

Invariant differential operators on Schrödinger model for $O(2n, 2)$

広島大学大学院理学研究科 木幡 篤孝

1 Schrödinger model

$(\pi, \mathcal{H})$: Schrödinger model for the minimal representation of $O(2n, 2)$ とする。

(Kobayashi-Ørsted-Mano によって構成、研究された表現 [1][2][3][4])

$G := SO_0(2n, 2), \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{2n-1}, |x|^{-1}dx)$ とし、

$\mathfrak{g} := Lie(G), U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$:universal enveloping algebra とする。

このとき、この表現の微分を考えると

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n-1} - \{0\}) \cap End(\mathcal{H}^\infty) \supset d\pi(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ である。

(ただし、 $\mathcal{D}(M)$:differential operators on manifold M ,

$\mathcal{H}^\infty$: C^∞ vectors of $(\pi, \mathcal{H})$ とする。)

$M = \mathbb{R}^{2n-1} - \{0\}$ と定め H を G の subgroup とする。

M 上の H - 不変微分作用素環を次の式で定める。

$\mathcal{D}(M)^H := \{D \in \mathcal{D}(M) \mid D \circ \pi(h) = \pi(h) \circ D \quad \forall h \in H\}$

Remark 1. $H = G$ のとき、 $\mathcal{D}(M)^H = \mathbb{C}$ である。

Remark 2. 表現 π を H に制限して得られる表現が multiplicity free のとき、

$\mathcal{D}(M)^H$ は commutative である。

Question. If $\mathcal{D}(M)^H$ is commutative, find generators.

この講演では、 H として次の場合を考察する。

$K_1 := I_1 \times SO(2n-1) \times SO(2)$

$$K_2 := SO(2) \times SO(2n-2) \times SO(2)$$

$$K := \langle K_1, K_2 \rangle = SO(2n) \times SO(2)$$

$$K_3 := K_1 \cap K_2 = I_2 \times SO(2n-2) \times SO(2)$$

Remark. $H = K, K_1, K_2$ のとき、multiplicity free である。

2 Differential operators on $M = \mathbb{R}^{2n-1} - \{0\}$

Schrödinger model に関連する次の微分作用素を考える。

$$D_0 := |x| \left(\frac{\Delta}{4} - 1 \right)$$

$$D_1 := x_1 + \frac{x_1}{4} \Delta - \frac{1}{2} E \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{n-1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$D_2 := \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2n-1} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2$$

$$D_3 := \sum_{2 \leq i \leq j \leq 2n-1} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2$$

ただし、 $\Delta = \sum_{1 \leq i \leq 2n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2$, $E = \sum_{1 \leq i \leq 2n-1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ とする。

前節の部分群に対して、次の包含関係が成り立つことがわかる。

$$\mathcal{D}(M)^{K_3} \supset \mathcal{D}(M)^{K_1} \supset \mathcal{D}(M)^K, \mathcal{D}(M)^{K_3} \supset \mathcal{D}(M)^{K_2} \supset \mathcal{D}(M)^K.$$

この講演では、微分作用素 D_i がこれらの不変微分作用素環の生成元であることを示したい。

3 K_1 and K -invariant differential operators on M

$M = \mathbb{R}^{2n-1} - \{0\}$ の局所座標系として次の極座標を用いる。

$$\mathbb{R}^+ \times S^{2n-2} \ni (r, \omega) \mapsto r\omega \in \mathbb{R}^{2n-1} - \{0\}$$

$R := I_1 \times SO(2n-1) \times I_2$ と定めると、部分群 R は表現 π を通して M 上 natural action となっていることから次が分かる。

Lemma. $\mathcal{D}(M)^R \simeq \mathcal{D}(R)^+ \otimes \mathbb{C}[\Delta_S]$

(ただし、 Δ_S は球面 S^{2n-2} の Laplace 作用素)

更に、 $K_1 = R(I_{2n} \times SO(2))$ であり、 D_0 の定義により、

$$\mathcal{D}(M)^{K_1} = \{P \in \mathcal{D}(M)^R \mid [P, D_0] = 0\}$$

が成り立つ。 D_0 の極座標系による表示は次の様になる。

$$\begin{aligned} 4D_0 &= |x|(\Delta - 4) = r^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + (2n-2) \frac{\partial}{\partial r} - 4r + r^{-1} \Delta_S \\ &= r^{-1} \partial^2 + ar^{-1} \partial + br + r^{-1} \Delta_S \end{aligned}$$

ただし、 $\partial = r \frac{\partial}{\partial r}, a = 2n-3, b = -4$ とする。

次の定理が成り立つ。

Theorem. $\mathcal{D}(M)^{K_1} = \mathbb{C}[D_0, D_2]$

定理の証明の方針：

(1) 任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して、 $A = r^{-1} \partial^2 + ar^{-1} \partial + br \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ と定め、線形写像 $adA : \mathcal{D}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ を $(adA)(P) = [A, P] = AP - PA$ とするとき、次の命題が成り立つ。

Proposition. If $b \neq 0$, $KeradA = \mathbb{C}[A]$

Remark. $b = 0, a = \pm \frac{1}{2}$ のときは、 $KeradA = \mathbb{C}[B_{\pm}] \supsetneq \mathbb{C}[A]$ となる。

ただし、 $B_+ = r^{-\frac{1}{2}} \partial + \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} (a = \frac{1}{2}), B_- = r^{-\frac{1}{2}} \partial (a = -\frac{1}{2})$ とする。

(2) $\mathcal{D}(M)^R$ の元 P を $P = \sum_{0 \leq j \leq m} P_j \Delta_S^j, (P_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+))$ と表示する。

$$[D_0, P] = 0 \Leftrightarrow [A, P_0] = 0, [A, P_j] = [P_{j-1}, r^{-1}], [P_m, r^{-1}] = 0$$

が成り立つ事と、(1) の Proposition を用いると定理が導かれる。

Corollary. $\mathcal{D}(M)^K = \mathbb{C}[D_0]$

Corollary の証明はこの定理と次の Schrödinger model の K -finite vectors の R 既約分解を用いる。

$$L^2(\mathbb{R}^{2n-1}, |x|^{-1} dx)_K = \bigoplus_{a, l \in \mathbb{N}, l \leq a} W_{a, l}$$

ただし、 $a, l \in \mathbb{N}, l \leq a$ に対して $W_{a, l} := f_{a, l} \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^{2n-1})$ と定める。ここで、 $f_{a, l}(r) = L_{a-l}^{2n-3+2l}(r) r^l e^{-2r}$, $\mathcal{H}^l(\mathbb{R}^{2n-1})$ は l 次の spherical harmonics、 L_n^α は Laguerre polynomial である。

4 K_2 -invariant differential operators on M

$W = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{2n-2} - \{0\}), V = (\mathbb{R} - \{0\}) \times \{0\}$ とすると、

$M = W \sqcup V$ が成り立ち、 W は M の open dense subset である。

従って、制限写像 $\mathcal{D}(M)^{R \cap K_2} \ni D \longrightarrow D^\sim \in \mathcal{D}(W)^{R \cap K_2}$ は algebraic injection となる。

次に W の座標を次の様に定める。

$$\mathbb{R}^+ \times (0, \pi) \times S^{2n-3} \ni (r, \theta, \omega) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta \omega) \in W$$

このとき、この座標による表示を計算すると次を得る。

$$D_0^\sim = A_0 + \frac{1}{r \sin^2 \theta} \Delta_{S^{2n-3}}, D_1^\sim = A_1 + \frac{\cos \theta}{r \sin^2 \theta} \Delta_{S^{2n-3}}$$

$$\text{ただし、} A_0 = r \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + r^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + (2n-2) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) + (2n-3) r^{-1} c(\theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) - 4r,$$

$$A_1 = -r \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + 2 \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) + r^{-1} \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \\ + r^{-1} [(2n-3)(\sin \theta)^{-1} - \sin \theta] \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) + 4r \cos \theta,$$

$$c(\theta) = \cos \theta / \sin \theta \text{ とする。}$$

$$\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^+ \times (0, \pi)) := \{Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times (0, \pi)) \mid [A_0, Q] = 0, [A_1, Q] = 0\}$$

と定めると次の命題が成り立つ。

Proposition. If $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^+ \times (0, \pi)) = \mathbb{C}[A_0, A_1]$, then $\mathcal{D}(M)^{K_2} = \mathbb{C}[D_0, D_1, D_3]$

参考文献

- [1] T. Kobayashi and G. Mano, *Integral formulas for the minimal representation of $O(p, 2)$* , Acta Appl. Math., **86** (2005), 103–113.
- [2] T. Kobayashi and G. Mano, *Integral formula of the unitary inversion operator for the minimal representation of $O(p, q)$* , Proc. Japan Acad. Ser. A, **83-3** (2007), 27–31.
- [3] T. Kobayashi and G. Mano, *The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p, q)$* , preprint, 2007, 169pp, arXiv:0712.1769[math.RT]
- [4] T. Kobayashi and Ørsted, *Analysis on the minimal representation of $O(p, q)$ I. Realization via conformal geometry, II. Branching laws, III. Ultrahyperbolic equations on $\mathbb{R}^{p-1, q-1}$* , Adv. Math., **180** (2003), 486–512, 513–550, 551–595.