

$SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$ の無限小化等質空間の コンパクト Clifford-Klein 形について

(On compact Clifford-Klein forms of
infinitesimal homogeneous spaces of
 $SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$)

吉野太郎 (東京工業大学 大学院理工学研究科)
yoshino@math.titech.ac.jp

Abstract

コンパクト Clifford-Klein 形の存在問題は、不連続群の研究において重要な問題である。しかし、この問題は一般には難しく、最もよく研究されている簡約型の等質空間の場合に限っても、多くの未解決問題が残っている。

一方、簡約型等質空間 G/H に対し、その‘無限小化近似’と言える等質空間 G_θ/H_θ を定義する事が出来る。無限小化等質空間 G_θ/H_θ のコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題を考えると、簡約型の場合より簡単な議論でありながら、驚く程よく似た結果が得られる事がここ 2 年程で分かってきた。

今回は (未解決問題の一つである) $SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$ のコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題の‘無限小化版’を考察したい。

Existence problem of a compact Clifford-Klein form is an important problem in the study of discontinuous groups. However, it is not easy in general to solve this problem. There are many open problems on it even if we consider only the reductive case.

On the other hand, for a homogeneous space of reductive type G/H , we can define an infinitesimal homogeneous space G_θ/H_θ , which we may regard as ‘infinitesimal approximation’ of G/H . Recently, we obtained many solutions to the existence problem of a compact Clifford-Klein form of infinitesimal homogeneous spaces in easier argument. And these results are much similar to the reductive case.

In this talk, we want to consider the ‘infinitesimal analogue’ of the existence problem of a compact Clifford-Klein form of $SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$.

1 コンパクト Clifford-Klein 形

まず、等質空間の Clifford-Klein 形を定義し、このテーマにおける重要な問題 (問 A) を述べることから始めよう。

$M = G/H$ をリー群の等質空間とし, Γ を G の離散部分群とする. Γ の M への作用が固有不連続かつ固定点自由なとき, 商写像

$$\pi : M \longrightarrow \Gamma \backslash M$$

は被覆写像となり, 従って π が滑らかな写像となるように $\Gamma \backslash M$ に多様体の構造を入れることができる. このとき,

定義 1 (Killing, Borel, 小林). 商多様体 $\Gamma \backslash M$ を M の Clifford-Klein 形といい, Γ を M の不連続群という.

A. Borel はリーマン対称空間 G/H に対し次の問を立て, 答えが常に肯定的であることを示した.

問 A. G/H はコンパクト Clifford-Klein 形を持つか?

一方, Calabi-Markus は非リーマン対称空間 $G/H = O(n+1, 1)/O(n, 1)$ に対し, 問 A の答えが否定的になることを示した. より一般の等質空間 G/H に対する問 A は, 小林により初めて本格的に研究され, その後, Benoist, Labourie, Margulis, Zimmer らによっても研究されている.

しかし, 未だ多くの等質空間 G/H に対し問 A の答えは得られていない. 例えば, 以下のような未解決問題がある.

予想 2 (小林). $n > m > 1$ に対して, 等質空間 $SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$ はコンパクト Clifford-Klein 形を持たない.

ある意味でこの予想は「 $\frac{2}{3}$ は正しい」と言える. より正確には次が知られている.

定理 3. (小林) 予想 2 は $m < \frac{2}{3}n - \varepsilon_n$ ならば正しい. 但し ε_n は次のように定義される.

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n \equiv 1 \pmod{3} \\ 1 & \text{other.} \end{cases}$$

一方, 簡約型等質空間 G/H に対し, その無限小化等質空間 G_θ/H_θ を定義することができる (定義 6). 無限小化等質空間に対する問 A の答えは, 簡約型等質空間に対するそれと, これまでのところ驚く程の一致を見せている. 従って, 次のように予想するのは自然だろう.

予想 4. $n > m > 1$ として, $G/H = SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$ とおく. G_θ/H_θ はコンパクト Clifford-Klein 形を持たない.

今回、この予想がある意味で「 $\frac{4}{5}$ は正しい」事を示したい。より正確には次を示す。
 定理 5 (2007). 予想 4 は $m < \frac{4}{5}n - \varepsilon_n$ ならば正しい。但し ε_n は次のように定義される。

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n \equiv 1 \pmod{5} \\ 1 & \text{other.} \end{cases}$$

2 無限小化等質空間

前世紀の間 A に関する研究は、その殆どが G/H が簡約型等質空間の場合に行われた。一方、ここ 2 年程の間に無限小化等質空間に対する問 A について、次々と新しい結果が得られた。この節では、この無限小化等質空間の定義を復習したい。そのために、カルタン運動群の定義から始めよう。

G を簡約リー群とし、 θ をそのカルタン対合とする。 G のリー環 $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ と $d\theta$ の固有空間に分解する (リー環 $\mathfrak{g}$ のカルタン分解)。ここで、 K を $\mathfrak{k}$ の解析的部分群とすると G は $G = \exp(\mathfrak{p}) \cdot K$ と書ける (リー群 G のカルタン分解)。一方、半直積群

$$G_\theta := K \ltimes_{\text{Ad}} \mathfrak{p}$$

は G のカルタン運動群と呼ばれる。 G と G_θ は自然な写像

$$\Phi_\theta : G \rightarrow G_\theta, \quad e^X k \mapsto (k, x)$$

によって、多様体として同型となるが、一般にリー群としては同型でなく、 G_θ はもはや簡約リー群ではない。

簡約型等質空間 G/H に対し、 G のカルタン対合 θ を、 H が θ 不変となるようにとれる。このとき、 H のカルタン運動群 H_θ は自然に G_θ の部分群とみなすことができ、従って等質空間 G_θ/H_θ を考えることができる。

定義 6. 等質空間 G_θ/H_θ を G/H の無限小化等質空間という。

G_θ/H_θ は G/H と多様体としては同型であるが、考えている幾何構造が異なる。実際、 G/H には G 不変な擬リーマン構造が入るが、一般に G_θ/H_θ は G_θ 不変な擬リーマン構造を持たない。また、両者の Clifford-Klein 形も一対一には対応しない (なぜなら、 $\Gamma \backslash G_\theta/H_\theta$ において、 Γ は G_θ の部分群でなければならない)。しかし、それにも係わらず、両者に対する問 A には次のような経験則がある。

(1) 両者の問 A に関する結果はよく似ている。

(2) 無限小化の方が、証明が易しい

そして、今回考察する等質空間 $SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$ についても、この経験則は成り立っている。

3 鍵補題

無限小化等質空間に対する問 A が易しい理由の一つに, ある鍵補題 (補題 7) が挙げられる. この補題により, 不連続群 Γ の存在問題は, ある種の条件を満たす部分空間 W の存在問題に帰着される. その鍵補題とそこから得られる系を見てゆくことにしよう.

以下では, G/H を簡約型等質空間とし, G_θ/H_θ をその無限小化等質空間とする. このとき $G_\theta = K \ltimes \mathfrak{p}$ とすれば, K の閉部分群 K_H と, $\mathfrak{p}$ の部分空間 $\mathfrak{p}_H$ によって, $H_\theta = K_H \ltimes \mathfrak{p}_H$ と書くことができる.

補題 7 (2005). G_θ/H_θ がコンパクト Clifford-Klein 形を持つ必要十分条件は次の二つの条件 (a), (b) を満たす部分空間 $W \subset \mathfrak{p}$ が存在することである.

- (a) $\mathfrak{p}_H \oplus W = \mathfrak{p}$,
- (b) $\text{Ad}(K)\mathfrak{p}_H \cap W = \{0\}$.

この補題は, 簡約型等質空間のコンパクト Clifford-Klein 形に関する次の定理の「無限小化版」とみることができる. 但し, 補題 7 が必要十分条件を与えるのに対し, 定理 8 は十分条件しか与えないという違いがある. このことは簡約型等質空間に対する問 A が難しい理由になっている.

定理 8 (小林). G の簡約部分群 L で次の二つの条件 (a), (b) を満たすものが存在するならば, G/H はコンパクト Clifford-Klein 形を持つ.

- (a) $d(H) + d(L) = d(G)$,
- (b) $\mathfrak{a}(H) \cap \mathfrak{a}(L) = \{0\}$.

但し, $d(H)$ は H の非コンパクト次元, $\mathfrak{a}(H)$ は H のカルタン射影による像である.

補題 7 は不連続群 Γ の存在問題を部分空間 W の存在問題に帰着するが, それでも一般の無限小化等質空間に対し問 A が簡単に解けるようになるわけではない. 次の系は W の非存在を易しく判定する方法を提供する.

系 9 (2005). G_θ/H_θ がコンパクト Clifford-Klein 形を持つならば, $\mathfrak{p}_H$ は $\text{Ad}(K)\mathfrak{p}_H$ に含まれる $\mathfrak{p}$ の部分空間の中で最大次元のものである.

Proof. $\mathfrak{p}$ の部分空間 V が $\text{Ad}(K)\mathfrak{p}_H$ に含まれるならば, (b) より特に $V \cap W = \{0\}$ である. 従って, (a) より $\dim \mathfrak{p}_H = \dim \mathfrak{p} - \dim W \geq \dim V$ となり, $\mathfrak{p}_H$ の次元は最大である. ■

この系もまた, 簡約型等質空間のコンパクト Clifford-Klein 形に関する次の定理の「無限小化版」とみることができる.

定理 10 (小林). G の簡約部分群 H' で次の二つの条件 (a), (b) を満たすものが存在するならば, G/H はコンパクト Clifford-Klein 形を持たない.

$$(a) \ d(H') > d(H),$$

$$(b) \ H' \sim H \text{ in } G.$$

4 行列のランクに関する考察

この系 9 を用いて, $G/H = SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$ の無限小化等質空間に対し問 A を考えよう. このとき, 議論は行列のランク計算に帰着され, 最終的に定理 5 の条件 $m < \frac{4}{5}n - \varepsilon_n$ が得られる.

以下, この節では常に $G/H = SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$ とおく. このとき, $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_H, \text{Ad}(K)\mathfrak{p}_H$ を定義に従って計算すると次を得る.

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \\ &= \{X \in M(n, \mathbb{R}) : {}^tX = X\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_H &= \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & \end{pmatrix} : A \in \text{Sym}(m, \mathbb{R}) \right\} \\ &\simeq \text{Sym}(m, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\text{Ad}(K)\mathfrak{p}_H = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : \text{rank} X \leq m\}$$

ここで, 部分空間 $V \subset \mathfrak{p}$ に対して,

$$\overline{\text{rank}} V := \max_{X \in V} \{\text{rank} X\}$$

と定めると,

$$\overline{\text{rank}} V \leq m \iff V \subset \text{Ad}(K)\mathfrak{p}_H$$

である. 従って, 系 9 を適用できるかどうかを調べるには, 次の質問に答えればよい.

質問 11. $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ の部分空間 V で $\overline{\text{rank}} V \leq m$ を満たし, かつ $\mathfrak{p}_H$ より高い次元のものはあるか?

このような部分空間 $V \subset \mathfrak{p}$ の候補として, V_m を次のように定める.

$$V_m = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ {}_t B & \end{pmatrix} : A \in \text{Sym}(r, \mathbb{R}), B \in M(r, n-r; \mathbb{R}) \right\} \quad (m = 2r \text{ のとき})$$

$$V_m = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ {}_t B & c \end{pmatrix} : A \in \text{Sym}(r, \mathbb{R}), B \in M(r, n-r; \mathbb{R}), c \in \mathbb{R} \right\} \quad (m = 2r + 1 \text{ のとき})$$

このとき, $\overline{\text{rank}} V_m = m$ は常に成り立つ. あとは $\dim V_m > \dim \mathfrak{p}_H$ を確かめればよい. $V_H, \mathfrak{p}_H$ の定義に従って計算すれば,

$$\dim V_m = \begin{cases} \frac{r(r+1)}{2} + r(n-r) & (m = 2r \text{ のとき}) \\ \frac{r(r+1)}{2} + r(n-r) + 1 & (m = 2r + 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\dim \mathfrak{p}_H = \frac{m(m+1)}{2}$$

となり, 結局

$$\dim V_m > \dim \mathfrak{p}_H \iff m < \frac{4}{5}n - \varepsilon_n$$

が得られる. 即ち, この条件が満たされるときは, 系 9 より G_θ/H_θ のコンパクト Clifford-Klein 形は存在せず, 定理 5 が証明できた.

5 主結果

前節まで, $SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$ の無限小化等質空間に対して問 A を考えてきた. 最後に, この手法を一般化して, 別の等質空間 G/H の問 A も考察しよう. より正確には以下の等質空間を考える.

	G/H	K	$\mathfrak{p}$
1.	$SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$	$SO(n)$	$\text{Sym}(n, \mathbb{R})$
2.	$SL(n, \mathbb{C})/SL(m, \mathbb{C})$	$SU(n)$	$\text{Herm}(n, \mathbb{C})$
3.	$SL(n, \mathbb{H})/SL(m, \mathbb{H})$	$Sp(n)$	$\text{Herm}(n, \mathbb{H})$
4.	$SO(n, \mathbb{C})/SO(m, \mathbb{C})$	$SO(n)$	$\mathfrak{o}(n)$
5.	$Sp(n, \mathbb{R})/Sp(m, \mathbb{R})$	$U(n)$	$\mathfrak{u}(n)$
6.	$Sp(n, \mathbb{C})/Sp(m, \mathbb{C})$	$Sp(n)$	$\mathfrak{sp}(n)$
7.	$SO^*(2n)/SO^*(2m)$	$U(n)$	$\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$

G/H をこの表にある等質空間の一つとしたとき, 次のように予想されている.

予想 12 (小林). $n > m > 1$ のとき, G/H はコンパクト Clifford-Klein 形を持たない.

そして, その無限小化版も同様に予想できる.

予想 13. $n > m > 1$ のとき, G_θ/H_θ はコンパクト Clifford-Klein 形を持たない.

$SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$ のときと同様に, 簡約型の予想はやはり「ほぼ $\frac{2}{3}$ は正しい」. より正確には:

定理 14 (小林). 予想 12 は以下の場合には正しい.

G/H	m が偶数のとき	m が奇数のとき
$SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$	$3m < 2n$	$3m < 2n - 3$
$SL(n, \mathbb{C})/SL(m, \mathbb{C})$	$3m < 2n + 2$	$3m < 2n - 1$
$SL(n, \mathbb{H})/SL(m, \mathbb{H})$	$3m < 2n + 2$	$3m < 2n - 1$
$SO(n, \mathbb{C})/SO(m, \mathbb{C})$	$3m < 2n + 2$	$3m < 2n + 1$
$Sp(n, \mathbb{R})/Sp(m, \mathbb{R})$	$3m < 2n - 2$	$3m < 2n - 3 - 2\delta_{m3}$
$Sp(n, \mathbb{C})/Sp(m, \mathbb{C})$	$3m < 2n$	$3m < 2n - 1 - 2\delta_{m3}$
$SO^*(2n)/SO^*(2m)$	$3m < 2n + 2$	$3m < 2n + 1$

これを指針として, この無限小化版を考えよう. このとき, 次が言える.

定理 15 (2007). 予想 13 は以下の場合には正しい.

G/H	m が偶数のとき	m が奇数のとき
$SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$	$5m < 4n - 2$	$5m < 4n - 5$
$SL(n, \mathbb{C})/SL(m, \mathbb{C})$	$5m < 4n$	$5m < 4n - 3$
$SL(n, \mathbb{H})/SL(m, \mathbb{H})$	$5m < 4n + 1$	$5m < 4n - 2$
$SO(n, \mathbb{C})/SO(m, \mathbb{C})$	$5m < 4n + 2$	$5m < 4n - 1$
$Sp(n, \mathbb{R})/Sp(m, \mathbb{R})$	$5m < 4n$	$5m < 4n - 3$
$Sp(n, \mathbb{C})/Sp(m, \mathbb{C})$	$5m < 4n - 1$	$5m < 4n - 4$
$SO^*(2n)/SO^*(2m)$	$5m < 4n + 2$	$5m < 4n - 1$

$SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$ のときと同様に, 行列のランクに関する考察を行うことで, これらを証明できる.

References

- [BnL92] Y. BENOIST AND F. LABOURIE, *Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes*, I. H. E. S. Publ. Math. **76** (1992), 99–109.
- [Bo63] A. BOREL, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology **2** (1963), 111–122.
- [CaM62] E. CALABI AND L. MARKUS, *Relativistic space forms*, Ann. of Math. **75** (1962), 63–76.
- [Ko89a] T. KOBAYASHI, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), 249–263.
- [Ko94] T. KOBAYASHI, *Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds*, Lecture Note on European School of Group Theory in 1994.
- [KoY05] T. KOBAYASHI AND T. YOSHINO, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces—revisited*, Pure Appl. Math. Q. **1** Special Issue: In Memory of Professor Armand Borel (2005) 591–663.
- [LMZ95] F. LABOURIE, S. MOZES AND R. J. ZIMMER, *On manifolds locally modeled on non-Riemannian homogeneous spaces*, GAFA **5** (1995), 955–965.
- [Ma97] G. A. MARGULIS, *Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), 447–456.
- [Me89] R. MESHULAM, *On two extremal matrix problems*, Linear Algebra Appl. **114** (1989), 261–271.
- [Y05] T. YOSHINO, ランク 1 の tangential 対称空間のコンパクト Clifford-Klein 形と可除環について, 2005 年度表現論シンポジウム講演集 (2005), 22–32.
- [Y07] T. YOSHINO, *Criterion of proper discontinuity in a Cartan motion group*, Internat. J. Math. **18** (2007), 245–254.