \beta \in \Delta^{\text{re}} \text{ に対して, } U_q(\mathfrak{g})_\beta v_\lambda = \{0\}, \\ \lambda(h_j) \geq 0 \text{ である } j \in I \text{ に対して, } y_j^{1+\lambda(h_j)} v_\lambda = 0, \\ \lambda(h_j) \leq 0 \text{ である } j \in I \text{ に対して, } x_j^{1-\lambda(h_j)} v_\lambda = 0. \end{cases}$$

ここで, $U_q(\mathfrak{g})_\beta := \{x \in U_q(\mathfrak{g}) \mid q^h x q^{-h} = q^{\beta(h)} x \ (h \in d^{-1}P^\vee)\}$ である.

注意 3.7. $\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I_0$) がレベル・ゼロ支配的整ウェイトのときには, 可積分 $U_q(\mathfrak{g})$ -加群 M のウェイト λ のウェイト・ベクトル v に対して, v が extremal ウェイト・ベクトルであることと, $x_{i,r}^+ v = 0$ ($i \in I_0$, $r \in \mathbb{Z}$) であることは同値である ([57, Lemma 2.14]). ここで, $x_{i,r}^+$ ($i \in I_0$, $r \in \mathbb{Z}$) は, $U'_q(\mathfrak{g}) \subset U_q(\mathfrak{g})$ の Drinfeld new realization ([1], [6], [4, Chapter 12, §2]; [52] も参照) による三角分解を考えたときの, 正部分の生成元である.

さて, $\text{Par}^{<m}$ を長さ m 未満の分割 (すなわち, 深さが m 未満の Young 図形) 全体の集合とする. $\text{Par}^{<m}$ に次の様にクリスタルの構造を入れる:

$$\begin{cases} e_j \rho = f_j \rho := \mathbf{0} & (\rho \in \text{Par}^{<m}, j \in I), \\ \varepsilon_j(\rho) = \varphi_j(\rho) := 0 & (\rho \in \text{Par}^{<m}, j \in I), \\ \text{wt}(\rho) := -|\rho|\delta & (\rho \in \text{Par}^{<m}). \end{cases}$$

ここで, $\rho = (k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_{m-1}) \in \text{Par}^{<m}$ に対して, $|\rho| := k_1 + k_2 + \cdots + k_{m-1}$ である.

次の定理は, 柏原 [26, §13] によって予想され, J. Beck と中島 [3, Theorem 4.16(i) and Remark 4.17] により証明された ($\mathfrak{g}$ が simply-laced の場合には, [2] と [57] で独立に証明された).

定理 3.8. (1) $\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I_0$) のとき, クリスタルとしての同型

$$\mathcal{B}(\lambda) \cong \bigotimes_{i \in I_0} \mathcal{B}(m_i \varpi_i)$$

が成り立つ (右辺はテンソル積を取る順番に依らない).

(2) 各 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $i \in I_0$ に対して, クリスタルとしての同型 $\Phi : \mathcal{B}(m \varpi_i) \xrightarrow{\sim} \text{Par}^{<m} \otimes \mathcal{B}_0(m \varpi_i)$ が存在する. ここで, $\mathcal{B}_0(m \varpi_i)$ は $u_{m \varpi_i}$ を含む $\mathcal{B}(m \varpi_i)$ の連結成分である. 従って, 各 $\rho \in \text{Par}^{<m}$ に対して $\mathcal{B}_\rho(m \varpi_i) := \Phi^{-1}(\{\rho\} \otimes \mathcal{B}_0(m \varpi_i))$ とおくと, $\mathcal{B}_\rho(m \varpi_i)$ は $\mathcal{B}(m \varpi_i)$ の 1 つの連結成分になり, $\rho_1 \neq \rho_2$ ならば $\mathcal{B}_{\rho_1}(m \varpi_i) \neq \mathcal{B}_{\rho_2}(m \varpi_i)$ である. つまり, $\mathcal{B}(m \varpi_i)$ の連結成分全体は $\text{Par}^{<m}$ によってパラメトライズされる. さらに, $\mathcal{B}_0(m \varpi_i)$ のクリスタル・グラフと $\mathcal{B}_\rho(m \varpi_i)$ ($\rho \in \text{Par}^{<m}$) のクリスタル・グラフは, I -colored 有向グラフとしては同型である ($\mathcal{B}_0(m \varpi_i)$ と $\mathcal{B}_\rho(m \varpi_i)$ のクリスタルとしての違いは, 各元のウェイトに共通に $-|\rho|\delta$ のズレがあるだけである).

注意 3.9. 定理 3.8 (2) より, $m \geq 2$ であれば, $\mathcal{B}(m\varpi_i)$ のクリスタル・グラフは無限個の連結成分を持つことが分かる (従って, 特に連結ではない).

3.4 Path model for extremal weight modules.

以上の準備の下で, 我々の論文 [45], [47] において得られた結果を述べる. 次の定理 (及びその系) が, 我々の主結果 (の一つ) である.

定理 3.10 ([47, Corollary 3.8.1]). $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $i \in I_0 = I \setminus \{0\}$ とする. このとき, 型 $m\varpi_i$ の LS パス全体の成すクリスタル $\mathbb{B}(m\varpi_i)$ は, extremal ウェイト加群 $V(m\varpi_i)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(m\varpi_i)$ とクリスタルとして同型である.

この結果と定理 3.8 (1) を合わせれば, 次の系が得られる.

系 3.11. $\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I_0$) とする. このとき, クリスタルとしての同型 $\mathcal{B}(\lambda) \cong \bigotimes_{i \in I_0} \mathbb{B}(m_i \varpi_i)$ が成り立つ.

以下で, 定理 3.10 の証明の概略を述べる. まず, $m = 1$ のとき, すなわち $\lambda = \varpi_i$ のときを考える. その証明においては, 次の (それ自身も重要な) 事実が key となる.

命題 3.12 ([47, Theorem 2.1.1]). $\mathbb{B}(\varpi_i)$ のクリスタル・グラフは連結である.

ところで, [26, Proposition 5.4 (ii)] において, $\mathcal{B}(\varpi_i)$ のクリスタル・グラフが連結であることが証明されている. 従って, λ が支配的整ウェイトの場合の $\mathbb{B}(\lambda)$ を扱った [25, Theorem 4.1] の証明に倣って, 次のことを示せば良い.

- (i) $X_1 u_{\varpi_i} = X_2 u_{\varpi_i} \iff X_1 \pi_{\varpi_i} = X_2 \pi_{\varpi_i},$
- (ii) $X u_{\varpi_i} \neq \mathbf{0} \iff X \pi_{\varpi_i} \neq \mathbf{0}.$

ここで, X_1, X_2, X は柏原作用素の幾つかの積である. また, π_{ϖ_i} は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の原点 0 と ϖ_i を結ぶ直線である (注意 2.20 参照). この (i), (ii) は, [25, Theorem 4.1] と同様に, ‘ N -multiple map’ ($N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) と呼ばれる写像 $\mathcal{B}(\varpi_i) \hookrightarrow \mathcal{B}_0(N\varpi_i)$, $\mathbb{B}(\varpi_i) \hookrightarrow \mathbb{B}_0(N\varpi_i)$, そして, クリスタルとしての埋め込み $\mathcal{B}_0(N\varpi_i) \hookrightarrow \mathcal{B}(\varpi_i)^{\otimes N}$, $\mathbb{B}_0(N\varpi_i) \hookrightarrow \mathbb{B}(\varpi_i)^{\otimes N}$ を用いて示される. ここで, $\mathcal{B}_0(N\varpi_i)$ は $u_{N\varpi_i}$ を含む $\mathcal{B}(N\varpi_i)$ の連結成分であり, $\mathbb{B}_0(N\varpi_i)$ は直線 $\pi_{N\varpi_i}$ を含む $\mathbb{B}(N\varpi_i)$ の連結成分である. これらの埋め込みは, $\mathcal{B}_0(N\varpi_i) \hookrightarrow \mathcal{B}(\varpi_i)^{\otimes N}$ については [3, Theorem 4.16 (i)] (定理 3.8 参照) から得られ, $\mathbb{B}_0(N\varpi_i) \hookrightarrow \mathbb{B}(\varpi_i)^{\otimes N}$ については (§2.6 で述べた) LS パスの concatenation を考えることで得られる.

上で証明されたクリスタルとしての同型 $\mathbb{B}(\varpi_i) \cong \mathcal{B}(\varpi_i)$ とクリスタルとしての埋め込み $\mathcal{B}_0(m\varpi_i) \hookrightarrow \mathcal{B}(\varpi_i)^{\otimes m}$, $\mathbb{B}_0(m\varpi_i) \hookrightarrow \mathbb{B}(\varpi_i)^{\otimes m}$ を用いると, 次の系が得られる ([45, Corollary 5.3]).

系 3.13. $m \geq 1$ に対して, クリスタルとしての同型 $\mathbb{B}_0(m\varpi_i) \cong \mathcal{B}_0(m\varpi_i)$ が成り立つ. ここで, $\mathbb{B}_0(m\varpi_i)$ は直線 $\pi_{m\varpi_i}$ を含む $\mathbb{B}(m\varpi_i)$ の連結成分である.

注意 3.14. $\mathfrak{g}$ が $A_\ell^{(1)}$ 型で $m = 1, i = 1$ の場合には, J. Greenstein [9] が独立に同様の結果を得ている.

これらの結果を用いて, 一般の $m \geq 2$ の場合を示す. 次の命題の (1) は LS パスの定義から直ちに従う. そして (2) は, LS パス $\pi \in \mathbb{B}(m\varpi_i)$ を ‘mod $\mathbb{R}\delta$ ’ で考えることによって得られるクリスタル $\mathbb{B}(m\varpi_i)_{\text{cl}}$ のクリスタル・グラフが連結であることから従う.

命題 3.15 ([47, §3.2–§3.6]). (1) $\rho = (k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_{m-1}) \in \text{Par}^{<m}$ に対して,

$$\left(m(\varpi_i - k_1\delta), \dots, m(\varpi_i - k_{m-1}\delta), m\varpi_i; 0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, 1 \right)$$

を (§2.2 の最後の) 式 (2.1) により $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の中のパスとみなしたものを, π_ρ とおく. このとき, $\pi_\rho \in \mathbb{B}(m\varpi_i)$ ($\rho \in \text{Par}^{<m}$) が成り立つ.

(2) $\mathbb{B}(m\varpi_i)$ の各連結成分に対して, π_ρ がその連結成分に含まれる様な $\rho \in \text{Par}^{<m}$ が唯 1 つ存在する.

さて, 各 $\rho \in \text{Par}^{<m}$ に対して, $\mathbb{B}_\rho(m\varpi_i)$ で π_ρ を含む $\mathbb{B}(m\varpi_i)$ の連結成分を表すことにする. 各点 $t \in [0, 1]$ において $\pi_\rho(t) \equiv \pi_{m\varpi_i}(t) \pmod{\mathbb{R}\delta}$ であることに注意すれば, ルート作用素の定義 (§2.4) と $\delta(h_j) = 0$ であることから, クリスタルとしての同型

$$\Psi_\rho : \mathbb{B}_\rho(m\varpi_i) \xrightarrow{\sim} \{\rho\} \otimes \mathbb{B}_0(m\varpi_i) \quad (\subset \text{Par}^{<m} \otimes \mathbb{B}_0(m\varpi_i))$$

が存在することが分かる ($\pi_\rho \mapsto \rho \otimes \pi_{m\varpi_i}$ が同型を定める). この Ψ_ρ ($\rho \in \text{Par}^{<m}$) を用いて, $\Psi : \mathbb{B}(m\varpi_i) \rightarrow \text{Par}^{<m} \otimes \mathbb{B}_0(m\varpi_i)$ を次で定義する: $\pi \in \mathbb{B}(m\varpi_i)$ とすると, 命題 3.15 (2) より $\pi \in \mathbb{B}_\rho(m\varpi_i)$ となる $\rho \in \text{Par}^{<m}$ が唯 1 つ存在する. このとき,

$$\Psi(\pi) := \Psi_\rho(\pi) \in \{\rho\} \otimes \mathbb{B}_0(m\varpi_i) \subset \text{Par}^{<m} \otimes \mathbb{B}_0(m\varpi_i)$$

と定める. Ψ が全射であることは命題 3.15 (1) より分かる (単射であることは明らか). 従って, 次の命題が得られる.

命題 3.16. 上で定めた写像 $\Psi : \mathbb{B}(m\varpi_i) \rightarrow \text{Par}^{<m} \otimes \mathbb{B}_0(m\varpi_i)$ は, クリスタルとしての同型である.

最後に, 定理 3.8 (2), 系 3.13, 命題 3.16 を合わせると, クリスタルとしての同型 $\mathbb{B}(m\varpi_i) \cong \mathcal{B}(m\varpi_i)$ が得られ, 定理 3.10 の証明が終わる.

References

- [1] J. Beck, Braid group action and quantum affine algebras, *Comm. Math. Phys.* **165** (1994), 555–568.
- [2] J. Beck, Crystal structure of level zero extremal weight modules, *Lett. Math. Phys.* **61** (2002), 221–229.
- [3] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* **123** (2004), 335–402.
- [4] V. Chari and A. Pressley, “A Guide to Quantum Groups”, Corrected reprint of the 1994 original, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [5] V. Chari and A. Pressley, Weyl modules for classical and quantum affine algebras, *Represent. Theory* **5** (2001), 191–223.
- [6] V.G. Drinfeld, A new realization of Yangians and the quantum affine algebras, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **296** (1987), 13–17; translation in *Soviet Math. Dokl.* **36** (1988), 212–216.
- [7] G. Fourier and P. Littelmann, Tensor product structure of affine Demazure modules and limit constructions, *Nagoya Math. J.* **182** (2006), 171–198.
- [8] G. Fourier and P. Littelmann, Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions, *Adv. Math.* **211** (2007), 566–593.
- [9] J. Greenstein, Littelmann’s path crystal and combinatorics of certain integrable $\widehat{\mathfrak{sl}}_{\ell+1}$ modules of level zero, *J. Algebra* **269** (2003), 347–372.
- [10] J. Greenstein and P. Lamprou, Path model for quantum loop modules of fundamental type, *Int. Math. Res. Not.* **2004** (2004), no. 14, 675–711.
- [11] D. Hernandez and H. Nakajima, Level 0 monomial crystals, *Nagoya Math. J.* **184** (2006), 85–153.
- [12] W.V.D. Hodge, Some enumerative results in the theory of forms, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **39** (1943), 22–30.
- [13] J. Hong and S.-J. Kang, “Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases”, Graduate Studies in Mathematics Vol. 42, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [14] J. C. Jantzen, “Lectures on Quantum Groups”, Graduate Studies in Mathematics Vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [15] A. Joseph, “Quantum Groups and Their Primitive Ideals”, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* Vol. 29, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [16] V. G. Kac, “Infinite Dimensional Lie Algebras”, 3rd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
- [17] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima, and A. Nakayashiki, Affine crystals and vertex models, in “Infinite Analysis, Part A” (A. Tsuchiya et al., Eds.), *Adv. Ser. Math. Phys.* Vol. 16, pp. 449–484, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992.

- [18] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K.C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima, and A. Nakayashiki, Perfect crystals of quantum affine Lie algebras, *Duke Math. J.* **68** (1992), 499–607.
- [19] M. Kashiwara, Crystalizing the q -analogue of universal enveloping algebras, *Comm. Math. Phys.* **133** (1990), 249–260.
- [20] M. Kashiwara, On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.* **63** (1991), 465–516.
- [21] 柏原 正樹, 量子群の結晶化, 「数学」第 44 卷, 第 4 号 (1992 年 10 月 秋季号), pp. 330–342.
- [22] M. Kashiwara, Global crystal bases of quantum groups, *Duke Math. J.* **69** (1993), 455–485.
- [23] M. Kashiwara, Crystal bases of modified quantized enveloping algebra, *Duke Math. J.* **73** (1994), 383–413.
- [24] M. Kashiwara, On crystal bases, in “Representations of Groups” (B.N. Allison and G.H. Cliff, Eds.), CMS Conf. Proc. Vol. 16, pp. 155–197, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [25] M. Kashiwara, Similarity of crystal bases, in “Lie Algebras and Their Representations” (S.-J. Kang et al., Eds.), Contemp. Math. Vol. 194, pp. 177–186, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [26] M. Kashiwara, On level-zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), 117–175.
- [27] M. Kashiwara, Bases cristallines des groupes quantiques (French), Edited by Charles Cochet, Cours Spécialisés (Specialized Courses) Vol. 9, Société Mathématique de France, Paris, 2002.
- [28] M. Kashiwara, Level zero fundamental representations over quantized affine algebras and Demazure modules, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 223–250.
- [29] V. Lakshmibai, The development of standard monomial theory – II, in “A tribute to C. S. Seshadri” (V. Lakshmibai et al., Eds.), Trends Math., pp. 283–209, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [30] V. Lakshmibai and N. Gonciulea, Flag Varieties, Collection Travaux en cours Vol. 63, Hermann, Paris, 2001.
- [31] V. Lakshmibai, C. Musili, and C.S. Seshadri, Geometry of G/P . IV. Standard monomial theory for classical types, *Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A Math. Sci.* **88** (1979), 279–362.
- [32] V. Lakshmibai and K.N. Raghavan, “Standard Monomial Theory: Invariant Theoretical Approach”, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 137, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [33] V. Lakshmibai and C.S. Seshadri, Geometry of G/P – V, *J. Algebra* **100** (1986), 462–557.

- [34] V. Lakshmibai and C.S. Seshadri, Standard monomial theory, in “Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups” (S. Ramanan et al., Eds), pp. 279–322, Manoj Prakashan, Madras, 1991.
- [35] P. Littelmann, A generalization of the Littlewood–Richardson rule, *J. Algebra* **130** (1990), 328–368.
- [36] P. Littelmann, A Littlewood–Richardson rule for symmetrizable Kac–Moody algebras, *Invent. Math.* **116** (1994), 329–346.
- [37] P. Littelmann, Crystal graphs and Young tableaux, *J. Algebra* **175** (1995), 65–87.
- [38] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math.* (2) **142** (1995), 499–525.
- [39] P. Littelmann, A plactic algebra for semisimple Lie algebras, *Adv. Math.* **124** (1996), 312–331.
- [40] P. Littelmann, Characters of representations and paths in $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, in “Representation Theory and Automorphic Forms” (T.N. Bailey and A.W. Knap, Eds.), pp. 29–49, Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 61, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [41] P. Littelmann, Contracting modules and standard monomial theory for symmetrizable Kac–Moody algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **11** (1998), 551–567.
- [42] G. Lusztig, Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 447–498.
- [43] G. Lusztig, “Introduction to Quantum Groups”, Progr. Math. Vol. 110, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [44] C. Musili, The development of standard monomial theory – I, in “A tribute to C.S. Seshadri” (V. Lakshmibai et al., Eds.), Trends Math., pp. 385–420, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [45] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra, *Int. Math. Res. Not.* **2003** (2003), no. 32, 1731–1754.
- [46] S. Naito and D. Sagaki, Crystal of Lakshmibai–Seshadri paths associated to an integral weight of level zero for an affine Lie algebra, *Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005), no. 14, 815–840.
- [47] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra. II, *Adv. Math.* **200** (2006), 102–124.
- [48] S. Naito and D. Sagaki, Construction of perfect crystals conjecturally corresponding to Kirillov–Reshetikhin modules over twisted quantum affine algebras, *Comm. Math. Phys.* **263** (2006), 749–787.
- [49] S. Naito and D. Sagaki, Crystal structure on the set of Lakshmibai–Seshadri paths of an arbitrary level-zero shape, *Proc. London Math. Soc.* (3) **96** (2008), 582–622.
- [50] S. Naito and D. Sagaki, Lakshmibai–Seshadri paths of level-zero weight shape and one-dimensional sums associated to level-zero fundamental representations, to appear in *Compositio Math.*, published online 26 September 2008.

- [51] H. Nakajima, Quiver varieties and Kac–Moody algebras, *Duke Math. J.* **91** (1998), 515–560.
- [52] 中島 啓, 簾多様体と量子アファイン環, 「数学」第 52 巻, 第 4 号 (2000 年 10 月 秋季号), pp. 337–359.
- [53] H. Nakajima, Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), 145–238.
- [54] H. Nakajima, Quiver varieties and tensor products, *Invent. Math.* **146** (2001), 399–449.
- [55] H. Nakajima, t -analogs of q -characters of Kirillov–Reshetikhin modules of quantum affine algebras, *Represent. Theory* **7** (2003), 259–274.
- [56] H. Nakajima, t -analogs of q -characters of quantum affine algebras of type A_n , D_n , in “Combinatorial and Geometric Representation Theory” (S.-J. Kang and K.-H. Lee, Eds), Contemp. Math. Vol. 325, pp. 141–160, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [57] H. Nakajima, Extremal weight modules of quantum affine algebras, in “Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups” (T. Shoji et al., Eds.), Adv. Stud. Pure Math. Vol. 40, pp. 343–369, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.
- [58] H. Nakajima, Quiver varieties and t -analogs of q -characters of quantum affine algebras, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), 1057–1097.
- [59] 中島 啓, 量子アファイン展開環の結晶基底, 上智大学における集中講義 (2006 年度) の講義ノート, 中島 啓氏のホームページよりダウンロード可能 (<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Talks/200601Jochi.html>).
- [60] M. Okado, $X = M$ conjecture, in “Combinatorial Aspect of Integrable Systems” (A. Kuniba and M. Okado, Eds), MSJ Mem. Vol. 17, pp. 43–73, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007.
- [61] 谷崎 俊之, リー代数と量子群, 現代数学の潮流, 共立出版, 2002.
- [62] A. Schilling, $X = M$ theorem: fermionic formulas and rigged configurations under review, in “Combinatorial Aspect of Integrable Systems” (A. Kuniba and M. Okado, Eds), MSJ Mem. Vol. 17, pp. 75–104, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007.
- [63] C. S. Seshadri, “Introduction to the Theory of Standard Monomials”, Texts and Readings in Mathematics Vol. 46, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2007.
- [64] M. Varagnolo and E. Vasserot, Standard modules of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* **111** (2002), 509–533.