

テンソル代数の拡張とその immanant への応用

(Extensions of the tensor algebra and their application to immanants)

伊藤稔 (鹿児島大学)

Minoru ITOH (Kagoshima University)

INTRODUCTION

テンソル代数を自然に拡張した代数を構成した. この代数とその応用について述べる. 通常のテンソル代数 $T(V)$ は次のベクトル空間 $\bar{T}(V)$ の部分空間と見なせる:

$$\bar{T}(V) = \bigoplus_{p \geq 0} V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \mathbb{C}S_\infty.$$

テンソル代数の積は自然にこの $\bar{T}(V)$ に拡張でき, この積で $\bar{T}(V)$ は結合的な次数つき代数となる. この代数 $\bar{T}(V)$ 上には正準交換関係の類似をみたす「掛け算作用素」と「微分作用素」が自然に考えられる. $\bar{T}(V)$ を Boson Fock 空間や Fermion Fock 空間の類似と思つて, これらの作用素を「生成作用素」「消滅作用素」と呼ぶのも自然である. これらから生成される作用素のなす代数は, Weyl 代数や Clifford 代数の類似とみなせる (同時に商代数としてこれらを含む). またこの作用素の代数は次のベクトル空間と自然に同一視できる:

$$\bigoplus_{p, q \geq 0} V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \mathbb{C}S_\infty \otimes_{\mathbb{C}S_q} V^{*\otimes q}.$$

この代数と作用素にはいろいろな応用があるが, 本稿では immanant という行列の関数への応用について述べる. これは特に quantum immanant (と呼ばれる普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心のベクトル空間としての基底) に応用したときに, 威力を発揮する. 実際にこの枠組みを利用して quantum immanant の様々な表示の同一性や higher Capelli identity と呼ばれる Capelli 型の恒等式を簡潔に証明することができる.

1. $\bar{T}(V)$ の定義

まず, 代数 $\bar{T}(V)$ を定義しよう. 簡単に言うと, 通常のテンソル代数の各斉次部分を無限対称群の表現になるように誘導したものである.

V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間とする. テンソル代数 $T(V)$ の斉次部分 $T_p(V) = V^{\otimes p}$ には対称群 S_p の自然な右作用が考えられる:

$$v_p \cdots v_1 \sigma = v_{\sigma(p)} \cdots v_{\sigma(1)}.$$

ここでテンソル積の記号“ $\otimes$ ”は省略している．この表現を無限対称群 S_∞ の表現に誘導したものを $\bar{T}_p(V)$ とする（ただし無限対称群 S_∞ は有限対称群の自然な列 $S_1 \subset S_2 \subset \dots$ の帰納的極限である）．すなわち，

$$\bar{T}_p(V) = V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \mathbb{C}S_\infty = \text{Ind}_{\mathbb{C}S_p}^{\mathbb{C}S_\infty} V^{\otimes p}$$

とおく．ただし，今述べた作用で $V^{\otimes p}$ を右 $\mathbb{C}S_p$ 加群と見なし，また S_∞ の群環 $\mathbb{C}S_\infty$ を左からの掛け算で左 $\mathbb{C}S_p$ 加群と見なししている．そしてこれら $\bar{T}_0(V), \bar{T}_1(V), \dots$ の直和

$$\bar{T}(V) = \bigoplus_{p \geq 0} \bar{T}_p(V)$$

を考える（ $p=0$ のときは $\bar{T}_0(V) = \mathbb{C}S_\infty$ と定める）．

このベクトル空間 $\bar{T}(V)$ に積の構造を入れよう．二つの元

$$x = v_p \cdots v_1 \sigma \in \bar{T}_p(V), \quad y = w_q \cdots w_1 \tau \in \bar{T}_q(V)$$

に対して，その積 $x \cdot y$ を

$$x \cdot y = (v_p \cdots v_1 \sigma) \cdot (w_q \cdots w_1 \tau) = v_p \cdots v_1 \cdot w_q \cdots w_1 \cdot \alpha^q(\sigma) \tau \in \bar{T}_{p+q}(V)$$

と定めて，これを双線型になるように $\bar{T}(V) \times \bar{T}(V)$ に拡張する．ここで α は $s_i \mapsto s_{i+1}$ という対応で決まる S_∞ の群自己準同型である（ただし $s_i = (i \ i+1)$ とする）．するとこの積に関して $\bar{T}(V)$ は結合的な次数つき代数になる．

今，テンソル代数の斉次部分を S_∞ が作用するくらいに大きく拡張したが，もう少し小規模な拡張を考えよう．すなわち 0 以上の整数 q に対して

$$T_p^{(q)}(V) = V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \mathbb{C}S_{p+q} \simeq \text{Ind}_{\mathbb{C}S_p}^{\mathbb{C}S_{p+q}} V^{\otimes p}$$

という $\bar{T}_p(V)$ の部分空間を考える（ただし $T_0^{(q)}(V)$ は $T_0^{(q)}(V) = \mathbb{C}S_q$ と定める）．するとこれらの直和

$$T^{(q)}(V) = \bigoplus_{p \geq 0} T_p^{(q)}(V)$$

は $\bar{T}(V)$ の部分代数になる．特に $T^{(0)}(V)$ も部分代数になるが，これは通常のテンソル代数 $T(V)$ と自然に同一視できる． $\bar{T}(V)$ は次の列の帰納的極限とも見なせる：

$$T(V) \simeq T^{(0)}(V) \subset T^{(1)}(V) \subset T^{(2)}(V) \subset \dots$$

通常のテンソル代数を含むこの大きな代数 $\bar{T}(V)$ が本稿の主役である．

代数 $\bar{T}(V)$ は次のような生成元と関係式を用いて定義することもできる（ $e_1, \dots, e_n$ が V の基底， $s_1, s_2, \dots$ が S_∞ の生成元にあたる）：

$$\text{生成元: } e_1, \dots, e_n, s_1, s_2, \dots$$

$$\begin{aligned} \text{関係式: } e_a e_b &= e_b e_a s_1, & s_i e_a &= e_a s_{i+1}, \\ s_i^2 &= 1, & s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1}, & s_i s_j &= s_j s_i \text{ when } |i - j| > 1. \end{aligned}$$

2. 掛け算作用素と微分作用素

代数 $\bar{T}(V)$ において, 正準交換関係の類似をみたす 2 系列の作用素が自然に考えられる. それぞれを「掛け算作用素」と「微分作用素」と呼ぶことにする.

まず掛け算作用素を説明しよう. 代数 $\bar{T}(V)$ の元 x を固定してこれを「左から掛ける」という写像を考える. この「 x による掛け算作用素」を $L(x)$ という記号で表そう:

$$L(x): \bar{T}(V) \rightarrow \bar{T}(V), y \mapsto xy.$$

特に $x = v \in V \subset \bar{T}(V)$ の場合と, $x = \sigma \in S_\infty \subset \mathbb{C}S_\infty = \bar{T}_0(V)$ の場合が基本的である.

次に V^* を V の双対空間として, $v^* \in V^*$ に対応する線型作用素 $L(v^*): \bar{T}(V) \rightarrow \bar{T}(V)$ を次のように定める.

$$L(v^*): v_p \cdots v_1 \sigma \mapsto \sum_{k=1}^p \langle v^*, v_k \rangle v_p \cdots \hat{v}_k \cdots v_1 \cdot (p \ p-1 \ \cdots \ k+1 \ k) \sigma.$$

ここで $v_p, \dots, v_1$ は V の元, σ は S_∞ の元とする. また $\hat{v}_k$ は v_k を省くことを意味する. この定義式は, 和の各項を「 v_k を左端に移動して v^* とカップリングしたもの」と思えば自然である. $(p \ p-1 \ \cdots \ k+1 \ k)$ という置換は v_k の左端への移動に伴って現れるのである.

この定義は well defined であり, 特にそのことから $L(v^*)$ は右からの S_∞ の自然な作用と可換になることがわかる. この $L(v^*)$ を「 v^* による微分作用素」と呼ぶことにする.

この微分作用素 $L(v^*)$ と $v \in V$ による掛け算作用素 $L(v)$ に注目しよう. これらの像や交換関係に関して次が成り立つ:

命題 2.1. これらの作用素は $T_p^{(q)}(V)$ に制限すると像は次のような空間に収まる:

$$\begin{aligned} L(v): T_p^{(q)}(V) &\rightarrow T_{p+1}^{(q-1)}(V) \text{ for } q \geq 1, \\ T_p^{(0)}(V) &\rightarrow T_{p+1}^{(0)}(V), \\ L(v^*): T_p^{(q)}(V) &\rightarrow T_{p-1}^{(q+1)}(V) \text{ for } p \geq 1, \\ T_0^{(q)}(V) &\rightarrow \{0\}. \end{aligned}$$

特に $L(v)$ は次数を一つ上げ, $L(v^*)$ は次数を一つ下げる.

命題 2.2. 次の交換関係が成立する:

$$\begin{aligned} L(v)L(w) &= L(w)L(v)L(s_1), \\ L(v^*)L(w^*) &= L(s_1)L(w^*)L(v^*), \\ L(v^*)L(w) &= L(w)L(s_1)L(v^*) + \langle v^*, w \rangle. \end{aligned}$$

この交換関係は正準交換関係 (canonical commutation relation) や正準反交換関係 (canonical anticommutation relation) の類似と見なせる. 正確にはこれらを含むと言ってよい (実際 $\sigma \mapsto 1$ もしくは $\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$ とすることで正準交換関係や正準反交換関係になる). $\bar{T}(V)$ を Boson Fock 空間や Fermion Fock 空間の類似と見なして, $L(v)$ と $L(v^*)$ を「生成作用素」「消滅作用素」と呼ぶのも自然である.

3. テンソル空間上の線型変換の記述

掛け算作用素 $L(v)$ と微分作用素 $L(v^*)$ はテンソル空間の上の基本的な線型変換を記述するのに役立つ.

一般線型群 $GL(V)$ は自然に $T(V)$, $\bar{T}(V)$ に作用する. これから決まる $\mathfrak{gl}(V)$ の $T(V)$, $\bar{T}(V)$ への作用 π は掛け算作用素と微分作用素を用いて次のように表される:

$$\pi(E_{ij}) = L(e_i)L(e_j^*).$$

ただし $e_1, \dots, e_n$ は V の基底, $e_1^*, \dots, e_n^*$ はその双対基底とする. また E_{ij} は $\mathfrak{gl}(V)$ の標準的な基底とする. $L(e_j^*)$ 自体は $T(V)$ 上の線型変換ではないが, 命題 2.1 からわかるように $L(e_i)L(e_j^*)$ は $T(V)$ 上の線型変換となる.

次のような Euler 作用素の類似を考えるのも面白い:

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n L(e_i)L(e_i^*).$$

これを任意の $x \in \bar{T}_p(V)$ に作用させると $\mathcal{E}x = px$ という等式が成立する.

このような線型変換の表示は, テンソル代数と関連した表現論や不変式論に応用できる. 例えばこの枠組みを用いて Schur–Weyl 双対性を証明したり, その一般化を記述したりできる. これらの掛け算作用素や微分作用素に関しては Capelli 型の恒等式も考えられ, これを利用してある不変式環の生成元の記述を行うこともできる.

4. さらに大きな代数

$\mathcal{D}(\bar{T}(V))$ を $L(v)$, $L(v^*)$, $L(\sigma)$ という形の作用素から生成される $\text{End}(\bar{T}(V))$ の部分代数とする (ただし $v \in V$, $v^* \in V^*$, $\sigma \in S_\infty$ とする). これは Weyl 代数や Clifford 代数の類

似と見なせる. また同時にこれらを商代数として含む:

$$\mathcal{D}(\bar{T}(V))/(\sigma - 1) \simeq \text{Weyl}(V^* \oplus V),$$

$$\mathcal{D}(\bar{T}(V))/(\sigma - \text{sgn}(\sigma)) \simeq \text{Clifford}(V^* \oplus V).$$

ただし $(\sigma - 1)$ と $(\sigma - \text{sgn}(\sigma))$ は $\{\sigma - 1 \mid \sigma \in S_\infty\}$ と $\{\sigma - \text{sgn}(\sigma) \mid \sigma \in S_\infty\}$ から生成される $\mathcal{D}(\bar{T}(V))$ の両側イデアルである.

この代数 $\mathcal{D}(\bar{T}(V))$ はまた次のベクトル空間と自然に同一視できる:

$$\bigoplus_{p,q \geq 0} V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \mathbb{C}S_\infty \otimes_{\mathbb{C}S_q} V^{*\otimes q}.$$

さらに $\mathcal{D}(\bar{T}(V))$ は次の生成元と関係式で定義することもできる.

生成元: $e_1, \dots, e_n, e_1^*, \dots, e_n^*, s_1, s_2, \dots$

関係式: $e_a e_b = e_b e_a s_1, \quad e_a^* e_b^* = s_1 e_b^* e_a^*, \quad e_a^* e_b = e_b s_1 e_a^* + \delta_{ab},$

$$s_i e_a = e_a s_{i+1}, \quad e_a^* s_i = s_{i+1} e_a^*,$$

$$s_i^2 = 1, \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \quad s_i s_j = s_j s_i \text{ when } |i - j| > 1.$$

$e_1, \dots, e_n$ と $e_1^*, \dots, e_n^*$ をそれぞれ V の基底, V^* の双対基底と見なして, $L(e_i), L(e_i^*), L(s_i)$ を単に e_i, e_i^*, s_i と略記すれば対応がつく.

これを見ると, 次の生成元と関係式で定義される代数を考えるのも自然である:

生成元: $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n, s_1, s_2, \dots$

関係式: $e_a e_b = e_b e_a s_1, \quad f_a f_b = s_1 f_b f_a, \quad f_a e_b = e_b s_1 f_a + c_{ab},$

$$s_i e_a = e_a s_{i+1}, \quad f_a s_i = s_{i+1} f_a,$$

$$s_i^2 = 1, \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \quad s_i s_j = s_j s_i \text{ when } |i - j| > 1.$$

これは複素数 c_{ab} ($1 \leq a \leq m, 1 \leq b \leq n$) をパラメータとする代数である. $e_1, \dots, e_m$ および $f_1, \dots, f_n$ をベクトル空間 V と W の基底と見なすと c_{ab} は $W \times V$ 上の双線型形式と対応する. そしてこの代数は

$$\bigoplus_{p,q \geq 0} V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \mathbb{C}S_\infty \otimes_{\mathbb{C}S_q} W^{*\otimes q}$$

に積の構造を入れたものとも見なせる. この代数を $\bar{T}'(V, W)$ と書くことにする. そして $W \times V$ 上の双線型形式が恒等的に 0 という特別な場合に $\bar{T}'(V, W)$ を $\bar{T}(V, W)$ と表すことにする. 一般の $\bar{T}'(V, W)$ は $\bar{T}(V, W)$ の一種の量子化と言っていいだろう.

$W = \{0\}$ の場合はこの代数 $\bar{T}'(V, W)$ は $\bar{T}(V)$ と同一視できる. 逆に $V = \{0\}$ の場合は $\bar{T}(W)$ の反代数 $\bar{T}^\circ(W)$ と同一視できる. また $W = V^*$ として, V^* と V の間に自然なカップリングを考えると, この代数は $\mathcal{D}(\bar{T}(V))$ と同型になる: $\bar{T}'(V^*, V) \simeq \mathcal{D}(\bar{T}(V))$.

これらのうち $\bar{T}(V)$, $\bar{T}^\circ(V^*)$, $\bar{T}(V, V^*)$ は immanant への応用で活躍する（ただし本稿では紙面が限られているので一部しか述べられない）。

5. IMMANANTS

代数 $\bar{T}(V)$ は immanant という行列の関数を扱うのに役立つ。本節では immanant の定義とその基本的な性質についてまとめる。

immanant は n の分割 λ に応じて決まる行列の関数であり、行列式やパーマメントの自然な一般化とも見なせる。複素行列 $X = (X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ に対し、 λ に対応する immanant を

$$(5.1) \quad \text{imm}_\lambda X = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma) X_{\sigma(1)1} \cdots X_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma^{-1}) X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)}$$

と定める。ただし λ は n の分割、 χ_λ は λ に対応する S_n の既約指標とする。この関数 imm_λ は、 $\lambda = (1^n)$, $\lambda = (n)$ のときそれぞれ行列式とパーマメントに一致する：

$$\text{imm}_{(1^n)} = \det, \quad \text{imm}_{(n)} = \text{per}.$$

次の関係式は $\det XY = \det X \det Y$ という関係式の小行列式版（Cauchy–Binet 関係式）の類似と見なせる：

命題 5.1. $X, Y \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ に対し、次の関係式が成立する：

$$\text{imm}_\lambda(XY)_{IK} = \frac{\chi_\lambda(1)}{p!} \sum_{J \in [n]^p} \text{imm}_\lambda X_{IJ} \text{imm}_\lambda Y_{JK} = \sum_{J \in \left(\left([n]\right)_p\right)} \frac{\chi_\lambda(1)}{J!} \text{imm}_\lambda X_{IJ} \text{imm}_\lambda Y_{JK}.$$

記号を説明しよう。まず $[n]$ は $\{1, \dots, n\}$ という集合を表す。また $\left(\left([n]\right)_p\right)$ は n 以下の自然数からなる長さ p の非減少数列の集合全体を表す：

$$\left(\left([n]\right)_p\right) = \{(i_1, \dots, i_p) \in [n]^p \mid i_1 \leq \cdots \leq i_p\}.$$

また $I = (i_1, \dots, i_p) \in [n]^p$ に対し、 $I! = m_1! \cdots m_n!$ と定める。ただし m_i をこの数列における i の登場回数とする。さらに $I = (i_1, \dots, i_p)$, $J = (j_1, \dots, j_p) \in [n]^p$ に対して $X_{IJ} = (X_{i_a j_b})_{1 \leq a, b \leq p}$ とおく。

群環 $\mathbb{C}S_n$ に値を取る次のような関数を考えるのも自然である：

$$\begin{aligned} \text{preimm} X &= \sum_{\sigma \in S_n} \sigma X_{\sigma(1)1} \cdots X_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)} \sigma^{-1}, \\ \text{preimm}^\circ X &= \sum_{\sigma \in S_n} X_{\sigma(1)1} \cdots X_{\sigma(n)n} \sigma^{-1} = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

これらを本稿では仮に preimmanant または predeterminant と呼ぶことにする。これに既約指標 χ_λ を適用すると通常の immanant が得られるからである：

$$\text{imm}_\lambda X = \chi_\lambda(\text{preimm} X) = \chi_\lambda(\text{preimm}^\circ X).$$

この2種類の preimmanant の間には $\text{preimm}^t X = \text{preimm}^\circ X$ という関係がある.
preimmanant についても Cauchy–Binet 型の関係式が成り立つ:

命題 5.2. 次が成立する:

$$\begin{aligned}\text{preimm}(XY)_{IK} &= \frac{1}{n!} \sum_{J \in [n]^r} \text{preimm} X_{IJ} \text{preimm} Y_{JK} \\ &= \sum_{J \in \left(\left[\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix}\right]\right)} \frac{1}{J!} \text{preimm} X_{IJ} \text{preimm} Y_{JK}, \\ \text{preimm}^\circ(XY)_{IK} &= \frac{1}{n!} \sum_{J \in [n]^r} \text{preimm}^\circ Y_{JK} \text{preimm}^\circ X_{IJ} \\ &= \sum_{J \in \left(\left[\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix}\right]\right)} \frac{1}{J!} \text{preimm}^\circ Y_{JK} \text{preimm}^\circ X_{IJ}.\end{aligned}$$

また preimmanant の和について次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}\frac{1}{p!} \sum_{I \in [n]^p} \text{preimm} X_{II} &= \sum_{I \in \left(\left[\begin{smallmatrix} n \\ p \end{smallmatrix}\right]\right)} \frac{1}{I!} \text{preimm} X_{II} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{I \in [n]^p} \text{preimm}^\circ X_{II} = \sum_{I \in \left(\left[\begin{smallmatrix} n \\ p \end{smallmatrix}\right]\right)} \frac{1}{I!} \text{preimm}^\circ X_{II}.\end{aligned}$$

この値を $\text{preimm}_p X$ と表すことにする. これは次のような良い不変性を持つ:

定理 5.3. $\text{preimm}_p X$ は $\mathbb{C}S_p$ の中心元であり, また $GL_n(\mathbb{C})$ の元による共役で不変である.
つまり任意の $\sigma \in S_p$, $g \in GL_n(\mathbb{C})$ に対して, 次が成立する:

$$\sigma(\text{preimm}_p X)\sigma^{-1} = \text{preimm}_p X, \quad \text{preimm}_p gXg^{-1} = \text{preimm}_p X.$$

非可換な成分を持つ行列にも immanant を考えよう. 結合的な $\mathbb{C}$ 代数 $\mathcal{A}$ を用意して, $\mathcal{A}$ の元を成分とする n 次正方行列 $X = (X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ を考える. このような行列に対しては (5.1) の二つの定義式が一般には一致しないため, 次の二つを個別に考えなくてはならない:

$$\begin{aligned}\text{column-imm}_\lambda X &= \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma) X_{\sigma(1)1} \cdots X_{\sigma(n)n}, \\ \text{row-imm}_\lambda X &= \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma^{-1}) X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)}.\end{aligned}$$

さらに次のようなものを考えても面白い:

$$\begin{aligned}\text{double-imm}_\lambda X &= \frac{\chi_\lambda(1)}{n!} \sum_{\sigma, \sigma' \in S_n} \chi_\lambda(\sigma) \chi_\lambda(\sigma'^{-1}) X_{\sigma(1)\sigma'(1)} \cdots X_{\sigma(n)\sigma'(n)}, \\ \text{symm-imm}_\lambda X &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma, \sigma' \in S_n} \chi_\lambda(\sigma\sigma'^{-1}) X_{\sigma(1)\sigma'(1)} \cdots X_{\sigma(n)\sigma'(n)}.\end{aligned}$$

これらは成分が可換であればすべて一致する．これは既約指標に関する次の基本的な関係を使えばすぐにわかる：

$$|S_n| \frac{\chi_\lambda(\sigma)}{\chi_\lambda(1)} = \sum_{\sigma' \in S_n} \chi_\lambda(\sigma \sigma'^{-1}) \chi_\lambda(\sigma'), \quad \chi_\lambda(\sigma) = \chi_\lambda(\sigma^{-1}).$$

非可換な成分を持つ行列に対して、さらに次の関数が同様に定義できる：

$$\begin{array}{lll} \text{column-preimm}, & \text{row-preimm}, & \text{symm-preimm}, \\ \text{column-preimm}^\circ, & \text{row-preimm}^\circ, & \text{symm-preimm}^\circ. \end{array}$$

これらは $\mathbb{C}S_n \otimes \mathcal{A}$ に値をとる関数である（ただし $\mathbb{C}S_n \otimes \mathcal{A}$ には $\mathbb{C}S_n$ の元と $\mathcal{A}$ の元が可換になるように積の構造を入れる）．これらの和に関して次の等式が成立する：

$$\begin{aligned} \sum_{I \in [n]^p} \text{column-preimm } X_{II} &= \sum_{I \in [n]^p} \text{column-preimm}^\circ X_{II} \\ &= \sum_{I \in [n]^p} \text{row-preimm } X_{II} = \sum_{I \in [n]^p} \text{row-preimm}^\circ X_{II} \\ &= \sum_{I \in [n]^p} \text{symm-preimm } X_{II} = \sum_{I \in [n]^p} \text{symm-preimm}^\circ X_{II}. \end{aligned}$$

この値を $p!$ で割ったものを $\text{preimm}_p X$ という記号で表そう．これは定理 5.3 と同様に次の不変性を持つ：

定理 5.4. $\text{preimm}_p X$ は $\mathbb{C}S_p$ の任意の元と可換であり、また $GL_n(\mathbb{C})$ の元による共役で不変である．つまり任意の $\sigma \in S_p$, $g \in GL_n(\mathbb{C})$ に対して、次が成立する：

$$\sigma(\text{preimm}_p X)\sigma^{-1} = \text{preimm}_p X, \quad \text{preimm}_p gXg^{-1} = \text{preimm}_p X.$$

6. 代数 $\bar{T}(V)$ を用いた IMMANANT の表示

代数 $\bar{T}(V)$ を利用して immanant や preimmanant をうまく表示することができる．行列式を扱うのに外積代数がしばしば役に立つが、外積代数を $\bar{T}(V)$ に置き換えることで immanant や preimmanant を行列式と同様に扱えるようになるのである．

$X = (X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ を n 次の複素正方行列とする． V を n 次元複素ベクトル空間とし、 $e_1, \dots, e_n$ を V の基底、 $e_1^*, \dots, e_n^*$ を V^* の基底とする．そして $V \subset \bar{T}(V)$ の元

$$\xi_j = \sum_{i=1}^n e_i X_{ij}, \quad \gamma_i = \sum_{j=1}^n e_j X_{ij}$$

を考える．すると $I, J \in [n]^p$ に対して、 X_{IJ} の preimmanant が次のように表される：

$$\begin{aligned} \text{preimm } X_{IJ} &= L(e_{i_1}^*) \cdots L(e_{i_p}^*) \xi_{j_p} \cdots \xi_{j_1}, \\ \text{preimm}^\circ X_{IJ} &= L(e_{j_1}^*) \cdots L(e_{j_p}^*) \gamma_{i_p} \cdots \gamma_{i_1}. \end{aligned}$$

これは $\bar{T}(V^*)$ の反代数 $\bar{T}^\circ(V^*)$ と $\bar{T}(V)$ とのカップリング $\bar{T}^\circ(V^*) \times \bar{T}(V) \rightarrow \mathbb{C}S_\infty$ と見なすと便利であるが, ここでは詳細は略す. この表示を利用すると定理 5.4 の不変性などが簡単に証明できる.

同様の表示は非可換な成分を持つ行列に対しても可能である. 次節では普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の成分を持つ行列について詳しく述べる.

7. QUANTUM IMMANANTS

前節で述べた手法は quantum immanant [O] を扱う際に特にその威力を発揮する.

まず quantum immanant $\mathbb{S}_\lambda$ について復習しよう. これは分割 λ でパラメータづけされた普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元であり, λ が長さ n 以下の分割全体を走るとき $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心の (ベクトル空間としての) 基底をなす.

E_{ij} を Lie 環 $\mathfrak{gl}_n$ の標準的な基底として,

$$(7.1) \quad \mathbb{S}_p = \frac{1}{p!} \sum_{I \in [n]^p} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma E_{i_1 i_{\sigma(1)}}(-x_1) \cdots E_{i_p i_{\sigma(p)}}(-x_p)$$

という $\mathbb{C}S_p \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$ の元を考える. ただし $E_{ij}(a) = E_{ij} + \delta_{ij}a$ とする. また $x_1, \dots, x_p$ は Young–Jucys–Murphy elements と呼ばれる次のような $\mathbb{C}S_p$ の元である:

$$x_k = \sum_{i=1}^{k-1} (i \ k).$$

ただし x_1 は $x_1 = 0$ と定める.

この $\mathbb{S}_p$ は $\text{preimm}_p X$ の類似であり, 命題 5.3 や命題 5.4 と同様の良い対称性を持つ. この対称性から $\mathbb{S}_p$ が $\mathbb{C}S_p \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元であるという事実もすぐにわかる.

quantum immanant $\mathbb{S}_\lambda$ はこの $\mathbb{S}_p$ に既約指標 χ_λ を適用すると得られる:

$$\mathbb{S}_\lambda = \chi_\lambda(\mathbb{S}_p).$$

そこで $\mathbb{S}_p$ を quantum preimmanant と呼ぶことにしよう.

ちなみに $\lambda = (1^k)$ のとき $\mathbb{S}_{(1^k)}$ は k 次 Capelli element に一致する.

代数 $\bar{T}(V)$ を用いて $\mathbb{S}_p$ を表そう. 前節と同様に V を n 次元ベクトル空間, $e_1, \dots, e_n$ を V の基底, $e_1^*, \dots, e_n^*$ を V^* の双対基底とする. すると次の関係が成り立つ:

$$(7.2) \quad \mathbb{S}_p = \frac{1}{p!} \sum_{I \in [n]^p} L(e_{i_1}^*) \cdots L(e_{i_p}^*) \gamma_{i_p}(-y_1) \cdots \gamma_{i_1}(-y_p).$$

ただし $\gamma_i(a)$ は次のような $\bar{T}(V) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$ の元である:

$$\gamma_i(a) = \sum_{j=1}^n e_j E_{ij}(a).$$

また $y_1, \dots, y_p$ は次のような $\mathbb{C}S_p$ の元である (y_1 は $y_1 = 0$ と定める) :

$$y_k = \sum_{i=1}^{k-1} (1 - i + 1).$$

この $\bar{T}(V)$ を利用した表示から quantum immanant のいろいろな性質がわかる. たとえば $\mathbb{S}_p$ は上の (7.1) とは別に次のような表示式も持つ:

$$(7.3) \quad \mathbb{S}_p = \sum_{I \in \left(\left[\begin{smallmatrix} [n] \\ p \end{smallmatrix} \right]\right)} \frac{1}{I!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma E_{i_1 i_{\sigma(1)}}(-x_1) \cdots E_{i_p i_{\sigma(p)}}(-x_p).$$

この二つの表示式はそれぞれに利点がある. (7.1) からは $\mathbb{S}_p$ の中心性が簡単に導かれて, (7.3) からは $\mathfrak{gl}_n$ の既約表現における $\mathbb{S}_p$ の作用 (中心元なのでスカラー作用になる) が簡単に計算できるのである. このようなそれぞれに利点を持つ表示の同等性が, 単純な交換関係を利用して示せる. たとえば今の (7.1) と (7.3) の同等性は $\gamma_i(a)$ に関する次の交換関係を (7.2) に適用することで容易に示される:

$$\gamma_i(-y_l) \gamma_j(-y_{l+1}) = \gamma_j(-y_l) \gamma_i(-y_{l+1}) s_1.$$

この議論を押し進めると, 第 4 節で与えた代数 $\bar{T}(V, V^*)$ などにも自然に現れて活躍する.

他にも higher Capelli identity の証明が簡単にできる. 以下, それを説明しよう.

$W = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}$ というベクトル空間のテンソル積を考える. すると一般線型群 $GL_n(\mathbb{C})$ は多項式の空間 $\mathcal{P}(W)$ に自然に作用する. これから得られる Lie 環 $\mathfrak{gl}_n$ の $\mathcal{P}(W)$ への作用を π という記号で表す. この作用は次のように表される.

$$\pi(E_{ij}) = \sum_{k=1}^{n'} t_{ik} \partial_{jk}.$$

ただし t_{ij} は W の標準的な座標, ∂_{ij} は $\frac{\partial}{\partial t_{ij}}$ という偏微分を表す. このとき次のような Capelli 恒等式の一般化が成立する. これは [O] で与えられたもので, higher Capelli identity と呼ばれている. immanant に関する Cauchy–Binet 関係式 (命題 5.1) の類似とも見なせる.

定理 7.1 (Okounkov). 次が成立する:

$$\pi(\mathbb{S}_\lambda) = \frac{\chi_\lambda(1)}{p!} \sum_{I \in [n]^p} \sum_{J \in [n']^p} \text{imm}_\lambda T_{IJ} \text{imm}_\lambda \partial_{IJ}.$$

ただし T, ∂ は $T = (t_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}, \partial = (\partial_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ という W 上の多項式係数微分作用素環 $\mathcal{PD}(W)$ の元を成分に持つ $n \times n'$ 行列である.

この定理 7.1 について, [O] では固有値の計算と shifted Schur function の性質を利用した証明を与えているが, 以下のような直接的な証明が可能である.

証明. 次のような $\bar{T}(V) \otimes \mathcal{PD}(W)$ の元を考える:

$$\eta_k = \sum_{j=1}^n e_j \partial_{jk}, \quad \gamma_i(a) = \sum_{j=1}^n e_j \pi(E_{ij}) + e_i a.$$

これらのあいだには

$$\gamma_i(0) = \sum_{j=1}^n e_j \pi(E_{ij}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n'} e_j t_{ik} \partial_{jk} = \sum_{k=1}^{n'} t_{ik} \eta_k$$

という関係がある. また次の交換関係が成立する:

$$\eta_k \gamma_j(-y_{l+1}) = \gamma_j(-y_l) \eta_k s_1.$$

これを繰り返し適用して次の等式を得る:

$$(7.4) \quad \gamma_{i_p}(-y_1) \gamma_{i_{p-1}}(-y_2) \cdots \gamma_{i_1}(-y_p) = \sum_{K \in [n']^p} t_{i_p k_p} t_{i_{p-1} k_{p-1}} \cdots t_{i_1 k_1} \eta_{k_p} \eta_{k_{p-1}} \cdots \eta_{k_1}.$$

実際, $y_1 = 0$ に注意して次のように変形すると, p が 1 小さい場合に議論を帰着させられる.

$$\begin{aligned} & \gamma_{i_p}(-y_1) \gamma_{i_{p-1}}(-y_2) \cdots \gamma_{i_1}(-y_p) \\ &= \sum_{k=1}^{n'} t_{i_p k} \eta_k \gamma_{i_{p-1}}(-y_2) \cdots \gamma_{i_1}(-y_p) \\ &= \sum_{k=1}^{n'} t_{i_p k} \gamma_{i_{p-1}}(-y_1) \cdots \gamma_{i_1}(-y_{p-1}) \eta_k \cdot (1 \ 2 \ \cdots \ p). \end{aligned}$$

(7.4) に微分作用素 $L(e_{i_1}^*) \cdots L(e_{i_p}^*)$ を適用して, $i_1, \dots, i_p$ について和を取り, 既約指標を適用すると, 主張の等式を得る. $\square$

$\mathcal{PD}(W)$ の代わりに $\mathcal{D}(\bar{T}(W))$ を舞台にしても同じような等式が成立する.

代数 $\bar{T}(V)$ を用いて quantum immanant や higher Capelli identity を扱うこの手法は, 外積代数を用いて Capelli 恒等式を扱う手法 ([I1–5], [IU], [U2–5], [Wa] など) を発展させたものと見なせる.

REFERENCES

- [Ca1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.
- [Ca2] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.
- [H] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.
- [I1] M. Itoh, *Capelli elements for the orthogonal Lie algebras*, J. Lie Theory **10** (2000), 463–489.
- [I2] ———, *Capelli identities for the dual pair (O_M, Sp_N)* , Math. Z. **246** (2004), 125–154.

- [I3] ———, *Capelli identities for reductive dual pairs*, Adv. Math. **194** (2005), 345–397.
- [I4] ———, *Two determinants in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, J. Algebra **314** (2007), 479–506.
- [I5] ———, *Two permanents in the universal enveloping algebras of the symplectic Lie algebras*, Internat. J. Math., to appear.
- [I6] ———, *Extensions of the tensor algebra and their applications*, in preparation.
- [IU] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, Compositio Math. **127** (2001), 333–359.
- [JK] G. James and A. Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia of mathematics and its applications, vol.16, Addison-Wesley, 1981.
- [MN] A. Molev and M. Nazarov, *Capelli identities for classical Lie algebras*, Math. Ann. **313** (1999), 315–357.
- [N] M. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.
- [O] A. Okounkov, *Quantum immanants and higher Capelli identities*, Transform. Groups **1** (1996), no. 1, 99–126.
- [U1] T. Umeda, *The Capelli identities, a century after*, Sūgaku **46** (1994), 206–227, (in Japanese); English transl. in “Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants,” AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78, ed. by K. Nomizu.
- [U2] ———, *Newton’s formula for $\mathfrak{gl}_n$* , Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3169–3175.
- [U3] ———, *On Turnbull identity for skew symmetric matrices*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **43** (2000), 379–393.
- [U4] ———, *Application of Koszul complex to Wronski relations for $U(\mathfrak{gl}_n)$* , Comment. Math. Helv. **78** (2003), 663–680.
- [U5] ———, *On the proof of the Capelli identities*, Funkcialaj Ekvacioj **51** (2008), 1–15.
- [Wa] A. Wachi, *Central elements in the universal enveloping algebras for the split realization of the orthogonal Lie algebras*, Lett. Math. Phys. **77** (2006), 155–168.
- [We] H. Weyl, *The Classical Groups. their Invariants and Representations*, Princeton Univ. Press, 1946.