

Affine Hecke 代数の既約表現の分類 (主に A 型の場合)

Irreducible representations of affine Hecke algebras

(survey talk with emphasis on type A)

加藤周 (Syu KATO)*

平成 20 年 10 月 29 日

概要

Recently, there are several successful attempts on the classification of irreducible modules of affine Hecke algebras, without A -group data. In particular, one of the resulting description resembles the Deligne-Langlands classification for type A . In this survey talk, we explain the type A -case and mention how the things are going on for other classical groups.

Introduction

1 変数の affine Hecke 代数は岩堀-松本 [IM65] によって導入された。それは岩堀球型表現と呼ばれる p 進代数群の特別なクラスの表現論と等価な表現論を持つ代数である事が知られている ([Bo76, Ma77])。さらにその自然な拡張である多変数の affine Hecke 代数は p 進代数群の表現論と supercuspidal 表現の分類を法として等価な代数系ではないかと期待されている。また、実簡約群の表現論の構造 (Kazhdan-Lusztig-Vogan 多項式等) もある程度 affine Hecke 代数の表現論によって記述できると考えられている¹。

このような背景から affine Hecke 代数の表現論の研究は代数群の表現論の研究という観点から大切な代数である。そして実際に p 進代数群の (既約) 岩堀球型表現は分類予想 (Deligne-Langlands 予想と呼ばれる) を 1 変数の affine Hecke 代数の既約表現の分類問題へと移植、修正した Deligne-Langlands-Lusztig 予想の解決として Kazhdan-Lusztig [KL87] により分類された。(一般の型で変数の値が 1 の小さな位数の冪根でない場合。A 型の場合は Zelevinsky [Ze80], Bernstein-Zelevinsky [BZ77] によって分類された。参考書としては Chriss-Ginzburg [CG97] が挙げられる。) その後上の枠組みの拡張として多変数の affine Hecke 代数の既約表現の分類が多くの場合に Lusztig [Lu88, Lu89, Lu95a, Lu95b] によって行われた。

しかしながら A 型以外の場合には Kazhdan-Lusztig, Lusztig いずれの結果においても彼らの記述の理解には A -群と呼ばれる有限群の表現論を調べる必要がある²。この事は実質的に一般 Springer 対

*Research Institute for Mathematical Sciences, Oiwake Kita-Shirakawa, Sakyo, Kyoto 606-8502 JAPAN

¹[Ze80, Lu95c, AS98, EFM, CT0x] 等を参照。[Ze80, AS98] は A 型に限った研究だが [Lu95c, EFM, CT0x] は C 型を含むより広いクラスの affine Hecke 環が出現する。筆者は affine Hecke 環の表現論と実簡約群の表現論や幾何学の比較は今後ポピュラーになってもおかしくないと思う。

²実 Lie 群の場合にも A -群は出現する。そして A -群の表現の同値類の違いは Harish-Chandra 加群の表現の圏を対応するブロックへと分解する。しかし、実 Lie 群の場合には一般 Springer 対応の観点からは分けて考えるべき表現達も同じ無限小指標を持つというだけで一括りにされがちな為に分類の見かけ上 A -群はそんなに活躍しない。もちろん Vogan 双対性のように A -群の微妙な性質が本質的にさけられない設定の話もある。

応 [Lu85] の知識なしでは³彼らの記述を実用的なレベルまで深く理解する事が不可能である事を意味する。特に、専門家以外には (与えられた中心指標を持つ) affine Hecke 代数の既約表現の同型類の数を読み取る事さえ困難であった。

2006 年以降我々 (古典型の既約表現 [Ka06]) や Opdam-Solleveld (一般の型の離散系列表現 [OS08]) により複数の変数を持つ affine Hecke 代数の表現論の理解が急速に深まった⁴。これらのアプローチの共通の特徴としては A -群が出現しないことが挙げられる。例えば我々の結果を仮定すれば (与えられた中心指標を持つ) affine Hecke 代数の既約表現の数が適当なベクトル空間の群作用による軌道の数として捕えられるために難しい知識なしで把握できるようになった。

この事は affine Hecke 代数の表現論はもはや A -群や一般 Springer 対応に関する知識なしで理解できるようになった事を意味する。従って affine Hecke 代数の表現論は A 型以外の場合においても A 型の場合とそう変わらない計算で理解する事が可能になったと言える。

この論説では上記の状況を踏まえて最も基本的でよく分かっている A 型 affine Hecke 代数の既約表現の分類について代数的構成、幾何学的構成の両面から述べる。[Ka06] ではこの論説に書かれている事の幾何学部分が多変数の古典型 affine Hecke 代数の記述にほぼそのまま拡張された⁵。

具体的にはまず一般の (既約ルート系に付随する) affine Hecke 環の定義と基礎的な表現の構成方法 (主系列表現) を述べる (§1,2)。その後話を A 型に制限して基本表現を導入した後に対称群 S_n の表現の Macdonald 表現 (Specht 構成) をのべ、それを A 型有限 Hecke 環の表現にアップグレードする (§3)。また、 A 型 affine Hecke 環の表現論の Zelevinsky 多重セグメントを用いた既約表現や標準表現の分類、構成法について述べる (§4)。そして Zelevinsky 多重セグメントを A 型 quiver を用いて幾何学的に解釈した後に §3 の Macdonald 表現との整合性を見るという観点から (A 型の場合の) Kazhdan-Lusztig 型の分類⁶を述べる (§5,6)。そして、Macdonald 表現を幾何学的に実現するものとして Springer fiber を導入する。さらに多重セグメント構成と Macdonald 表現は A 型の場合は”ほとんど等価”であり、Springer fiber (の全コホモロジー群が) 標準表現の幾何学化であるという事を述べる (§7)。また、§8 ではそういった幾何学化は A 型 affine Hecke 環の表現論という枠内でも単なる焼き直し以上の事を述べているという事の例として LLT-有木理論の toy model について述べる。最後に、これまで見てきた A 型の affine Hecke 環の (幾何学的) 表現論をどのように古典型に一般化するかについて我々の立場から述べる。

今回はページ数その他の制約で表現の分類、構成に興味を持つという意味での狭義の表現論内部の問題に限ってさえパラメータが 1 の冪根のときの取り扱い (有木 [Ar96, 上智] が基本的、§8 も参照)、affine Lie 代数や正標数の代数群の表現論への応用 (Kazhdan-Lusztig 予想、Lusztig 予想) 等については触れる事が出来なかった。後者に興味のある方は解説記事 (柏原-谷崎 [KT95], 堀田-谷崎 [HT95], 数研研講究録 [RIMS]) や Bezrukavnikov 達の一連の論文 [ABG, BMR, Be06] を参照していただきたい。

さらに affine Hecke 代数は Macdonald 多項式⁷を記述する、Heckman-Opdam 超幾何方程式のモノドロミーとして出現する等上で述べた狭い意味での表現論を超えた範疇でも広範囲に出現する。しか

³ 上述の参考書 [CG97] ではこの辺がぼやけた書き方になっているので読む時には注意されたい。

⁴ 我々の分類と Opdam-Solleveld の分類は手法が全く異なる為比較する事は可能ではあるが簡単でない。結論として分類は一致するものの分類の記述自体には大きな違いがある。

⁵ そのまま、というのが [Ka06] のタイトルが “Deligne-Langlands” である理由である。Kazhdan-Lusztig [KL87] の記述は A -群を導入して修正し A 型の場合の記述の naive な拡張を修正していて、これが Deligne-Langlands-Lusztig 予想の最後の “Lusztig” 部分になっている。

⁶ 多重セグメント構成は A 型の場合にしか存在しなかったが Deligne-Langlands-Lusztig 予想は全ての型に対して存在した事に注意。

⁷ 後述の Macdonald 表現と混同しないで下さい。lift すると個々の多項式が一致する場合がありますが基本的には別物です。

しそれらの重要な話題に関して affine Hecke 代数の既約表現の分類と結びつけて議論する事は少なくとも現在の筆者には不可能である。

Acknowledgement: 詳細なコメントをくださった阿部紀行さん、吉野太郎さん、西山享先生、ミスを指摘していただいた加藤信一、谷崎俊之両先生に感謝いたします。

1 affine Hecke 代数の定義

以下全て係数体は $\mathbb{C}$ とする。affine Hecke 代数は有限ルート系 (を標準的に拡張した affine root 系) に対して定義されるのでまずルート系の定義を復習する。

三つ組み $\mathcal{R} := (\Pi_0 \subset R_0 \subset X^*)$ が基底付きルート系であるとは、 R_0 が有限ルート系のルート集合であって Π_0 が R_0 の (ひとつの) 単純ルート集合、 X^* を R_0 を含む $\mathbb{Z}$ 格子で後述する条件 (R) を満たすものとする。 $\mathcal{R}$ を決めると連結簡約代数群 G が決まる⁸。例えば、 $GL(n)$ に対応する基底付きルート系は次の三つ組み $\mathcal{R}^{GL(n)}$ である:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_0 & R_0 & X^* \\ \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1}\}_{i=1}^{n-1} & \{\epsilon_i - \epsilon_j\}_{1 \leq i \neq j \leq n} & \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \epsilon_i \end{array} \quad (1.1)$$

§2 の後半以降は §9 を除きこの例に対応する場合のみに制限する。以下基底付きルート系の事をルート系と呼ぶ。

さて、 X_* を X^* の双対格子とする。この時非退化なペアリング $\langle \bullet, \bullet \rangle : X^* \otimes X_* \longrightarrow \mathbb{Z}$ が存在する。 $\mathcal{R}$ に関する条件 (R) を

(R) 全ての $\alpha \in \Pi_0$ に対してある $\alpha^\vee \in X_*$ が存在して $\{\langle \alpha, \beta^\vee \rangle\}_{\alpha, \beta \in \Pi_0}$ がルート系 R_0 に関する Cartan 行列を与える。

とおく。すると α に関する鏡映 s_α が

$$s_\alpha \gamma := \gamma - \langle \alpha^\vee, \gamma \rangle \alpha \quad \forall \gamma \in X^*$$

によって定まり G の Weyl 群 $W_0 \subset \text{Aut} X^*$ を生成する。 (W_0, S_0) は Coxeter 群⁹であり特に各元の $S_0 := \{s_\alpha\}_{\alpha \in \Pi_0}$ に関する (最短表示の) 長さ関数 $\ell : W_0 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が定まった。

Π_0 の元の余ルート全体を $\Pi_0^\vee$ とおく。 $Q^\vee \subset X_*$ を $\Pi_0^\vee$ の生成する X_* の部分格子 (余ルート格子) と呼ぶ。よく知られている様に $W := W_0 \ltimes Q^\vee$ も Coxeter 群になり、その生成系は $S := S_0 \cup \{s_0\}$ となる。ここで s_0 は $\mathcal{R}$ の拡大 Dynkin 図形¹⁰で新しく付け加わる頂点に対応する生成元である。

G の適当な極大トーラス T を固定すると $\text{Hom}_{gr}(T, \mathbb{C}^\times) \cong X^*$ という同型であり Lie 代数 $\mathfrak{g} = \text{Lie} G$ の T -作用によるウェイト (ルート) が R になるものが存在する。このとき $W_0 \cong N_G(T)/T$ という同型がある。

G の有限次元表現を T の有限次元表現に引き戻すという写像は環同型

$$R(G) \cong R(T)^{W_0} \quad (1.2)$$

⁸代数群は Lie 群とは異なり任意の体や環に値を持つ群 (例えば $GL(n, \mathbb{Z})$ や $GL(n, \mathbb{F}_q)$) を含む反面、基礎体として $\mathbb{R}$ を採用したときには実簡約 Lie 群よりも若干狭いクラスとなるような群のクラスであった。

⁹ (W_0, T) という組であって以下の条件 (のみ) で定まるもの: **a)** $T \subset W_0$ は W_0 を生成、**b)** $t^2 = 1$ が全ての $t \in T$ に対して成立、**c)** 任意の $t, t' \in T$ に対して Coxeter 関係式と呼ばれる (1.4) のタイプの関係式が成立する。

¹⁰ルート系に対して Dynkin 図形に対応させる操作の中で形式的に R_0 の Π_0 に対する最高ルート θ も単純ルートだと思ってできる図形。

を定める。ここで群 H に対して $R(H)$ で H の有限次元既約表現を基底とする $\mathbb{C}$ -ベクトル空間に直和で和を、テンソル積で積を入れてできる環 (表現環) を表す。

さて、 S に同値関係 $\sim$ を

$$s \sim s' \Leftrightarrow s \in \text{Ad}(W)s'$$

によって定める。そして

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \mathcal{A} := \mathbb{C}[\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_s^{-1}; s \in S] / (\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_{s'}; s \sim s') \quad (1.3)$$

と定める。

Remark 1.1. $\#S$ は簡約群 $[G, G]$ のランク (極大トーラスの次元) と一致するのでいくらでも大きくなる。しかし $[G, G]$ が単純群であるという仮定の元では対応する (単純) ルート系に応じて $\#(S/\sim)$ は以下の表で与えられる:

$\#(S/\sim)$		
3	C_n	
2	A_1, B_n	F_4, G_2
1	$A_n (n \geq 2), D_n$	E_6, E_7, E_8

ここで C_n 型の場合にのみ $\mathbf{q}_{s_0} \notin \{\mathbf{q}_s\}_{s \in S_0}$ が成立する。以下では $\mathbf{q}_0$ を $\mathcal{R}$ が C_n の場合にのみ $\mathbf{q}_{s_0}$ の省略形として用いる¹¹。

Definition 1.2 (Affine Hecke 代数 $\mathbb{H}' = \mathbb{H}'(\mathcal{R})$). Affine Hecke 環 $\mathbb{H}' = \mathbb{H}'(\mathcal{R}, \mathbf{q})$ を生成元 $\{T_s\}_{s \in S}$ と次の関係式で定義される $\mathcal{A}$ 代数とする:

$$(T_s + 1)(T_s - \mathbf{q}_s) = 0 \quad (s \in S)$$

$$\underbrace{T_s T_{s'} T_s \cdots}_{m_{s,s'}} = \underbrace{T_{s'} T_s T_{s'} \cdots}_{m_{s,s'}} \quad \text{ここで } m_{s,s'} := 1 - \min\{\langle \alpha_s^\vee, \alpha_{s'} \rangle, \langle \alpha_{s'}^\vee, \alpha_s \rangle, 0\}. \quad (1.4)$$

ただし s_0 に対応するルートは R_0 の最高ルート θ とし、 $\alpha_s, \alpha_s^\vee$ をそれぞれ $s \in S_0$ に対応する単純ルート、単純余ルートとする。

Theorem 1.3 (Bernstein-Lusztig). $\alpha \in \Pi_0$ が $\alpha/2 \in \text{Hom}(Q^\vee, \mathbb{Z})$ を満たす時には必ず $\alpha/2 \in X^*$ であったと仮定する。この時環 $\mathbb{H}'(\mathcal{R})$ は次の表示を持つ環 $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathcal{R})$ に $\mathcal{A}$ 代数として埋め込める:

(生成元) $\{T_s\}_{s \in S_0}$ と e^λ ($\lambda \in X^*$);

(関係式)

1. $\{T_s\}_{s \in S_0}$ については定義 1.2 と同じ;
2. e^λ たちは $e^0 = 1 \in \mathbb{H}$ を満たし、ローラン多項式環に同型な部分環 $\mathbb{C}[X^*]$ を生成する;
3. 各 $s \in S_0$ と対応する単純余ルート $\alpha \in \Pi_0$ に対して次の関係式が成立する

$$T_s e^\lambda - e^{s\lambda} T_s = \begin{cases} ((1 - \mathbf{q}_s) - \mathbf{q}_s(1 - \mathbf{q}_0)e^{\alpha/2}) \frac{e^\lambda - e^{s\lambda}}{e^\alpha - 1} & (\text{if } \alpha/2 \in \text{Hom}(Q^\vee, \mathbb{Z})) \\ (1 - \mathbf{q}_s) \frac{e^\lambda - e^{s\lambda}}{e^\alpha - 1} & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

¹¹逆に言えば式の中に $\mathbf{q}_0$ が出てきていれどかならず C_n 型のルート系を扱っているとして思っていよい。このように C_n 型の場合にだけパラメータが増える理由は implicit に制限ルート系 BC_n の存在に依っている。

さらに $X^* \cong Q^\vee$ という W_0 作用と可換な格子としての同型が存在すれば同型 $\mathbb{H}' \cong \mathbb{H}$ が存在する。

Remark 1.4. 定理 1.3 は $q_s \equiv 1$ ($\forall s \in S$) と置くときには同型 $W \cong W_0 \times Q^\vee$ の群環版になる。

以下、環 $\mathbb{H}(\mathcal{R})$ の方が環 $\mathbb{H}'(\mathcal{R})$ よりも一般的である事から前者を対象として議論を進める。 $\mathbb{H}(\mathcal{R})$ の事を拡大 affine Hecke 環と呼ぶこともある¹²。

Theorem 1.5 (Bernstein-Lusztig). $\mathcal{A}[X^*] := \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X^*]$ とする。すると $\mathbb{H}$ の中心 $Z(\mathbb{H})$ は自然な埋め込み $\mathcal{A}[X^*]^{W_0}$ と同型である。

標準的な議論¹³によって $\mathcal{A}[X^*]$ の 1 次元表現は $\mathbb{T} := T \times (\mathbb{C}^\times)^{\#(S^\vee)}$ の点と 1 対 1 に対応する事が分かる。また、 $Z(\mathbb{H})$ の 1 次元表現は $G \times (\mathbb{C}^\times)^{\#(S^\vee)}$ の半単純元の随伴作用による共役類の集合と 1 対 1 に対応する。

2 主系列表現

可換環 R の $\mathbb{C}$ 上の既約表現 (全て 1 次元表現) 全体の集合を $\text{Spec} R$ と書く。また、 $a \in \text{Spec} Z(\mathbb{H})$ が表す 1 次元表現 $\mathbb{C}_a$ に対して $\mathbb{H}_a := \mathbb{C}_a \otimes_{Z(\mathbb{H})} \mathbb{H}$ とする。

記号の乱用で $\chi \in \text{Spec} \mathcal{A}[X^*] \cong \mathbb{T}$ を $\mathcal{A}[X^*]^{W_0} \cong Z(\mathbb{H})$ に制限して得られる $\text{Spec} Z(\mathbb{H})$ の元の事も同じ記号 χ で表す事がある。

一般に非可換環 A が与えられた時 A の既約表現の同型類全体の集合を $\text{Irr} A$ で表すものとする。

Theorem 2.1 (Dixmier 版 Schur の補題の帰結). $\mathbb{H}$ の既約表現には中心 $Z(\mathbb{H})$ がスカラー倍作用として働く。特に

$$\text{Irr} \mathbb{H} = \bigsqcup_{a \in \text{Spec} Z(\mathbb{H})} \text{Irr} \mathbb{H}_a$$

が成立する。

Theorem 2.2 (Bernstein-Lusztig の定理の帰結). 全ての $a \in \text{Spec} Z(\mathbb{H})$ に対して $\dim \mathbb{H}_a = (\#W)^2$ が成立する。

上の 2 つの定理は結局 $\mathbb{H}$ の既約表現を知る為には有限次元代数 $\mathbb{H}_a$ たちの既約表現を知れば良いという事を主張している。

さて、 $\mathbb{H}$ は $T_1, \dots, T_n$ が生成する有限次元部分環 $\mathbb{H}^0$ と $\mathcal{A}[X^*]$ で生成された¹⁴。

これを用いて $\mathcal{A}[X^*]$ の 1 次元表現 χ に対して定義される次の誘導表現を主系列表現と呼ぶ:

$$M(\chi) := \text{Ind}_{\mathcal{A}[X^*]}^{\mathbb{H}} \chi.$$

$R_0 = W_0 \Pi_0$ であった事を利用して任意の $\alpha \in R_0$ に対して $\alpha_i \in \Pi_0$ であって $\alpha \in W_0 \alpha_i$ となるものを取って $\mathbf{q}_\alpha := \mathbf{q}_{\alpha_i}$ と置く。

任意の有限次元 $\mathbb{H}$ 加群 M と任意の半単純元 $y \in \mathbb{T}$ に対して

$$M[y] := \{m \in M; (e^\lambda - \lambda(y))^N m = 0, \forall \lambda \in X^*, N \gg 0\}$$

¹² G が連結半単純代数群の時にはこの”拡大”は適当な拡大 Dynkin 図形の自己同型を付加することと実質的に同値になる事が知られている。

¹³Pontryagin 双対を取る事

¹⁴ $\mathbb{H}^0$ は $\mathbf{q}_s \equiv 1$ という特殊化の元で $\mathbb{C}[W_0]$ と同型になる事は容易である。これを普通 ($\mathcal{R}$ に付随する) 有限型 Hecke 代数と呼ぶ。

と置く¹⁵。

Theorem 2.3 (松本英也 [Ma77], 加藤信一 [Ka81]). $\chi \in \text{Spec } \mathcal{A}[X^*]$ とすると対応する主系列表現 $M(\chi)$ に対して以下が成立する:

1. 既約 $\mathbb{H}_\chi$ -加群 L と $w \in W_0$ に対して $L[w\chi] \neq 0$ が成立する時 L は $M(w\chi)$ の商として書ける¹⁶;
2. 全ての $w \in W_0$ に対して $M(\chi)$ と $M(w\chi)$ の組成因子は重複度も込めて一致する;
3. $M(\chi)$ が既約である事と、次の集合 $\Psi(\chi)$ が空集合である事は同値である

$$\Psi(\chi) = \bigsqcup_{\alpha \in R_0} \Psi_\alpha(\chi) \quad \Psi_\alpha(\chi) := \begin{cases} \{\alpha\} & (\frac{\alpha}{2} \in \text{Hom}(Q^\vee, \mathbb{Z}), \langle s, \alpha \rangle = \mathbf{q}_\alpha^{\pm 1} \mathbf{q}_0^{\pm 1}) \\ \{\alpha\} & (\frac{\alpha}{2} \notin \text{Hom}(Q^\vee, \mathbb{Z}), \langle s, \alpha \rangle = \mathbf{q}_\alpha^{\pm 1}) \\ \emptyset & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

(1), (2) から特に $M(\chi)$ は全ての既約 $\mathbb{H}_\chi$ -加群をその部分商として含む;

Corollary 2.4. 記号は定理 2.3 のままとする。この時 $\Psi(\chi) = \emptyset$ であれば

$$\mathbb{H}_\chi \cong \text{Mat}(\#W_0, \mathbb{C}) \quad (\#W_0 \text{ 次全行列環})$$

が成立する。

Remark 2.5. **1)** χ と $w\chi$ の $\mathcal{A}[X^*]^{W_0}$ への制限は同じなので各 $a \in \text{Spec } Z(\mathbb{H})$ に対して $\mathbb{H}_a$ の主系列表現は高々 $\#W_0$ 種類である; **2)** 系 2.4 はほとんど全ての χ に対して $\mathbb{H}_a$ の表現論は自明である事を意味する。

以下、 $\mathcal{R}^{GL(n)}$ を $GL(n, \mathbb{C})$ に対応する基底付きルート系であるとする。この時 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n := \mathbb{H}(\mathcal{R}^{GL(n)})$ は $\mathbb{H}'(\mathcal{R}^{GL(n)})$ 上自由加群となる。

以下では A 型 ($\mathcal{H}$ に代表される場合) に特有¹⁷の構造を用いて議論する。(1.1) を仮定し、特に $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ を用いて $S_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\} = \{1, \dots, n-1\}$ とおく。この場合 $\alpha_i^\vee = \alpha_i$ 、 $X^* = X_*$ とみなせるのでルートと余ルート、ウェイトと余ウェイトを区別しない。また、 $S_0/\sim$ は単元集合なので $\mathbf{q} = \mathbf{q}_s$ ($s \in S_0$) とおいて一般性を失わない。

さて、 $\mathcal{P} := \mathcal{A}[X_*]$ とおく。 $\mathcal{P}$ に $\mathcal{H}$ の表現の構造を定理 1.3 を用いて以下の様に入れる:

$$T_i \mathbf{e}^\lambda := \frac{\mathbf{e}^\lambda - \mathbf{e}^{s_i \lambda}}{\mathbf{e}^{\alpha_i} - 1} - \mathbf{q} \frac{\mathbf{e}^\lambda - \mathbf{e}^{s_i \lambda + \alpha_i}}{\mathbf{e}^{\alpha_i} - 1}, \quad \mathbf{e}^\lambda X^\mu = \mathbf{e}^{\lambda + \mu}, \quad \lambda, \mu \in X_*.$$

Theorem 2.6 (基本表現). $\mathcal{P}$ は上の作用により $\mathcal{H}$ の忠実表現を定める。この時任意の $\chi \in \mathbb{T}$ に対してある $w \in W_0$ であり $M(\chi)$ は $\mathcal{P}$ の商となるものが存在する。

特に $\chi = (s, q)$ であり $q \in \mathbb{R}_{>1}$ であるときには $\chi \in \mathbb{T}$ が $\alpha_i(\chi) < 1$ を全ての i に対して満たせば $M(\chi)$ は $\mathcal{P}$ の商となる。

¹⁵ もちろんここでは $\text{Spec } \mathcal{A}[X^*] \cong \mathbb{T}$ を用いている。

¹⁶ $w \in W_0$ は X^* に作用していたので特に $\mathcal{A}[X^*]$ の表現にも作用する。また、 $\chi \in \mathbb{T}$ と同一視した上で $w \in W_0$ に対して w の $N_G(T)$ への持ち上げ $\dot{w}$ を用いて $w\chi := \text{Ad}(\dot{w})\chi$ と定めたと考えても同じ事である。

¹⁷ 実際の所特有な訳ではないが、他の型の場合は記述が難しくなったり証明がなかったりする。他の型への拡張等については我々の設定については最後の節でまとめて議論し、Kazhdan-Lusztig の設定についてはこのように footnote で表す。

Theorem 2.7 (Tits の変形定理). $\mathbb{H}^0$ を $\mathcal{H}$ に付随する有限型 Hecke 環とする。 $q \in \mathbb{C}^\times$ を

$$\prod_{j=1}^{n-1} (1 + q + \cdots + q^j) \neq 0 \quad (2.1)$$

と取る。この時

$$\mathbb{H}^0/(\mathbf{q} - q) \cong \mathbb{C}[W_0]$$

という同型が存在する。特にこの時 $\mathbb{H}^0/(\mathbf{q} - q)$ の既約表現は n の分割全体の集合と 1 対 1 に対応する¹⁸。

3 Macdonald 表現

前と同様に $GL(n)$ のルート系に付随する affine Hecke 環 $\mathcal{H}$ とその基本表現 $\mathcal{P}$ を考える。

Theorem 3.1 (基本表現-2). $\mathcal{P}$ を $\mathbb{H}^0$ の表現に制限すると $Z(\mathcal{H})$ -加群として $\mathbb{H}^0$ の正則表現である。

この定理を $\mathbf{q} = 1$ という特殊化の基で $\mathbf{e}^\lambda = 1$ の近傍で見る。これは、埋め込み

$$X^* \subset \mathfrak{t} := \text{Lie} T$$

を利用して定まる環準同型

$$\text{fx} : \mathcal{P}/(\mathbf{q} - 1) \ni \mathbf{e}^\lambda \mapsto \sum_{m \geq 0} \frac{\lambda^m}{m!} \in \mathbb{C}[[\mathfrak{t}]] \quad (3.1)$$

を見る事と等価である。また (3.1) 右辺は $\mathbb{H}^0/(\mathbf{q} - 1) \cong \mathbb{C}[W_0]$ という同型を通じて $W_0 \curvearrowright \mathfrak{t}^*$ から $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}]]$ の自然な積構造によって誘導される表現が定まる¹⁹。

さて、計算すると

$$\text{fx}(Z(\mathcal{H})) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{t}^* \text{ について 1 次以上の項 } \subset \mathbb{C}[[\mathfrak{t}]]^{W_0}$$

と書ける事が分かる。さらに $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}]]^{W_0}$ は次数構造をもつ $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}]]$ の部分環で $\text{fx}(Z(\mathcal{H}))$ を含む最小の部分環である事も分かる。従って $Z(\mathcal{H})$ -加群を $\mathbb{C}$ -加群へとつぶす為には $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}]]^{W_0}$ の 1 次以上の斉次部分のなすイデアル $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}]]_+^{W_0}$ によって割れば良かった。したがって以下の結果が定理 3.1 の W_0 版である

Theorem 3.2 (基本表現の W_0 版). 左 W_0 加群としての同型

$$\mathbb{C}[[\mathfrak{t}]]/(\mathbb{C}[[\mathfrak{t}]]\mathbb{C}[[\mathfrak{t}]]_+^{W_0}) \cong \mathbb{C}[W_0]$$

が存在する。

Remark 3.3. 論理的にいうならば定理 3.1 がある以上定理 3.2 を独立した定理として述べる必要はない。しかし定理 3.2 はよく見ると左辺に次数構造、右辺に右 W_0 -加群構造という風に両側に特有の構造があり、特に次数構造は $\mathcal{P}$ のみからは出現しない。

¹⁸一般のルート系 $\mathcal{R}$ に対しては $\mathbb{H}^0/(\mathbf{q} - q)$ の既約表現は $\text{Irrep} \mathbb{C}[W_0]$ で表される。但し (2.1) に対応する条件が若干きつくなる。

¹⁹今は $GL(n)$ のルート系から出発しているため $W_0 \cong \mathfrak{S}_n$ であった。また $\mathfrak{t}^* \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C} \epsilon_i$ と思ってよかった。

さて、 $W_0 \cong \mathfrak{S}_n$ の表現は n の分割によってラベル付けされた。その具体的な記述としては Macdonald 表現 (Specht 構成) と呼ばれるものが知られている。それは分割 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$ から出発して

$$R_\lambda := R_0 \cap \sum_{j \notin \{\sum_{l \leq k} \lambda_l\}_k} \mathbb{Z} \alpha_j, \quad \sigma_\lambda := \prod_{\alpha \in R_0^+ \cap R_\lambda} \alpha \in \mathbb{C}[t]$$

と置くと以下が成立するというものであった

Theorem 3.4 (Specht). $L_\lambda := \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \sigma_\lambda$ は既約 $\mathfrak{S}_n$ -加群であって次を満たす:

- 全ての $\mathfrak{S}_n$ の既約表現はある L_λ と同型である;
- 任意の λ について

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(L_\lambda, \mathbb{C}[t]_m) = \begin{cases} 0 & (m < \deg \sigma_\lambda) \\ 1 & (m = \deg \sigma_\lambda) \end{cases}$$

が成立する。ここで $\mathbb{C}[t]_m$ は $\mathbb{C}[t]$ の m 次斉次部分である。

この L_λ の事を *Macdonald 表現* と呼ぶ。

Macdonald 表現は A 型の場合 (今の場合) には Specht 加群とも呼ばれる。Specht 加群は $\mathfrak{S}_n$ の modular 表現 (例えば適当な有限体上の表現) を理解する為に重要な道具であった。定理 2.7 により $\mathcal{H}_a/(\mathbf{q} - q)$ は q が悪い 1 の冪根でない限り $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ を含む。

Theorem 3.5 (構成の帰結、Kazhdan-Lusztig [KL87]). $\chi \in \mathrm{Spec} \mathcal{A}[X^*]$ を $\mathbf{q}$ が (2.1) を満たさないスカラーで作用する表現とする。その時 $\mathcal{H}$ の主系列表現は左 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ 表現として $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ と同型である。

この事から L_λ の $M(\chi)$ への移植ができれば既約表現の分類に対するヒントとなりうる事が期待される。それは実際 $\mathcal{P}$ のレベルで可能であり、以下の様に述べられる

Theorem 3.6 (本質的には Lusztig-Spaltenstein [LS85]). $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j \in R_0^+$ として $\Sigma(\alpha) := (\mathbf{e}^{\epsilon_j} - \mathbf{q} \mathbf{e}^{\epsilon_i})$ とおく。このとき

$$\Sigma_\lambda := \prod_{\alpha \in R_0^+ \cap R_\lambda} \Sigma(\alpha)$$

とおくと $\mathcal{L}_\lambda^0 := \mathbb{H}^0 \Sigma_\lambda$ は既約 $\mathbb{H}^0$ -加群となる。

Remark 3.7. Σ_λ に $\mathbf{q} = 1$ を代入すると σ_λ に対応する元となることは容易に見て取れる。

最後に、後で使う結果を一つ述べる
明らかに

$$M = \bigoplus_{y \in \mathbb{T}} M[y]$$

が成立している。

Theorem 3.8. $\chi \in \mathrm{Spec} Z(\mathcal{H})$ を $G \times \mathbb{C}^\times$ の半単純元と同一視し、適当に G -共役をとってさらに $\mathbb{T}$ の元であると思い直す。このとき

$$M(\chi) = \bigoplus_{y \in \mathrm{Ad}(N_G(T))\chi} M(\chi)[y]$$

という直和分解が存在する。ここでさらに $\dim M(\chi) = \#(W_0[\chi])$ が成立する。

4 多重セグメントと既約表現の分類

さて、以上の準備の元で $\mathcal{H}_a$ の既約表現の分類を

($\star$)₁: $a \in \text{Spec}Z(\mathcal{H})$ は $\mathbf{q}$ が絶対値が 1 より大きい実数 q で作用する表現

という仮定の元で述べる。 a は $q(a) := \text{tr}(\mathbf{q}; \mathbb{C}_a)$ と (重複を許す) スカラーの集合

$$\vec{x}(a) = \{x_1, \dots, x_n\} := \{\xi \in \mathbb{C}; \xi^n - \text{tr}(C_1; \mathbb{C}_a)\xi^{n-1} + \text{tr}(C_2; \mathbb{C}_a)\xi^{n-2} - \dots + (-1)^n \text{tr}(C_n; \mathbb{C}_a) = 0\}$$

の組として表される。ただここで

$$C_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{e}^{\epsilon_{i_1} + \epsilon_{i_2} + \dots + \epsilon_{i_k}}$$

と置いた。

Definition 4.1. $q \in \mathbb{C}^\times$ とする²⁰。 q -セグメントとは $\mathbb{C}^\times$ の部分集合 I であって

$$\gamma, q\gamma, q^2\gamma, \dots, q^m\gamma$$

の格好のものの事とする。 a -多重セグメント $\mathbf{I}$ とは $q(a)$ -セグメントの集合 $\{I_m\}_m$ であって

$$\vec{x}(a) = \bigsqcup_{I_m \in \mathbf{I}} I_m$$

となるものの事とする。相異なる a -多重セグメント全体の集合を $\mathfrak{P}(a)$ とおく。

さて、($\star$)₁ の下で a -多重セグメントの番号付けを適当に並べ替えて次の性質を満たす様にする

(♣): 任意の $m < l$ に対して $I_m = (\gamma_m, \dots, q^{k(m)}\gamma_m)$, $I_l = (\gamma_l, \dots, q^{k(l)}\gamma_l)$ とすると $|\gamma_m| \leq |\gamma_l|$ が成立する。ここで $k(m), k(l) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ はセグメントの大きさである。

また、 $\mathcal{H}(\mathbf{I})$ で

$$T_1, T_2, \dots, T_{\#I_1-1}, T_{\#I_1+1}, \dots, T_{\#I_1+\#I_2-1}, T_{\#I_1+\#I_2+1}, \dots, T_n$$

とという $\mathcal{H}$ の $n - \#\mathbf{I}$ 個の生成元と $\mathcal{A}[X^*]$ で生成される部分代数を表す。この代数は

$$\mathcal{H}(\mathbf{I}) \cong \mathcal{H}_{\#I_1} \otimes \mathcal{H}_{\#I_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{\#I_M} \quad \text{ここで } M = \#\mathbf{I}$$

というように $GL(\#I_m)$ に対応する affine Hecke 代数達のテンソル積に分解する。

Theorem 4.2 (Bernstein-Zelevinsky [BZ77]). ($\star$)₁ を仮定する。単独の $q(a)$ -セグメントからなる a -多重セグメント $\{I\}$ が存在したと仮定する。 $\chi \in \text{Spec}\mathcal{A}[X^*]$ を

$$I = (\chi(\mathbf{e}^{\epsilon_1}), \dots, \chi(\mathbf{e}^{\epsilon_n}))$$

となるように取る。この時 $M(\chi)$ の中に $\Sigma_{(n)}$ の像で生成される 1 次元表現が存在する。これを *Steinberg* 表現と呼び $\text{St}(\chi)$ と表す。

²⁰ この節の一般的設定は ($\star$)₁ だが後により広く議論するのでこの定義では q の範囲を広く取った。

Definition 4.3. $(\star)_1$ を仮定する。♣ を満たすように並べ替えられた a -多重セグメント $\mathbf{I} = \{I_m\}_m$ を固定する。 $\chi \in \text{Spec } \mathcal{A}[X^*]$ を

$$I_1 = (\chi(\mathbf{e}^{\epsilon_1}), \dots, \chi(\mathbf{e}^{\epsilon_{\#I_1}})), I_2 = (\chi(\mathbf{e}^{\epsilon_{\#I_1+1}}), \dots, \chi(\mathbf{e}^{\epsilon_{\#I_1+\#I_2}})), \dots$$

となる様にする。また、 $X_m^* := \bigoplus_{i=1+\sum_{j<m} \#I_j}^{\sum_{j \leq m} \#I_j} \mathbb{Z}\epsilon_i$ とおく。この時 $\mathcal{H}(\mathbf{I})$ の Steinberg 表現 $\text{St}(\chi; \mathbf{I})$ を $\mathcal{H}_{\#I_m}$ と $\chi_m := \chi|_{\mathcal{A}[X_m^*]}$ に関する Steinberg 表現達 $\{\text{St}(\chi_m)\}_m$ の (外部) テンソル積

$$\text{St}(\chi; \mathbf{I}) := \text{St}(\chi_1) \otimes \text{St}(\chi_2) \otimes \cdots \otimes \text{St}(\chi_M) \quad M = \#\mathbf{I}$$

として定める。

Theorem 4.4 (Bernstein-Zelevinsky [BZ77]). $(\star)_1$ を仮定する。 $(\mathbf{I}, \chi)$ を定義 4.3 と同様に取る。その時誘導表現 $\text{Ind}_{\mathcal{H}(\mathbf{I})}^{\mathcal{H}} \text{St}(\chi; \mathbf{I})$ は唯一の既約商表現を持つ。この誘導表現を標準表現と呼び $\mathcal{M}(\mathbf{I})$ で表し、そしてその (唯一の) 既約商表現を $\mathcal{L}(\mathbf{I})$ と表す。

定理 4.4 の標準表現 $\mathcal{M}(\mathbf{I})$ が

$$\Sigma(\mathbf{I}) := \Sigma_{(\#I_1)} \times \Sigma_{(\#I_2)} \times \cdots \times \Sigma_{(\#I_M)} \quad M = \#\mathbf{I}$$

の像を含む事は構成から直ちに分かる。ここで $\Sigma(\mathbf{I})$ は $\mathbf{I}$ から数列 $\{\#I_m\}_m$ を大きい順に並べ替える事によって分割 $\lambda(\mathbf{I})$ を作って定めた元 $\Sigma_{\lambda(\mathbf{I})}$ と適当な $W_0 = \mathfrak{S}_n$ 作用によって同一視できるものである。また、

$$\mathcal{L}_{\mathbf{I}}^0 := \mathbb{H}^0 \Sigma(\mathbf{I}) \subset \mathcal{P}$$

と定める。

Remark 4.5. 我々は $\mathcal{P}/(\mathbf{q} - q)$ への $\mathbb{H}^0/(\mathbf{q} - q) \cong \mathbb{C}[W_0]$ という同型を用いた W_0 -作用を持っているがこれと上で言う (X^* への自然な作用から誘導される) W_0 作用とは $q \neq 1$ の時には異なるものである。にも関わらず表現として $\mathcal{L}_{\mathbf{I}}^0 = \mathcal{L}_{\lambda(\mathbf{I})}^0$ である。但し、この場合 (一般には) $\mathcal{M}(\mathbf{I})$ 自身は $\mathcal{P}$ の商表現ではない。

Theorem 4.6 (Bernstein-Zelevinsky [BZ77]). 仮定 $(\star)_1$ の下で

$$\mathfrak{P}(a) \leftrightarrow \text{Irrep } \mathbb{H}_a \quad \mathbf{I} \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{I})$$

という 1 対 1 対応が存在する。さらに $\mathcal{L}(\mathbf{I})$ は $\mathcal{M}(\mathbf{I})$ の $\mathbb{H}_a$ -加群としての組成因子であって (抽象的な $\mathbb{H}^0$ 表現として) $\mathcal{L}_{\mathbf{I}}^0$ を含む唯一のものとして特徴付けられる。

5 籠の幾何学と $\mathcal{H}$ の表現論

前の節の分類をより幾何的に書き直す事を考える。 $\mathcal{H}$ の中心 $\mathcal{A}[X^*]^{W_0}$ の 1 次元表現は定理 1.5 (とその直後の議論) を使うと

$$\{G \times \mathbb{C}^\times \text{ の半単純元 } \} / \text{共役作用} \ni a = (s, q) \Leftrightarrow \text{tr}(a, \bullet) \in \text{Spec } R(G \times \mathbb{C}^\times) \cong \text{Spec } Z(\mathcal{H})$$

と書き直せる事が分かる²¹。この時 a が条件

$$(\star) : a = (s, q) \text{ として } q \text{ は (2.1) を満たさない}$$

²¹半単純元とは表現として実現したときに対角化できるような元の事

を仮定すると $\mathfrak{g} = \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ への a -作用

$$G \times \mathbb{C}^\times \times \mathfrak{g} \ni (s, q) \times X \mapsto q^{-1} s X s^{-1} \in \mathfrak{g}$$

に関する固定部分 $\mathfrak{g}^a$ は

$$\mathfrak{g}^a \cong \bigoplus_{c \in \mathbb{C}^\times} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_c, V_{qc})$$

と書ける。また、 $\mathfrak{g}^a$ に属する元は全て冪零元である²²。以下この節では $(\star)$ をずっと仮定する (しかも主定理では思い出す為に反復して述べることもある)。ここで各 $c \in \mathbb{C}^\times$ に対して $GL(n)$ の自然表現 $V \cong \mathbb{C}^n$ の部分空間 V_c を $\{v \in V; sv = cv\}$ で定める。この空間には $G(a) := \{g \in G; gs = sg\}$ が作用する事が容易に分かる。

Example 5.1 ($n = 6$ の場合-1). 上の構成を行列の言葉で書いてみよう。 $a = (s, q)$ とおいたとき $q > 1$ を実数として、 s を $GL(6)$ の対角行列でありその固有値が (左上から) 順に $q^2, q^2, q, q, q, 1$ と並んでいるとする。この時に

$$\mathfrak{g}^a \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \text{Hom}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3) \oplus \text{Hom}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$$

と書ける。この場合に $\mathfrak{g}^a$ の元が全て冪零である事や

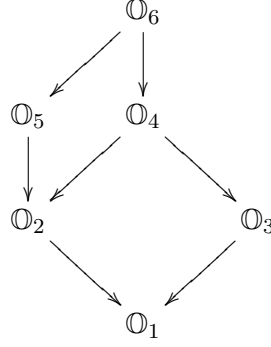
$$G(s) = GL(2) \times GL(3) \times GL(1)$$

による共役作用が $\mathfrak{g}^a$ を保つ事等は容易に分かる。また、 $\mathfrak{g}^a$ の $G(s)$ -軌道が次の代表系で表される事も計算により容易に分かる:

$$\begin{aligned} X_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ X_4 &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

²² これは (2.1) が成り立たない場合には反例がある。

またこれらの間の閉包関係は $\mathbb{O}_i := G(s)X_i$ とおいて次の図式で表される:



さて、 a -多重セグメント $\mathbf{I} = \{I_m\}_m$ に対応して V の s -固有ベクトルの集合の族 $\{\vec{v}_m = (v_m^k)_k\}_m$ で次の性質を持つものを取る:

$$I_m = \{s \text{ の } \vec{v}_m \text{ に対する固有値の集合} \} \quad \bigsqcup_m \vec{v}_m \text{ は } V \text{ の基底.}$$

この時

$$v(I_m) := \sum_{v, v' \in \vec{v}_m; (s \times s^{-1})(v \otimes v') = q(v \otimes v')} v \otimes v' \subset V \otimes V \cong \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{g}$$

とするとこの元は $\mathfrak{g}^a$ に入る。そして $v(\mathbf{I}) = \sum_{I_m \in \mathbf{I}} v(I_m)$ とおくと

$$\phi : \mathbf{I} \mapsto \mathcal{O}_{\mathbf{I}} := G(a)v(\mathbf{I}) \subset \mathfrak{g}^a$$

は a -多重セグメントから $\mathfrak{g}^a$ の $G(a)$ -軌道全体の集合への写像を定める。

Theorem 5.2 (Gabriel). ϕ は $\mathfrak{P}(a)$ と $\mathfrak{g}^a$ の $G(a)$ -軌道全体の集合の間の全単射を誘導する。

Example 5.3 ($n = 6$ の場合-2). 例 5.1 における軌道 $\mathbb{O}_i$ 達に対応する $\mathfrak{P}(a)$ の元を $\mathbf{I}_i$ と表す時に以下が成立する:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \{(q^2)(q^2)(q)(q)(q)(1)\}, \mathbf{I}_2 = \{(q^2, q)(q^2)(q)(q)(1)\}, \mathbf{I}_3 = \{(q^2)(q^2)(q, 1)(q)(q)(1)\}, \\ \mathbf{I}_4 &= \{(q^2, q)(q^2)(q, 1)(q)\}, \mathbf{I}_5 = \{(q^2, q)(q^2, q)(q)(1)\}, \mathbf{I}_6 = \{(q^2, q, 1)(q^2, q)(q)\}. \end{aligned}$$

定理 5.2 は集合としては $\text{Irrep} \mathbb{H}_a$ は $\mathfrak{g}^a$ の $G(a)$ -軌道によってラベル付けされるという事を意味する。また、このラベル付けを用いると $\mathfrak{g}^a$ の $G(a)$ -軌道全体の集合の閉包関係を記述する事ができる。 $\mathbf{I} \in \mathfrak{P}(a)$ と $I, I' \in \mathbf{I}$ であって $I \not\subset I'$ かつ $I' \not\subset I$ となるものの組を取る。この時 $\tau_{(I, I')}(\mathbf{I}) \in \mathfrak{P}(a)$ を以下で定める:

$$\tau_{(I, I')}(\mathbf{I}) := (\mathbf{I} - \{I, I'\}) \cup \{I \cup I', I \cap I'\}.$$

Theorem 5.4 (Abeasis-Del Fra). $\mathbf{I}, \mathbf{I}' \in \mathfrak{P}(a)$ に対して $\mathcal{O}_{\mathbf{I}'} \subset \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{I}}}$ となる必要十分条件は $\mathbf{I}$ が $\mathbf{I}'$ から操作 $\tau_{(I, I')}$ を適当に繰り返して得られる事である。

n の分割 λ, μ に対して全順序 $<$ を

$$\lambda < \mu \Leftrightarrow \exists k > 0 \text{ s.t. } \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_{k-1} = \mu_{k-1}, \lambda_k < \mu_k$$

と定める。すると定理 4.6 の後半部分は次の様な強化版を持つ

Theorem 5.5 (Zelevinsky). $\mathbf{I} \in \mathfrak{P}(a)$ とする。この時標準加群 $\mathcal{M}(\mathbf{I})$ が $\mathbb{H}^0$ -加群として $\mathcal{L}_\mu^0$ を含む為には $\mu > \lambda(\mathbf{I})$ が必要である。

定理 5.5 に $<$ が対応する冪零ジョルダン標準形を含む $\mathfrak{g}$ の G -軌道の包含関係を与えていた事、それと定理 4.6 を使うと次が分かる

Corollary 5.6 (Zelevinsky). $\mathbf{I}, \mathbf{I}' \in \mathfrak{P}(a)$ とする。この時標準加群 $\mathcal{M}(\mathbf{I})$ が $\mathcal{H}$ -加群として $\mathcal{L}(\mathbf{I}')$ を含む為には $\mathcal{O}_{\mathbf{I}} \subset \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{I}'}}$ が必要である。

系 5.6 は $\Sigma(\mathbf{I})$ がどの標準表現に非自明に入るかという事を記述していると思える。さて、 Σ_λ から多項式の族 $\mathcal{S}_\lambda$ を

$$\mathcal{S}_\lambda := \{w\Sigma_\lambda; w \in W_0 = \mathfrak{S}_n, (\mathbf{e}^{\epsilon_i} - q\mathbf{e}^{\epsilon_j})|w\Sigma_\lambda \text{ ならば } w(i) < w(j)\}$$

と定める。

ここで $\chi \in \mathbb{T}$ を $\mathcal{P}$ から全射が存在する様に固定し (定理 2.6)、

$$\Psi(\chi; \lambda) := \{w\chi \in \mathbb{T}; w \in W_0 \text{ s.t. } f(w\chi) = 0 \text{ for some } f \in \mathcal{S}_\lambda\} \subset W_0$$

とおく。そして

$$\Psi(\chi; \lambda)^\circ := \begin{cases} W_0 - \bigcup_{\mu > (1^n)} \Psi(\chi; \mu) & (\lambda = (1^n)) \\ \Psi(\chi; \lambda) - \bigcup_{\mu < \lambda} \Psi(\chi; \mu)^\circ & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と順序 $<$ に関して小さい順に帰納的に定める。

Theorem 5.7 (Kazhdan-Lusztig [KL87]). $\chi \in T \times \mathbb{C}^\times$ を $(\star)$ を満たす様にする²³。この時、ある λ について $\Psi(\chi; \lambda)^\circ \neq \{0\}$ が成立するならば $M(\chi)$ の組成因子となる既約 $\mathbb{H}_\chi$ -加群 $\mathcal{L}$ で次の性質を満たすものが存在する:

1. $\mathcal{L}[\chi'] \neq 0$ がある $\chi' \in \Psi(\chi; \lambda)^\circ$ について成立;
2. $\mathcal{L}[\chi'] = \{0\}$ が全ての $\chi' \in \bigcup_{\mu < \lambda} \Psi(\chi; \mu)^\circ$ について成立;
3. $\mathcal{L}$ は $\mathcal{L}_\lambda$ を $\mathbb{H}^0$ 加群として重複度 1 で含む。

また、 χ が $(\star)$ を満たす時には全ての $\mathbb{H}_\chi$ -加群は上の構成によって得られる。

Example 5.8 ($n = 4$ で特別な中心指標の場合). $\chi = (s, q) \in \mathbb{T}$ を $q > 1$ かつ

$$\langle \epsilon_1, s \rangle = 1, \langle \epsilon_2, s \rangle = \langle \epsilon_3, s \rangle = q, \langle \epsilon_4, s \rangle = q^2$$

である様にする。 $M(\chi)$ は $\mathcal{P}$ の商表現となる。この時 $\mathbf{w} \in W_0 = \mathfrak{S}_4$ を最長元とすると

$$\begin{aligned} 1, s_2 &\in \Psi(\chi; (1^4))^\circ, s_1, s_3, s_1s_2, s_3s_2 \in \Psi(\chi; (21^2))^\circ \\ s_1\mathbf{w}, s_3\mathbf{w}, s_1\mathbf{w}s_2, s_3\mathbf{w}s_2 &\in \Psi(\chi; (2^2))^\circ, \mathbf{w}, \mathbf{w}s_2 \in \Psi(\chi; (31))^\circ \end{aligned}$$

が成立する。

²³a) ここで $\mathbb{T} = T \times \mathbb{C}^\times$ は $\mathcal{R}$ が ADE 型の時しか正しくない。ここでは A 型の場合のみ扱っているため等号が成立する。 $\mathbb{T}$ と書かなかった理由は Kazhdan-Lusztig の設定では全ての $\mathbb{T}$ の元ではなく、 $T \times \mathbb{C}^\times$ の $\mathbb{T}$ へのパラメータ部分の対角埋め込みに関する部分を扱っているため。

b) χ が $(\star)$ を満たさない場合の分類も $\mathcal{H}$ 、つまり A 型に対応する場合には既約表現の分類はできている。後述の注意 8.4 も参照のこと。

6 既約表現の分類 (Deligne-Langlands 分類)

前の節と同じ記号を用いる。定理 4.6、定理 5.7、定理 5.5 達の関係は以下のように述べる事が出来る:

$\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g} = \text{End}(V)$ を対角成分が全て 0 の上三角行列の成す部分空間 (これは $T \times \mathbb{C}^\times$ 作用で安定) と定める。

Theorem 6.1 (Kazhdan-Lusztig [KL87]). χ を $(\star)$ を満たす $T \times \mathbb{C}^\times$ の元とする。 $\mathcal{L}$ を $\mathbb{H}_\chi$ の既約表現とすると n の分割 λ が唯一存在し

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\chi'] &= 0 \quad \forall \chi' \in \bigcup_{\mu < \lambda} \Psi(\chi; \mu)^\circ \\ \mathcal{L}[\chi'] &\neq 0 \quad \exists \chi' \in \Psi(\chi; \lambda)^\circ \end{aligned} \quad (6.1)$$

を満たす。この時 (6.1) を満たす任意の χ' に対して $w \in W_0$ を $w\chi' = \chi$ となるように取る。また w に対しその $N_G(T)$ への持ち上げ $\dot{w}$ を決める。そのときある χ -多重セグメント $\mathbf{I}$ で

$$G(\chi)(\dot{w}\mathfrak{n}\dot{w}^{-1} \cap \mathfrak{g}^\chi) = \overline{\mathcal{O}_\mathbf{I}} \quad (6.2)$$

となるものが唯一存在する。特にこの対応によって

$$\mathfrak{P}(\chi) \Leftrightarrow \text{Irrrep} \mathbb{H}_\chi$$

という 1 対 1 対応が唯一に定まる。

Remark 6.2. **1)** Kazhdan-Lusztig は**一般の一変数** ($\mathbf{q}_s \equiv \mathbf{q}$) の affine Hecke 環について定理 6.1 の対応物 (Deligne-Langlands-Lusztig 予想という割といかめつい名前で呼ばれている) を示した。**2)** $\Psi(\chi) = \emptyset$ であるならばどんな $f \in S_\lambda$ と $w \in W_0$ に対しても $M(\chi)[w\chi]$ に f を制限して 0 になる事はない。このことはすなわち定理 6.1 が $\mathcal{H}$ に関する定理 2.3 の自然な一般化である事を示している。Kazhdan-Lusztig の結果は定理 2.3 の 1 変数版の自然な (あるいは正統的な) 一般化であると見る事ができる。

a -多重セグメントが $\mathfrak{g}^a$ の $G(a)$ -軌道全体の集合をラベル付けしていた事実を思い起こすと、結局次が分かる:

Corollary 6.3 (Deligne-Langlands 予想 (for $\mathcal{H}$)). (2.1) を満たす q を一つ固定する。この時 $\mathcal{H}/(\mathbf{q}-q)$ の既約表現は組 (s, X) であって

$$s \in G = GL(n) \text{ は半単純、} X \in \mathfrak{g} = \text{End}(V) \text{ は冪零元かつ } sXs^{-1} = qX$$

を満たすものの組 (s, X) (これを *Deligne-Langlands パラメタ* という) の G -共役類と 1 対 1 対応する。

Example 6.4 (例 5.8 の続き). 例 5.8 において $\mathfrak{P}(\chi)$ の元は 5 つである²⁴。しかし、特徴付けに用いた n の分割は 4 種類しかない。これは (6.2) で得られる軌道が $s_1, s_3 \in \Psi(\chi; (21^2))^\circ$ で異なる²⁵事と対応している。

²⁴具体的には $\{(q^2)(q)(q)(1)\}, \{(q^2, q)(q)(1)\}, \{(q^2)(q)(q, 1)\}, \{(q^2, q)(q, 1)\}, \{(q^2, q, 1)(q)\}$ の 5 種類。

²⁵ s_1 に対しては $\{(q^2)(q)(q, 1)\}$ で s_3 に対しては $\{(q^2, q)(q)(1)\}$ になる事が分かる。

Definition 6.5 (Kostka 数²⁶). n の分割 λ に対して Macdonald 表現 $L_\lambda \subset \mathbb{C}[t]$ から任意に微分して得られる多項式達が成す空間を $[L_\lambda]$ と表す。これは (微分が必ず次数を下げる事から) $\mathbb{C}[t]$ の有限次元 W_0 -部分表現となる。このとき任意の n の分割 μ に対して Kostka 数 $K_{\lambda,\mu}$ を

$$K_{\lambda,\mu} := \dim \operatorname{Hom}_{W_0}(L_\mu, [L_\lambda])$$

で定める²⁷。

Corollary 6.6 (Zelevinsky). a を $(\star)$ を満たす $G \times \mathbb{C}^\times$ の元として $\mathcal{M}(\mathbf{I})$ を a -多重セグメントに付随する標準加群とする。また $\lambda = \lambda(\mathbf{I})$ を $\{\#I_m\}_m$ の並べ替えで得られる n の分割とする。この時

$$[\mathcal{M}(\mathbf{I}) : \mathcal{L}_\mu]_{\mathbb{H}^0} = K_{\lambda,\mu}$$

が成立する。ここで $[M : L]_R$ は Artin 環 R の有限長 R -加群 M 中の単純 R -加群 L の重複度を表す。

Remark 6.7. A 型以外の場合には定理 6.1 の記述の多重セグメントが一般の $\mathfrak{g}^a$ の軌道 (これは通常より複雑になる) とその上の A -群データ²⁸ というものの組となる。また、その場合に系 6.6 中の Kostka 数はいわゆる Green 関数の特殊値に置き換わる²⁹。

Remark 6.8. $\mathbf{q}$ が小さな位数の 1 の冪根で作用するような $\mathbb{H}$ の既約表現の分類は A 型の場合以外では (現在でも) 完全ではない。

7 Springer fiber と標準表現

この節ではどのように定理 6.1 が幾何と繋がるのかという事について概略を述べる。

まず、標準表現や定理 3.2 の左辺を幾何学的に実現する事を考える。 $V = \mathbb{C}^n$ を $G = GL(V)$ のベクトル表現とする。この時 $GL(V)$ の (対角部分を含む) 上三角行列からなる部分群 B を考え、商空間 $B := G/B$ を考える。これは (smooth な) コンパクト複素多様体である事が知られている。

別の書き方をすれば

$$B \simeq \{\{0\} \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n = V; F_i \subset V \text{ は } \mathbb{C}\text{-線形部分空間で } \dim F_{i+1}/F_i = 1\}$$

²⁶ この Kostka 数は Young 図形を用いて定義されるものとも $GL(n)$ の既約表現を用いて定義されるものとも同じである。

²⁷ $[L_\lambda]$ には $\mathbb{C}[t]$ から誘導された次数構造が入るので

$$K_{\lambda,\mu}(t) := \sum_{m \geq 0} t^m \dim \operatorname{Hom}_{W_0}(L_\mu, [L_\lambda] \cap \mathbb{C}[t]_m)$$

とおく事で $K_{\lambda,\mu} = K_{\lambda,\mu}(1)$ となる多項式 $K_{\lambda,\mu}(t)$ が定義できる。これは Kostka 多項式と呼ばれ表現論的にはより重要な意味を持つ量である。

²⁸ $G(a)$ -軌道上の同変局所系であってしかるべき条件を満たすものの事。全ての単連結単純代数群を一度に考えると冪零錐の G -軌道上のすべての同変局所系は尖点的局所系から誘導される族に disjoint に分解される。しかるべき条件とは $G = \{1\}$ として $\mathfrak{g} = \{0\}$ 上の自明局所系から構成される族に属する局所系の制限として得られるというものである [Lu85]。

²⁹ 簡単に書く為にこうしたが、この言い方は誤解を招く可能性がある。つまり A 型の時にも Green 関数は定義され、それは $\mathfrak{S}_n$ の分割 μ から定まる共役類の元 w_μ を取って

$$G_{\lambda,\mu}(t) := \sum_{m \geq 0} t^m \operatorname{tr}(w_\mu; [L_\lambda] \cap \mathbb{C}[t]_m)$$

と書ける。これは共役類の値を見るか表現の重複度を見るかの問題なので Kostka 多項式と Green 関数は全体としては全く同じ情報を持っている。ここで Green 関数について述べたのは筆者が個人的に A 型以外の場合 Green 関数の存在はよく知られているが Kostka 多項式の存在は専門家以外にほぼ認知されていない様に感じている為である。

となっている。

一般に (smooth な) コンパクト複素多様体 $\mathcal{X}$ があるとその全コホモロジー空間 $H^\bullet(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ は環になる事が知られている。

Theorem 7.1 (Bott). 次の次数付き環としての環同型が存在する

$$H^\bullet(\mathcal{B}, \mathbb{C}) := \bigoplus_{m \geq 0} H^m(\mathcal{B}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{t}]/\mathbb{C}[\mathfrak{t}]\mathbb{C}[\mathfrak{t}]_+^{W_0}.$$

ここで、右辺は W_0 の作用を受けるが、それは左辺において $H^2(\mathcal{B}, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{t}^*$ の作用から (環構造で) 誘導される作用になる。

さて、 $T^*\mathcal{B} \cong \{(gB, X) \in \mathcal{B} \times \mathfrak{g}; X \in \text{Ad}(g)\mathfrak{n}\}$ という同型がある。これを用いると

$$\mu : T^*\mathcal{B} \ni (gB, X) \mapsto X \in \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$$

という写像が定義できる。幾何学的にはこの写像は $G \curvearrowright \mathcal{B}$ という作用の微分から定まる写像

$$\mathfrak{g} \longrightarrow T\mathcal{B}$$

の双対写像であると思える。

ここで $X \in \mathfrak{g}$ を冪零元とすると $\mu^{-1}(X)$ は $T^*\mathcal{B}$ の部分多様体であるが、ファイバー方向を固定しているためその射影 $T^*\mathcal{B} \ni (gB, X) \mapsto gB \in \mathcal{B}$ による像と同型になる。この像を $\mathcal{B}_X$ と書き X の Springer fiber と呼ぶ。

さて、 L_λ の元は W_0 -調和多項式³⁰であった。すると $[L_\lambda]$ の元も全て調和多項式になる。

Theorem 7.2 (Kostant). $\mathfrak{h} \subset \mathbb{C}[\mathfrak{t}]$ を W_0 -調和多項式の空間とする。このとき

$$\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{t}]^{W_0} \cong \mathbb{C}[\mathfrak{t}]$$

という積から誘導される自然な W_0 -表現としての同型が存在する。

定理から特に

$$\mathbb{C}[\mathfrak{t}]/\mathbb{C}[\mathfrak{t}]\mathbb{C}[\mathfrak{t}]_+^{W_0} \cong \mathfrak{h} \longrightarrow [L_\lambda]$$

という次数付き W_0 -加群としての全射が存在する事が分かる。

Theorem 7.3 (Springer, 堀田-Springer, Lusztig). 任意の n の分割 λ に対して λ を *Jordan* 細胞の型とする冪零元 X を取る。そのとき自然な埋め込みに関する引き戻し

$$H^\bullet(\mathcal{B}, \mathbb{C}) \rightarrow H^\bullet(\mathcal{B}_X, \mathbb{C})$$

は全射である³¹。さらにこの射は核が W_0 -不変となり、

$$H^\bullet(\mathcal{B}_X, \mathbb{C}) \cong [L_\lambda]$$

という次数付き W_0 加群の間の同型を誘導する³²。

³⁰ 任意の $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{t}^*]_+^{W_0}$ の元を自然な pairing $\mathfrak{t} \otimes \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて $\mathfrak{t}$ 上の (W_0 -不変) 定数係数微分作用素 (で定数項が 0 のもの) と思ったときに $fL_\lambda = 0$ となる事。

³¹ X を G の作用で動かしても G が連結なのでホモトピー同値になり、写像としては変わらない事に注意

³² この定理を一般の代数群 G に $\mathfrak{g}$ を用いて拡張する事は可能であるとは思われているが (証明がある訳ではない)、定式化を変更して A -群と呼ばれるものを導入する必要がある事が知られている。しかし何故か $G = Sp(2n, \mathbb{C})$ で $\mathfrak{g}$ の冪零錐の代わりに exotic 冪零錐と呼ぶ事を我々が提案しているもの (でも BC 型冪零錐も捨てがたい...) を用いるとそのような再定式化は必要ないと考えられている (定理 9.3 を参照)。

Remark 7.4. 定理 7.3 は例えば次の様な事を含んでいる。1) $H^0(\mathcal{B}_X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ より $\mathcal{B}_X$ は常に連結である。2) $H^{2 \dim \mathcal{B}_X}(\mathcal{B}_X, \mathbb{C}) \cong L_\lambda$ より $\mathcal{B}_X$ は $\dim L_\lambda$ 個の既約成分を持つ³³。つまり $\mathcal{B}_X$ は一般には smooth ではない。3) もしも $\lambda = (n)$ ならば $[L_\lambda] = \mathbb{C}$ である。この事はこの時 $\mathcal{B}_X$ が 1 点である事を示している。

Example 7.5 (副正則軌道³⁴($\mathfrak{gl}(3)$ の場合)). $\mathfrak{gl}(3)$ の旗多様体は $\{\{0\} \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \mathbb{C}^3\}$ である。また任意の冪零元 $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathcal{B}_X \cong \{(F_1, F_2) \in \mathcal{B}; XF_i \subset F_{i-1}, \forall i\}$ が成立する。ここで、 $\lambda = (21)$ として対応する元 X が $\{F_1 \subset F_2\}$ を保つ為には

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ として } F_1 \subset \begin{pmatrix} \mathbb{C} \\ 0 \\ \mathbb{C} \end{pmatrix} \text{ と } XF_2 \subset F_2 \Leftrightarrow$$

$$\text{a) } F_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{C} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_1 \subset \forall F_2 \subset \mathbb{C}^3, \text{ または b) } F_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{C} \\ 0 \\ \mathbb{C} \end{pmatrix}, \forall F_1 \subset F_2$$

が条件となる。ここで、a) も b) も異なる $\mathbb{P}^1$ を定め、共通部分は a) から F_1 を、b) から F_2 を取ってきて構成できる点 p である。すなわち

$$\mathcal{B}_X \cong \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1, \quad \text{二つの } \mathbb{P}^1 \text{ の共通部分は 1 点}$$

となる。この時

$$H^2(\mathcal{B}_X) \cong \mathbb{C}^2, H^1(\mathcal{B}_X) \cong \{0\}, H^0(\mathcal{B}_X) \cong \mathbb{C}$$

は容易に分かる。さらに、

$$H^2(\mathcal{B}) \cong (\text{Lie}(SL(3, \mathbb{C}) \cap T))^*$$

である事から $H^2(\mathcal{B}_X) \cong \text{ref}$ が $W_0 \cong \mathfrak{S}_3$ 表現として成立する事が分かる。

以上の準備の下で標準表現の幾何学化について述べる事ができる。

Theorem 7.6 (Ginzburg, Lusztig). $\chi \in G \times \mathbb{C}^\times$ を $(\star)$ を満たす元とする。適当に χ の共役を取り $a = (s, q) \in T \times \mathbb{C}^\times$ とおく。この時、ある $\mathbf{I} \in \mathfrak{P}(a)$ に対して $X \in \mathcal{O}_{\mathbf{I}} \subset \mathfrak{g}^a$ であるならば $\mathcal{B}_X$ には s が作用する。そして $\mathcal{B}_X$ の s 固定点 $\mathcal{B}_X^s$ を取ると

$$H^\bullet(\mathcal{B}_X^s, \mathbb{C})^* \cong \mathcal{M}(\mathbf{I})$$

を満たす³⁵様な左辺への $\mathcal{H}$ -加群構造が写像

$$H^\bullet(\mathcal{B}_X^s, \mathbb{C})^* \rightarrow H^\bullet(\mathcal{B}_0^s, \mathbb{C})^* \cong M(\chi)$$

と可換になるように存在する³⁶。 λ を $\{\#I_m\}_m$ を並べ替えてできる分割とするとこの対応で Σ_λ は (可逆元を除いて) ある $\mathcal{B}_X$ の既約成分の s -固定点の表すコホモロジー類となる。

³³ $\dim \mathcal{B}_X$ は複素多様体としての次元であり、特に位相多様体としての $\mathcal{B}_X$ の次元の 2 倍に一致する

³⁴ 単純代数群の Lie 環には “2 番目に大きい冪零軌道” が唯一定まり、それを副正則軌道という。ADE 型の場合は横断片を取る事で Klein 型特異点の特異ファイバーが出てくる。つまり表現論的にはいわゆる 2 次元の McKay 対応に出てくる特異点の特異ファイバー (の H^2) は Weyl 群の鏡映表現である。

³⁵ 本当はここは K -群か Borel-Moore ホモロジーとすべきなのであるが、一度に多くの (表現論的設定では) 微妙にしか異なる複数のホモロジー群を導入するのは憚られた為にベクトル空間としての双対をつけてごまかしている。”正しい”と考えられる対象と定数倍を除いて同型なので許して欲しい。

³⁶ $0 \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ だが、 $M(\chi)$ と比較すべきなのは前者と考えられる。

Remark 7.7. 定理 7.6 はしばしば Lusztig 達による affine Hecke 環の (同変 K 理論を用いた) 幾何学的実現の系として直接従うかの様に語られる事があるが、それは正しいとは言えない³⁷。

8 標準加群と単純加群

我々は affine Hecke 環 $\mathcal{H}$ の標準加群とその中での単純加群の特徴付けを見た。しかしながら上で見た特徴付けは単純加群の指標を完全に決定するという観点からみると不十分である。その事を見る為に問題を整理しよう。 $a \in G \times \mathbb{C}^\times$ を $(\star)$ を満たす元とする。行と列がともに $\mathfrak{P}(a)$ によってラベル付けされている (すなわち抽象的には大きさ $\#\mathfrak{P}(a)$ の) 行列

$$M_{i,j} := ([\mathcal{M}(\mathbf{I}) : \mathcal{L}(\mathbf{I}')]_{\mathcal{H}})_{(\mathbf{I}, \mathbf{I}') \in \mathfrak{P}(a)^2}$$

を考える。そして行と列の順番付けを全単射

$$\psi : \{\mathfrak{g}^a \text{ の } G(a)\text{-軌道}\} \Leftrightarrow [1, \#\mathfrak{P}(a)] \subset \mathbb{N}$$

であって $\mathcal{O}_{\mathbf{I}} \subset \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{I}'}}$ であればかならず $\psi(\mathbf{I}) \leq \psi(\mathbf{I}')$ となるようなものとする。このとき定理 4.6 と系 5.6 の主張は

$$M_{i,i} = 1 \quad \forall i, \quad M_{i,j} = 0 \quad \forall i < j$$

が成立するというものであった。しかし、当然の事ではあるがこれでは行列 M が決まった事にはならない³⁹。ここでは、籠の幾何学をもう少し深く使う事を考える。 $\mathbf{I}, \mathbf{I}' \in \mathfrak{P}(a)$ が $\mathcal{O}_{\mathbf{I}} \subset \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{I}'}}$ を満たす時 $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{I}'}}$ が $\mathcal{O}_{\mathbf{I}}$ で smooth であるとは $x \in \mathcal{O}_{\mathbf{I}}$ における $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{I}'}}$ の接線のなす空間が $\dim \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{I}'}}$ と同じ次元の affine 平面になることと定める。すると

Theorem 8.1 (Zelevinsky). $\mathbf{I}, \mathbf{I}' \in \mathfrak{P}(a)$ に対して $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{I}'}}$ が $\mathcal{O}_{\mathbf{I}}$ で smooth であれば

$$M_{\psi(\mathbf{I}), \psi(\mathbf{I}')} = 1$$

が成立する。

Theorem 8.2 (Abeasis-Del Fra-Kraft). $\mathbf{I}, \mathbf{I}' \in \mathfrak{P}(a)$ に対して $\mathcal{O}_{\mathbf{I}} \subset \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{I}'}}$ かつ $\dim \mathcal{O}_{\mathbf{I}} = \dim \mathcal{O}_{\mathbf{I}'} - 1$ が成立すれば $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{I}'}}$ は $\mathcal{O}_{\mathbf{I}}$ で smooth である。

上の 2 つの定理は $\mathfrak{g}^a$ の幾何学は行列 M と関係がある事を示している。これは一般的な事実であるが、このままではその証明は全く分からない。現在知られている証明はいわゆる荒川-鈴木関手を用いるもの [AS98] と深い幾何学的構成をもちいるものの 2 とおりである。後者の事実を用いると例えばどのようなご利益があるのかについてざっと述べてこの論説の A 型に関する部分を終わりにしたい。

1 の冪根ではない q を固定して、 $\mathbb{C}^\times$ 中の $q^{\mathbb{Z}}$ -軌道、すなわち

$$\dots, q^{-6631}\gamma, \dots, \gamma, q\gamma, q^2\gamma, \dots, q^{9471}\gamma, \dots$$

³⁷ その理由としては Springer fiber を用いた幾何学的標準表現が (例えば実際に代数的対応物がある場合においても) 実際に正しい標準表現を与えているのかが不明瞭な事、などが挙げられる。技術的にはより弱く各幾何学的標準表現が他のより小さい³⁸幾何学的標準表現に既に含まれてはいない表現を持つ事を示せば十分であるが、それも自明とは言えない。定理 6.1 は他のより大きい軌道に対応する Springer fiber のホモロジーに含まれないホモロジー類達として S_λ を取ってこの部分を書き換えたものである。この書き換えの土台には対応する Springer 表現を十分理解すれば affine Hecke 環の表現論は十分に分かるのだという [Lu95b] の構成が背景にある。

³⁹ 我々は $M(\chi)$ の $\mathbb{H}^0$ -組成因子、 $\mathcal{A}[X^*]$ -広義固有空間を知っているなのでこの行列の係数に大きな制限を加える事はできる。しかし依然として一意に定めるには (一般には) 十分でない。

という格好の適当な無限列⁴⁰ S を固定する。SSS で $s \in GL(n)$ の固有値が皆 S に属するような半単純元 s の集合を表す。そして

$$\mathcal{H}_n\text{-mod}_S := \bigsqcup_{s \in \text{SSS}} \{ \mathcal{H}_{(s,q)} \text{ の表現のなすアーベル圏} \}$$

とおく。ここで上は $\mathcal{H}_n\text{-mod}_S$ の対象は右辺のどれかの成分のもので、異なる成分の間の射が無いという様に構成した圏という意味である。

$$K_S := \bigoplus_{n \geq 0} K(\mathcal{H}_n\text{-mod}_S) \otimes \mathbb{C}$$

とおく。ここで $K(\mathcal{H}_n\text{-mod}_S)$ は圏 $\mathcal{H}_n\text{-mod}_S$ の Grothendieck 群⁴¹ である。

$\mathfrak{gl}_\infty$ という無限次元 Lie 環を考えてその上三角部分 $\mathfrak{n}_\infty$ を考える。その普遍包絡環 $U(\mathfrak{n}_\infty)$ は v -類似 $U_v(\mathfrak{n}_\infty)$ を持つ⁴²。

Theorem 8.3 (有木). 次の同型が存在する

$$K_S \cong U_v(\mathfrak{n}_\infty).$$

さらに、この同型を通じて行列 M は柏原の意味の *upper* 大域基底⁴³ と *Poincare-Birkhoff-Witt* 基底⁴⁴ との間の変換行列として解釈できる。

Remark 8.4. 1) [Ar96, 上智] では q を 1 の ℓ 乗根として対応する量子群が affine Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}_\ell}$ に置き換わっているが証明は全く同じである。2) Zelevinsky は M の係数が放物型 Kazhdan-Lusztig 多項式と呼ばれるものである事を示した。特に定理 8.3 は放物型 Kazhdan-Lusztig 多項式の計算を行う上でも有効である。

9 古典型への一般化

§2 以降はずっと $\mathcal{H}$ が A 型である事を用いた。この節では古典型の affine Hecke 環を扱うにはいまままで書いてきた構成をどのように変えれば良いかという事を [Ka06] に従って簡単に述べる。

次の事実に注意する:

Theorem 9.1 (Folklore⁴⁵). 古典型の affine Hecke 環 $\mathbb{H}(X)$ ($X = A_1, B_n, C_n, D_n$) は $\mathbb{H}(C_n)$ であるかその適当なパラメータの特殊化に埋め込める。

定理 9.1 は $\mathbb{H}(C_n)$ の既約表現の分類が分かると Clifford 理論などを用いる事で他の 2 種類の古典型 affine Hecke 環の既約表現の分類がほぼ分かる事を意味している⁴⁶。

⁴⁰賢い読者の方は既にお気づきと思うが、 $-6631, 9471$ といった数字に特に意味がある訳ではない。

⁴¹一般に圏 $\mathcal{C}$ の Grothendieck 群とは単純対象を基底とする自由アーベル群の事。例えば $\mathcal{C}$ が群 H の表現の圏であれば $K(\mathcal{C})$ は H の表現環から積 (これはテンソル積から定まったものなので一般の圏には存在しない) の構造を忘れたもの

⁴²量子群の上三角部分の極限、 v と q とは同じ

⁴³いわゆる結晶基底の持ち上げ

⁴⁴通常の普遍包絡環の PBW 基底の類似物

⁴⁵意味としてはこの結果は大抵の人が自分で”発見”するので出典を挙げるのは難しいという事。こういう名前の数学者がいる訳ではない (調べた事がないので実はいるのかもしれないが…)

⁴⁶ A_1, B_n の場合は直ちに分かる。 D_n 型の場合には若干議論が必要になる。

従って古典型 affine Hecke 環の既約表現を理解する為には概ね $\mathbb{H}(\mathbb{C}_n)$ を理解すれば良い事になる。これに関する系 6.3 は定理 7.3 および定理 7.6 の弱い形と共に [Ka06] で示された。そこでは定理 1.3 や定理 2.3 で丁度係数がたくさん出てくる最も複雑な場合を扱う必要が出てくる。そして定理 6.1 が定理 2.3 の 1 変数版の拡張であると同様の意味で定理 2.3 の拡張版が我々の記述を与えている⁴⁷。

その時鍵となった事実はよく知られた次の定理 9.2 の類似である定理 9.3 である:

Theorem 9.2 (Jordan, Frobenius). $\mathfrak{gl}(n)$ の冪零元全体の集合を $\mathcal{N}$ と書く。この時、 $GL(n)$ 作用による共役作用によって

$$\mathrm{Ad} \, GL(n) \backslash \mathcal{N} \Leftrightarrow \{n \text{ の分割} \} \Leftrightarrow \mathrm{Irrep} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$$

という全単射が存在する。

Theorem 9.3 ([Ka06] Theorem 1.14). $G = Sp(2n)$ として V_1 をそのベクトル表現、 $V_2 := \wedge^2 V_1$ とおく。この時 $\mathbb{V} := V_1 \oplus V_2$ の冪零元を

$$(x, y) \in \mathbb{V} \text{ が冪零} \Leftrightarrow y \in \wedge^2 V_1 \cong \mathrm{Alt}(V_1) \xrightarrow{\omega} \mathrm{End}(V_1) \text{ が冪零}$$

と定める。但しここで ω は G を定める V_1 上の *symplectic form* を右から掛ける写像。 $\mathbb{V}$ の冪零元全体を $\mathfrak{N}$ と記すと $\mathbb{V}$ への作用から誘導される G の作用がある。このとき

$$\mathrm{Ad} G \backslash \mathfrak{N} \Leftrightarrow \{n \text{ の 2 重分割} \} \Leftrightarrow \mathrm{Irrep} \mathbb{C}[W_0]$$

という 1 対 1 対応がある⁴⁸。

定理 9.2 および定理 9.3 の類似は一般の単純代数群とその Lie 環の冪零元集合では成立しない。そしてこの事が A 型以外の Deligne-Langlands 予想に A-群データによる修正が必要だった理由である。

[Ka08] では §3 の Macdonald 表現の類似物がこの場合でも幾何学的に自然なものである事が示されている⁴⁹。また、定理 8.3 の類似についても榎本直也、柏原正樹両氏による研究が進行中である [EK08, En08]。

参考文献

- [Ar96] 有木進, On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$. J. Math. Kyoto Univ. 36 (1996), no. 4, 789–808.
- [上智] 有木進, $A_{(r-1)}^{(1)}$ 型量子群の表現論と組み合わせ論, 上智大学数学講究録, (2000)
- [AS98] 荒川知幸・鈴木武史, Duality between $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ and the degenerate affine Hecke algebra. J. Algebra 209 (1998), no. 1, 288–304.
- [ABG] Sergey Arkhipov, Roman Bezrukavnikov, and Victor Ginzburg, Quantum groups, the loop Grassmannian, and the Springer resolution. J. Amer. Math. Soc. 17 (2004), no. 3, 595–678
- [Be06] Roman Bezrukavnikov, Noncommutative Counterparts of the Springer Resolution, (ICM address) math.RT/0604445
- [BMR] Roman Bezrukavnikov, Ivan Mirković, and Dmitriy Rumynin, Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic. Ann. of Math. (2) 167 (2008), no. 3, 945–991.
- [Bo76] Armand Borel, Admissible representations of a semisimple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup, Invent. Math. 35 (1976), 233–259.

⁴⁷ただし現段階では生成元 $\Sigma(\mathbf{I})$ に対応するものがきちんと定まっている訳ではない。

⁴⁸ n の 2 重分割とは分割の順序づけられたペア (λ, μ) でそれらの総和が n になるものの事。

⁴⁹一般の型では Macdonald 表現は W_0 の既約表現を尽くさない

- [En08] 榎本直也, A quiver construction of symmetric crystals, preprint.
- [EFM] Pavel Etingof, Rebecca Freund, Xiaoguang Ma, A Lie-theoretic construction of representations of the degenerate affine and double affine Hecke algebras of type BC_n arXiv:0810.0791v1
- [EK08] 榎本直也・柏原正樹, Symmetric Crystals for $\mathfrak{gl}_\infty$, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 44, no. 3 (2008), 837–891
- [CG97] Neil Chriss and Victor Ginzburg, Representation theory and complex geometry. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997. x+495 pp. ISBN 0-8176-3792-3
- [CT0x] Dan Ciubotaru, and Peter Trapa, in preparation.
- [HT95] 堀田良之・谷崎俊之, $\mathcal{D}$ -加群と代数群, Springer-Verlag (1995).
- [IM65] 岩堀長慶・松本英也, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p -adic Chevalley groups. IHES Publ. Math. No. 25 (1965) 5–48.
- [Ka81] 加藤信一, Irreducibility of principal series representations for Hecke algebras of affine type, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 28 (1981), no. 3, 929–943 (1982).
- [Ka06] 加藤周, An exotic Deligne-Langlands correspondence for symplectic groups, math.RT/0601155v6, 51pp, to appear in Duke Math.
- [Ka08] 加藤周, Deformations of nilpotent cones and Springer correspondences, arXiv.0801.3707v3, 28pp, submitted.
- [KT95] 柏原正樹・谷崎俊之, Kazhdan-Lusztig 予想について, 数学 47 (1995), no.3 269–285.
- [KL87] David Kazhdan and George Lusztig, Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras, Invent. Math. 87 (1987), no. 1, 153–215.
- [Lu85] George Lusztig, Intersection cohomology complexes on a reductive group, Invent. Math. 75 (1984), no. 2, 205–272.
- [Lu88] George Lusztig, Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. I, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **67**, (1988), 145–202.
- [Lu89] George Lusztig, Affine Hecke algebras and their graded version, J. Amer. Math. Soc. **2**, (1989), no.3, 599–635.
- [Lu95a] George Lusztig, Classification of unipotent representations of simple p -adic groups. Internat. Math. Res. Notices 1995, no. 11, 517–589.
- [Lu95b] George Lusztig, Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. II, Representations of groups (Banff, AB, 1994), CMS Conf. Proc., **16**, 217–275. (1995)
- [Lu95c] George Lusztig, Study of perverse sheaves arising from graded Lie algebras. Adv. Math. 112 (1995), no. 2, 147–217.
- [LS85] George Lusztig and Nicholas Spaltenstein, On the generalized Springer correspondence for classical groups, Advanced Studies in Pure Mathematics 6 (1985), 289–316.
- [Ma77] 松本英也, Analyse harmonique dans les systemes de Tits bornologiques de type affine, Springer Lecture Note in Math. 590 (1977).
- [OS08] Eric Opdam, and Maarten Solleveld, Discrete series characters for affine Hecke algebras and their formal degrees, arXiv:0804.0026
- [RIMS] 柏原正樹編, "Lusztig Program", 数理解析研究所講究録 No. 954 (1996)
- [BZ77] Joseph Bernstein, and Andrei Zelevinsky, Induced representations of reductive p -adic groups. I. Ann. Scient. de l'É.N.S. (4) 10 (1977), no. 4, 441–472.
- [Ze80] Andrei Zelevinsky, Induced representations of reductive p -adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$, Ann. Scient. de l'É.N.S., vol. 13, no. 2 (1980), 165–210.