

MIDDLE CONVOLUTION AND SYMMETRY OF THE SIXTH PAINLEVÉ EQUATION

KOUICHI TAKEMURA (竹村 剛一)

ABSTRACT. Middle convolution functor for Fuchsian differential systems was constructed by Dettweiler and Reiter as an algebraic analogue of Katz' functor. Filipuk applied it for the Fuchsian system which leads to the sixth Painlevé equation, and established that Okamoto's transformation for the sixth Painlevé equation can be found as a result of the middle convolution. In this article, the result by Filipuk is reformulated and explicit expressions of integral transformations for Fuchsian systems are obtained. We will also explain further results on this subject.

1. はじめに

第六パンルヴェ方程式系とは、

$$(1.1) \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H_{VI}}{\partial \mu}, \quad \frac{d\mu}{dt} = -\frac{\partial H_{VI}}{\partial \lambda},$$

$$H_{VI} = \frac{1}{t(t-1)} \left\{ \lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 - \{ \theta_0(\lambda-1)(\lambda-t) + \theta_1\lambda(\lambda-t) + (\theta_t-1)\lambda(\lambda-1) \} \mu + \kappa_1(\kappa_2+1)(\lambda-t) \right\},$$

で定義される非線形連立常微分方程式系である。ここで、 $\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty$ はパラメータであり $\kappa_1 = (\theta_\infty - \theta_0 - \theta_1 - \theta_t)/2$, $\kappa_2 = -(\theta_\infty + \theta_0 + \theta_1 + \theta_t)/2$ である。この式において μ を消去して得られる λ についての非線形二階常微分方程式が第六パンルヴェ方程式で、次のように書かれる。

$$(1.2) \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \frac{d\lambda}{dt}$$

$$+ \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \left\{ \frac{(1-\theta_\infty)^2}{2} - \frac{\theta_0^2}{2} \frac{t}{\lambda^2} + \frac{\theta_1^2}{2} \frac{(t-1)}{(\lambda-1)^2} + \frac{(1-\theta_t^2)}{2} \frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right\}.$$

第六パンルヴェ方程式系の解において、動く特異点は極のみであるという著しい性質があり、この性質はパンルヴェ性と呼ばれている。

対称性としては、第六パンルヴェ方程式系は以下の変換で不変である。

	θ_t	θ_∞	θ_1	θ_0	λ	μ	t
s_0	$-\theta_t$	θ_∞	θ_1	θ_0	λ	$\mu - \frac{\theta_t}{\lambda-t}$	t
s_1	θ_t	$2 - \theta_\infty$	θ_1	θ_0	λ	μ	t
s_2	$\theta_t + \kappa_1$	$-\kappa_2$	$\kappa_1 + \theta_1$	$\kappa_1 + \theta_0$	$\lambda + \frac{\kappa_1}{\mu}$	μ	t
s_3	θ_t	θ_∞	$-\theta_1$	θ_0	λ	$\mu - \frac{\theta_1}{\lambda-1}$	t
s_4	θ_t	θ_∞	θ_1	$-\theta_0$	λ	$\mu - \frac{\theta_0}{\lambda}$	t
π_1	θ_1	$1 - \theta_0$	θ_t	$1 - \theta_\infty$	$\frac{t}{\lambda}$	$-\frac{\lambda(\mu+\kappa_1)}{t}$	t
π_2	$1 - \theta_\infty$	$1 - \theta_t$	θ_0	θ_1	$\frac{t(\lambda-1)}{\lambda-t}$	$-\frac{(\lambda-t)^2\mu+(\lambda-t)\kappa_1}{(t-1)t}$	t

この不変性をもって、第六パンルヴェ方程式(系)は(拡大)アフィンワイル群 $W(D_4^{(1)})$ の対称性があると言われる。ここでの変換、とくに s_2 による変換は岡本変換と呼ばれる。

一方、第六パンルヴェ方程式系はリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ において4点 $\{0, 1, t, \infty\}$ に確定特異点をもつ 2×2 の連立線形常微分方程式

$$(1.3) \quad \frac{dY}{dz} = \left(\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_t}{z-t} \right) Y,$$

と関係をもっている。ここで A_0, A_1, A_t は 2×2 の定数行列であり、 Y は2次元ベクトルである。その関係とは、式 (1.3) のモノドロミー保存変形により第六パンルヴェ方程式系が導出されるということ、すなわち、線形常微分方程式 (1.3) において t を動かしたときにモノドロミー(解を $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, t, \infty\}$ での閉径路で解析接続して元の点にもどったときに解が変化するように)を不変にするために係数行列 A_0, A_1, A_t を変化したときのその成分から決まる量(後で明示的に述べる)がみたすべき式が第六パンルヴェ方程式系になるということである。

Filipuk は [3] において、第六パンルヴェ方程式系での岡本変換 s_2 が連立線形常微分方程式での middle convolution というものと整合的に対応していることを示したが、本稿ではこのことを再定式化し、middle convolution の積分変換の側面についても考察する。そして、線形常微分方程式 (1.3) の係数行列が特別な場合に解の積分表示を得る。第六パンルヴェ方程式のヒッチンの解と呼ばれる2パラメータ解に対して、対応する線形常微分方程式には Hermite-Krichever 仮設法による解が得られること ([14]) が知られているが、ピカールの解と呼ばれる2パラメータ解に対応する線形常微分方程式には本稿で述べる解の積分表示が対応する。

ところで、ホインの微分方程式とは、 $\gamma + \delta + \epsilon = \alpha + \beta + 1$ という関係式のもとで

$$(1.4) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-t} \right) \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-t)} y = 0,$$

として定義される4点 $\{0, 1, t, \infty\}$ に確定特異点をもつ単独二階線形常微分方程式である。ホインの微分方程式において、パラメーターが特殊な場合には解を明示的に求めることができ、[7] においていくらか述べられている。[7] には載っていない解としては、 $\gamma, \delta, \epsilon, \alpha - \beta \in \mathbb{Z} + 1/2$ のときにはすべての q について、有限帯ポテンシャルに関連する解が知られており、モノドロミーの計算なども試みられている ([17, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13])。本稿では、middle convolution による積分変換の応用として、 $\gamma, \delta, \epsilon, \alpha + 1/2, \beta + 1/2 \in \mathbb{Z}$ の場合にすべての q について解の積分表示が得られることを紹介する。とくに $\gamma = \delta = \epsilon = 1, \alpha = 3/2, \beta = 1/2$ の場合には解の積分表示を具体的に与え、さらにモノドロミー行列を明示的に書き下す。

2. フックス型微分方程式系

これより、以下のような線形常微分方程式系を考えていく。

$$(2.1) \quad \frac{dY}{dz} = A(z)Y, \quad A(z) = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_t}{z-t} = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix},$$

ここで、 $Y = {}^t(y_1(z), y_2(z))$, A_0, A_1, A_t は 2×2 の定数行列とする。このとき、式 (2.1) はフックス型となっている。すなわち、リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上で特異点 $\{0, 1, t, \infty\}$ はす

べて確定特異点となっている。さて、

$$(2.2) \quad A_0 = \begin{pmatrix} u_0 + \theta_0 & -w_0 \\ u_0(u_0 + \theta_0)/w_0 & -u_0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} u_1 + \theta_1 & -w_1 \\ u_1(u_1 + \theta_1)/w_1 & -u_1 \end{pmatrix},$$

$$A_t = \begin{pmatrix} u_t + \theta_t & -w_t \\ u_t(u_t + \theta_t)/w_t & -u_t \end{pmatrix},$$

$$w_0 = \frac{k\lambda}{t}, \quad w_1 = -\frac{k(\lambda-1)}{t-1}, \quad w_t = \frac{k(\lambda-t)}{t(t-1)},$$

$$u_0 = -\theta_0 + \frac{\lambda}{t\theta_\infty} [\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 + \{2\kappa_1(\lambda-1)(\lambda-t) - \theta_1(\lambda-t) - t\theta_t(\lambda-1)\}\mu + \kappa_1\{\kappa_1(\lambda-t-1) - \theta_1 - t\theta_t\}],$$

$$u_1 = -\theta_1 - \frac{\lambda-1}{(t-1)\theta_\infty} [\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 + \{2\kappa_1(\lambda-1)(\lambda-t) + (\theta_\infty - \theta_1)(\lambda-t) - t\theta_t(\lambda-1)\}\mu + \kappa_1\{\kappa_1(\lambda-t+1) + \theta_0 - (t-1)\theta_t\}],$$

$$u_t = -\theta_t + \frac{\lambda-t}{t(t-1)\theta_\infty} [\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 + \{2\kappa_1(\lambda-1)(\lambda-t) - \theta_1(\lambda-t) + t(\theta_\infty - \theta_t)(\lambda-1)\}\mu + \kappa_1\{\kappa_1(\lambda-t+1) + \theta_0 + (t-1)(\theta_\infty - \theta_t)\}],$$

とおき、 $\kappa_1 = (\theta_\infty - \theta_0 - \theta_1 - \theta_t)/2$, $\kappa_2 = -(\theta_\infty + \theta_0 + \theta_1 + \theta_t)/2$ とする。 A_i ($i = 0, 1, t$) の固有値は 0 と θ_i になっており、 $A_\infty = -(A_0 + A_1 + A_t)$ とおくと

$$(2.3) \quad A_\infty = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix},$$

となる。式 (2.2) から決まるフックス型微分方程式系 (2.1) を $D_Y(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$ と記す。式 (2.1) において $y_2(z)$ を消去することにより、以下の二階線形微分方程式が得られる。

$$(2.4) \quad \frac{d^2 y_1(z)}{dz^2} + \left(\frac{1-\theta_0}{z} + \frac{1-\theta_1}{z-1} + \frac{1-\theta_t}{z-t} - \frac{1}{z-\lambda} \right) \frac{dy_1(z)}{dz} + \left(\frac{\kappa_1(\kappa_2+1)}{z(z-1)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{z(z-1)(z-\lambda)} - \frac{t(t-1)H}{z(z-1)(z-t)} \right) y_1(z) = 0,$$

$$H = \frac{1}{t(t-1)} [\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 - \{\theta_0(\lambda-1)(\lambda-t) + \theta_1\lambda(\lambda-t) + (\theta_t-1)\lambda(\lambda-1)\}\mu + \kappa_1(\kappa_2+1)(\lambda-t)].$$

これを $D_{y_1}(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu)$ と記すことにする。この微分方程式の特異点 $z = 0, 1, t, \lambda, \infty$ はすべて確定特異点となっており、 $z = \lambda$ は特性指数が $0, 2$ の見かけの特異点である。ここで、 λ を確定特異点 $\{0, 1, t, \infty\}$ のいずれかに合流させ、伴って μ についても適当な極限をとれば、ホインの微分方程式 (式 (1.4)) を得ることができる。

また、第六パンルヴェ方程式系

$$(2.5) \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \frac{d\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

は微分方程式 (2.1) において t という変数についてモノドロミー保存変形をすることにより導出されることを注意しておく。

3. MIDDLE CONVOLUTION

Dettweiler と Reiter は [1, 2] において Katz の middle convolution の代数版を定式化してフックス型微分方程式に関連する理論を構築し、Filipuk は [3] において 4 点確定特異点のフックス型微分方程式に場合に応用した。この章では、これらの結果の必要となる部分を筆者の計算に沿う形で概観し、多少の計算を追加する。以下で述べる Dettweiler と Reiter の結果は任意のサイズで任意の確定特異点の個数のフックス型微分方程式系について成立しているが、後に用いる場合に限定して記述する。

A_0, A_1, A_t を 2×2 の定数行列とする。 $\nu \in \mathbb{C}$ に対し、convolution 行列 $B_0, B_1, B_t \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ を次のように定める。

$$(3.1) \quad B_0 = \begin{pmatrix} A_0 + \nu & A_1 & A_t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_0 & A_1 + \nu & A_t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_0 & A_1 & A_t + \nu \end{pmatrix}.$$

基点 $o \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, t\}$ を固定し、 α_i ($i = 0, 1, t, \infty$) は点が o であり点 $w = i$ を反時計周りに回る径路とする。 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, t\}$ とし、 α_z は $w = z$ を時計周りに回る径路とする。そして、 $[\alpha, \beta] = \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ を Pochhammer の径路とする。

命題 3.1. ([2]) $Y = {}^t(y_1(z), y_2(z))$ を微分方程式

$$(3.2) \quad \frac{dY}{dz} = \left(\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_t}{z-t} \right) Y.$$

の解とする。それぞれの $i \in \{0, 1, t, \infty\}$ に対し、関数

$$(3.3) \quad U = \begin{pmatrix} \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} w^{-1} y_1(w) (z-w)^\nu dw \\ \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} w^{-1} y_2(w) (z-w)^\nu dw \\ \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} (w-1)^{-1} y_1(w) (z-w)^\nu dw \\ \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} (w-1)^{-1} y_2(w) (z-w)^\nu dw \\ \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} (w-t)^{-1} y_1(w) (z-w)^\nu dw \\ \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} (w-t)^{-1} y_2(w) (z-w)^\nu dw \end{pmatrix},$$

は微分方程式

$$(3.4) \quad \frac{dU}{dz} = \left(\frac{B_0}{z} + \frac{B_1}{z-1} + \frac{B_t}{z-t} \right) U, \quad U \in \mathbb{C}^6$$

の解となる。

さて

$$(3.5) \quad \mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} \text{Ker}(A_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Ker}(A_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{Ker}(A_t) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_t, \quad \mathcal{K} = \text{Ker}(B_0) \cap \text{Ker}(B_1) \cap \text{Ker}(B_t).$$

とおく。ある m について $\mathbb{C}^6/(\mathcal{K} + \mathcal{L})$ と $\mathbb{C}^m$ がベクトル空間として同型になるが、同型写像をひとつ固定しておく。 B_k ($k = 0, 1, t$) の $\mathbb{C}^m \simeq \mathbb{C}^6/(\mathcal{K} + \mathcal{L})$ における作用を $\mathbb{C}^m$ でのものと同一視したとき、行列の組 $mc_\nu(A) = (\tilde{B}_0, \tilde{B}_1, \tilde{B}_t)$ のことを (A_0, A_1, A_t) のパラメータ ν における middle convolution の加法版と呼ぶことにする。Filipuk は [3]

において、 $\nu = \kappa_1$ ならば $\mathbb{C}^6/(\mathcal{K} + \mathcal{L})$ は $\mathbb{C}^2$ に同型であり、middle convolution によって得られるフックス型微分方程式系

$$(3.6) \quad \frac{d\tilde{Y}}{dz} = \left(\frac{\tilde{B}_0}{z} + \frac{\tilde{B}_1}{z-1} + \frac{\tilde{B}_t}{z-t} \right) \tilde{Y},$$

からモノドロミー保存変形によって得られる式は岡本変換 s_2 によって変換された第六パウルヴェ方程式系となっていることを示した。また、 $\nu = \kappa_2$ のときも $\mathbb{C}^6/(\mathcal{K} + \mathcal{L})$ は $\mathbb{C}^2$ と同型になっているが、これについては後ほど議論する。

これより、 $\nu = \kappa_1$ の場合に middle convolution によって定まるフックス型微分方程式系と積分表示を計算し、Filipuk の結果が再導出されることを見てみよう。 A_0, A_1, A_t を式 (2.2) により定まる行列とする。 $\nu = \kappa_1$ のときには、 $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_t, \mathcal{K}$ は以下のように求まる。

$$(3.7) \quad \mathcal{L}_0 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} w_0 \\ u_0 + \theta_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_1 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_1 \\ u_1 + \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_t = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_t \\ u_t + \theta_t \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

さて、

$$(3.8) \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_0 + \theta_0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & 1 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 + \theta_1 & 0 \\ s_{51} & s_{52} & 1 & 0 & 0 & w_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_t + \theta_t \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} s_{31} &= \frac{t(t-1)\mu w_0 w_1 u_t}{k^2 \kappa_2 w_t (u_0 + \theta_0)(u_1 + \theta_1)}, \\ s_{51} &= \frac{t(1-t)\mu w_0 w_t u_1}{k^2 \kappa_2 w_t (u_0 + \theta_0)(u_t + \theta_t)}, \\ s_{32} &= \frac{1}{\theta_\infty} \left(\frac{w_0}{u_0 + \theta_0} - \frac{w_1}{u_1 + \theta_1} \right), \\ s_{52} &= \frac{1}{\theta_\infty} \left(\frac{w_0}{u_0 + \theta_0} - \frac{w_t}{u_t + \theta_t} \right), \end{aligned}$$

とし、 $\tilde{U} = S^{-1}U$ とおく。ここで、 U は式 (3.3) で定められている関数で、微分方程式 (3.4) の解である。このとき、 $\tilde{U}$ は次の形の微分方程式

$$(3.9) \quad \frac{d\tilde{U}}{dz} = \begin{pmatrix} b_{11}(z) & b_{12}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21}(z) & b_{22}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31}(z) & b_{32}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{42}(z) & 0 & \frac{\kappa_1}{z} & 0 & 0 \\ 0 & b_{52}(z) & 0 & 0 & \frac{\kappa_1}{z-1} & 0 \\ 0 & b_{62}(z) & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_1}{z-t} \end{pmatrix} \tilde{U},$$

をみたすことがわかる。ここで、 $b_{i1}(z)$ ($i = 1, 2, 3$), $b_{i2}(z)$ ($i = 1, \dots, 6$) は有理式となる。 $\tilde{U} = {}^t(\tilde{u}_1(z), \tilde{u}_2(z), \dots, \tilde{u}_6(z))$ と書き、 $\tilde{y}_1(z) = \tilde{u}_1(z)$, $\tilde{y}_2(z) = \tilde{u}_2(z)$, $\tilde{Y} = {}^t(\tilde{y}_1(z), \tilde{y}_2(z))$ とおくと、

$$(3.10) \quad \frac{d\tilde{Y}}{dz} = \begin{pmatrix} b_{11}(z) & b_{12}(z) \\ b_{21}(z) & b_{22}(z) \end{pmatrix} \tilde{Y},$$

が成立し、これは

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta}_0 &= \frac{\theta_0 - \theta_1 - \theta_t + \theta_\infty}{2}, \quad \tilde{\theta}_1 = \frac{-\theta_0 + \theta_1 - \theta_t + \theta_\infty}{2}, \quad \tilde{\theta}_t = \frac{-\theta_0 - \theta_1 + \theta_t + \theta_\infty}{2}, \\ \tilde{\theta}_\infty &= \frac{\theta_0 + \theta_1 + \theta_t + \theta_\infty}{2}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda + \kappa_1/\mu, \quad \tilde{\mu} = \mu, \quad \tilde{k} = k, \end{aligned}$$

とおいたときのフックス型微分方程式系 $D_Y(\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_t, \tilde{\theta}_\infty; \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}; \tilde{k})$ (式 (2.1) を参照のこと) となっている。関数 $\tilde{y}_1(z)$ と $\tilde{y}_2(z)$ は、式 (3.3) での $U = {}^t(u_1(z), u_2(z), \dots, u_6(z))$ を用いて

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \tilde{y}_1(z) &= \frac{\tilde{\lambda}(u_0 + \theta_0)}{\lambda} u_1(z) - \frac{k\tilde{\lambda}}{t} u_2(z) + \frac{(\tilde{\lambda} - 1)(u_1 + \theta_1)}{\lambda - 1} u_3(z) \\ &\quad + \frac{k(\tilde{\lambda} - 1)}{t - 1} u_4(z) + \frac{(\tilde{\lambda} - t)(u_t + \theta_t)}{\lambda - t} u_5(z) + \frac{k(\tilde{\lambda} - t)}{t(1 - t)} u_6(z), \\ \tilde{y}_2(z) &= \frac{\theta_\infty}{\kappa_2} \left(-\frac{tu_0(u_0 + \theta_0)}{k\lambda} u_1(z) + u_0 u_2(z) + \frac{(t - 1)u_1(u_1 + \theta_1)}{k(\lambda - 1)} u_3(z) \right. \\ &\quad \left. + u_1 u_4(z) + \frac{t(1 - t)u_t(u_t + \theta_t)}{k(\lambda - t)} u_5(z) + u_t u_6(z) \right). \end{aligned}$$

と書ける。 $u_1(z), \dots, u_6(z)$ の積分表示を使って $\tilde{y}_1(z), \tilde{y}_2(z)$ を計算することにより、以下の定理が得られる。

定理 3.2. ([15]) $\kappa_1 = (\theta_\infty - \theta_0 - \theta_1 - \theta_t)/2$, $\kappa_2 = -(\theta_\infty + \theta_0 + \theta_1 + \theta_t)/2$ とおく。 $Y = {}^t(y_1(z), y_2(z))$ がフックス型微分方程式系 $D_Y(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$ (式 (2.1) を参照のこと) の解ならば、以下で定義される関数 $\tilde{Y} = {}^t(\tilde{y}_1(z), \tilde{y}_2(z))$ はそれぞれの $i \in \{0, 1, t, \infty\}$ に対しフックス型微分方程式系 $D_Y(\kappa_1 + \theta_0, \kappa_1 + \theta_1, \kappa_1 + \theta_t, -\kappa_2; \lambda + \kappa_1/\mu, \mu; k)$ の解となる。

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \tilde{y}_1(z) &= \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} \left\{ \kappa_1 y_1(w) + (w - \tilde{\lambda}) \frac{dy_1(w)}{dw} \right\} \frac{(z - w)^{\kappa_1}}{w - \lambda} dw, \\ \tilde{y}_2(z) &= \frac{-\theta_\infty}{\kappa_2} \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} \frac{dy_2(w)}{dw} (z - w)^{\kappa_1} dw. \end{aligned}$$

よって、フックス型微分方程式系 $D_Y(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$ の解が求まっていれば、岡本変換 s_2 によって得られるフックス型微分方程式系 $D_Y(\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_t, \tilde{\theta}_\infty; \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}; \tilde{k})$ の解の積分表示を得ることができる。なお、この2つのフックス型微分方程式系が岡本変換 s_2 により対応していることは Filipuk ([3]) によってすでに確立されていたのだが、解の積分表示の具体的な式は書き下されていなかった。一方、微分方程式 (2.1) の解は $\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ の場合には Hermite-Krichever 仮設法により求められるが、これについては次章にて論じる。

さて、 $\nu = \kappa_2$ の場合に middle convolution で定まるフックス型微分方程式系を見てみよう。 A_0, A_1, A_t を式 (2.2) で定まる行列、 $U = {}^t(u_1(z), u_2(z), \dots, u_6(z))$ を微分方程式 (3.4) の解とする。 $\nu = \kappa_1$ のときと同様の議論を踏まえて $\tilde{y}_1(z), \tilde{y}_2(z)$ を式 (3.15)

での $\tilde{\lambda}$ を用いて

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \tilde{y}_1(z) &= (u_0 + \theta_0)u_1(z) - \frac{k\lambda}{t}u_2(z) + (u_1 + \theta_1)u_3(z) \\ &\quad + \frac{k(\lambda-1)}{t-1}u_4(z) + (u_t + \theta_t)u_5(z) + \frac{k(\lambda-t)}{t(1-t)}u_6(z), \\ \tilde{y}_2(z) &= \frac{\kappa_2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{\kappa_1(\lambda-\tilde{\lambda})} \left(\frac{(\lambda\mu + \kappa_1)(u_0 + \theta_0)}{k\lambda}u_1(z) - \frac{\lambda\mu + \kappa_1}{t}u_2(z) \right. \\ &\quad + \frac{((\lambda-1)\mu + \kappa_1)(u_1 + \theta_1)}{k(\lambda-1)}u_3(z) + \frac{(\lambda-1)\mu + \kappa_1}{t-1}u_4(z) \\ &\quad \left. + \frac{((\lambda-t)\mu + \kappa_1)(u_t + \theta_t)}{k(\lambda-t)}u_5(z) + \frac{(\lambda-t)\mu + \kappa_1}{t(1-t)}u_6(z) \right). \end{aligned}$$

で定める。すると、 $\tilde{y}_1(z), \tilde{y}_2(z)$ は $u_1(z), \dots, u_6(z)$ の積分表示を使うことで書き換えられ、以下の定理が成立する。

定理 3.3. ([16])

$$(3.15) \quad \tilde{\lambda} = \lambda - \frac{\kappa_2}{\mu - \frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\theta_1}{\lambda-1} - \frac{\theta_t}{\lambda-t}}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\kappa_2 + \theta_0}{\tilde{\lambda}} + \frac{\kappa_2 + \theta_1}{\tilde{\lambda}-1} + \frac{\kappa_2 + \theta_t}{\tilde{\lambda}-t} + \frac{\kappa_2}{\lambda-\tilde{\lambda}}.$$

とおく。 $Y = {}^t(y_1(z), y_2(z))$ がフックス型微分方程式系 $D_Y(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$ の解ならば、以下で定義される関数 $\tilde{Y} = {}^t(\tilde{y}_1(z), \tilde{y}_2(z))$ はそれぞれの $i \in \{0, 1, t, \infty\}$ について $D_Y(\kappa_2 + \theta_0, \kappa_2 + \theta_1, \kappa_2 + \theta_t, \kappa_2 + \theta_\infty; \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}; k)$ の解となる。

(3.16)

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(z) &= \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} \frac{dy_1(w)}{dw} (z-w)^{\kappa_2} dw, \\ \tilde{y}_2(z) &= \frac{\kappa_2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{k(\lambda-\tilde{\lambda})} \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} \left\{ \left(\frac{dy_1(w)}{dw} - \mu y_1(w) \right) \frac{1}{\lambda-w} + \frac{\mu}{\kappa_1} \frac{dy_1(w)}{dw} \right\} (z-w)^{\kappa_2} dw. \end{aligned}$$

なお、二つのフックス型微分方程式系 $D_Y(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$, $D_Y(\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_t, \tilde{\theta}_\infty; \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}; k)$ のパラメータの対応は、第六パンルヴェ方程式系においては変換 $s_0 s_3 s_4 s_2 s_4 s_3 s_0$ に対応している。

定理 3.3 より、 $y_1(z)$ がフックス型微分方程式 $D_{y_1}(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$ (式 (2.4) を参照のこと) の解であれば、式 (3.16) で定まる $\tilde{y}_1(z)$ はフックス型微分方程式 $D_{y_1}(\kappa_2 + \theta_0, \kappa_2 + \theta_1, \kappa_2 + \theta_t, \kappa_2 + \theta_\infty; \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ の解であることがわかり、

$$(3.17) \quad \begin{aligned} 0 &= \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} \frac{d}{dw} (y_1(w)(z-w)^{\kappa_2}) dw \\ &= \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} \frac{dy_1(w)}{dw} (z-w)^{\kappa_2} dw + \kappa_2 \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} y_1(w)(z-w)^{\kappa_2-1} dw, \end{aligned}$$

とあわせることにより、次の系が導かれる。

系 3.4. ([6, 16]) $y_1(z)$ がフックス型微分方程式 $D_{y_1}(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu)$ の解であれば、

$$(3.18) \quad \tilde{y}(z) = \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} y_1(w)(z-w)^{\kappa_2-1} dw,$$

は $D_{y_1}(\kappa_2 + \theta_0, \kappa_2 + \theta_1, \kappa_2 + \theta_t, \kappa_2 + \theta_\infty; \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ の解である。ここで、 $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ は式 (3.15) により定まるものである。

この系は Novikov([6]) によって別の方法で得られたものである。

さて、 μ を固定して $\lambda \rightarrow 0$ という極限を考えよう。このとき、 $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$ となり $\tilde{\mu} \rightarrow (t\theta_0\mu + \kappa_2(t(\kappa_1 + \theta_t) + \kappa_1 + \theta_1))/(t(\kappa_2 + \theta_0))$ が成立し、微分方程式 $D_{y_1}(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu)$, $D_{y_1}(\kappa_2 + \theta_0, \kappa_2 + \theta_1, \kappa_2 + \theta_t, \kappa_2 + \theta_\infty; \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ は各々がホインの微分方程式に移行する。系 3.4 と微分方程式の極限を合わせて考えてパラメータを適切に置き換えることなどにより、以下のようなホインの微分方程式における定理が得られる。

定理 3.5. ([5, 16])

$$(3.19) \quad (\mu - \alpha)(\mu - \beta) = 0, \quad \gamma' = \gamma + 1 - \mu, \quad \delta' = \delta + 1 - \mu, \quad \epsilon' = \epsilon + 1 - \mu, \\ \alpha' = 2 - \mu, \quad \beta' = -2\mu + \alpha + \beta + 1, \\ q' = q + (1 - \mu)(\epsilon + \delta t + (\gamma - \mu)(t + 1)).$$

とおき、 $v(w)$ をホインの微分方程式

$$(3.20) \quad \frac{d^2 v}{dw^2} + \left(\frac{\gamma'}{w} + \frac{\delta'}{w-1} + \frac{\epsilon'}{w-t} \right) \frac{dv}{dw} + \frac{\alpha' \beta' w - q'}{w(w-1)(w-t)} v = 0,$$

の解とする。すると、それぞれの $i \in \{0, 1, t, \infty\}$ に対して

$$(3.21) \quad y(z) = \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} v(w)(z-w)^{-\mu} dw$$

は以下のホインの微分方程式の解となる。

$$(3.22) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-t} \right) \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha \beta z - q}{z(z-1)(z-t)} y = 0.$$

この定理は、Kazakov と Slavyanov によって [5] にて得られたものと本質的に同じものになっているが、導出法は異なっている。

定理 3.5 において、 $\gamma, \delta, \epsilon, \alpha + 1/2, \beta + 1/2 \in \mathbb{Z}$ ならば $\gamma', \delta', \epsilon', \alpha' - \beta' \in \mathbb{Z} + 1/2$ が成立する。また、 $\gamma', \delta', \epsilon', \alpha' - \beta' \in \mathbb{Z} + 1/2$ のときのホインの微分方程式 (3.20) では、有限帯ポテンシャルに関連する解が知られており、モノドロミーの計算なども試みられている ([17, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13])。

よって、ホインの微分方程式 (3.22) において $\gamma, \delta, \epsilon, \alpha + 1/2, \beta + 1/2 \in \mathbb{Z}$ の場合に、 $\gamma', \delta', \epsilon', \alpha' - \beta' \in \mathbb{Z} + 1/2$ のときの有限帯ポテンシャルに関連する解を用いることによって積分 (3.21) の形の解が得られることがわかった。

4. HERMITE-KRICHEVER 仮設法

まず、フックス型微分方程式 $D_{y_1}(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu)$ (式 (2.4)) を楕円関数を用いた表示に書き換える。 $\wp(x)$ を基本周期が $(2\omega_1, 2\omega_3)$ である Weierstrass の二重周期関数、 $\omega_0(=0)$, ω_1 , $\omega_2(=-\omega_1 - \omega_3)$, ω_3 を半周期たち、 $e_i = \wp(\omega_i)$ ($i = 1, 2, 3$) とし、

$$(4.1) \quad z = \frac{\wp(x) - e_1}{e_2 - e_1}, \quad t = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}, \quad \lambda = \frac{\wp(\delta) - e_1}{e_2 - e_1}, \\ \theta_0 = l_1 + 1/2, \quad \theta_1 = l_2 + 1/2, \quad \theta_t = l_3 + 1/2, \quad \theta_\infty = -l_0 + 1/2, \\ f(x) = y_1(z)z^{-l_1/2}(z-1)^{-l_2/2}(z-t)^{-l_3/2},$$

とおく。すると式 (2.4) は次のように書き換わる。

$$(4.2) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\wp'(x)}{\wp(x) - \wp(\delta)} \frac{d}{dx} + \frac{\tilde{s}}{\wp(x) - \wp(\delta)} + \sum_{i=0}^3 l_i(l_i + 1)\wp(x + \omega_i) + C \right) f(x) = 0,$$

$$\tilde{s} = -4(e_2 - e_1)^2 \lambda(\lambda - 1)(\lambda - t) \left(\mu - \frac{l_1}{2\lambda} - \frac{l_2}{2(\lambda - 1)} - \frac{l_3}{2(\lambda - t)} \right),$$

$$C = 4(e_2 - e_1)\lambda(\lambda - 1)(\lambda - t)\mu \left\{ \mu - \frac{l_1 + \frac{1}{2}}{\lambda} - \frac{l_2 + \frac{1}{2}}{\lambda - 1} - \frac{l_3 + \frac{1}{2}}{\lambda - t} \right\} + \sum_{i=1}^3 l_i(l_i + 2)e_i$$

$$+ ((e_2 - e_1)\lambda + e_1)\{(l_1 + l_2 + l_3 + l_0 + 2)(l_1 + l_2 + l_3 - l_0 + 1) - 2\}$$

$$- 2(l_1 l_2 e_3 + l_2 l_3 e_1 + l_3 l_1 e_2),$$

この微分方程式において、確定特異点 $x = \pm\delta$ は見かけの特異点となっている。

$l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}$ ($\theta_\infty, \theta_0, \theta_1, \theta_t \in \mathbb{Z} + 1/2$) ならば式 (4.2) の解は Hermite-Krichever 仮設法の形で書かれることが知られている。

命題 4.1. ([14]) $\tilde{l}_0 = |l_0 + 1/2| + 1/2$, $\tilde{l}_i = |l_i + 1/2| - 1/2$ ($i = 1, 2, 3$) とおく。 $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}$ を固定したとき、ある多項式たち $Q(\lambda, \mu)$, $P_1(\lambda, \mu)$, $\dots$, $P_6(\lambda, \mu)$ が存在し、 $P_2(\lambda, \mu) \neq 0$ となる λ, μ に対して、微分方程式 (4.2) の解 $f_{HK}(x; l_0, l_1, l_2, l_3; \lambda, \mu)$ で

$$(4.3) \quad \wp(\alpha) = \frac{P_1(\lambda, \mu)}{P_2(\lambda, \mu)}, \quad \wp'(\alpha) = \frac{P_3(\lambda, \mu)}{P_4(\lambda, \mu)} \sqrt{-Q(\lambda, \mu)},$$

$$\kappa = \frac{P_5(\lambda, \mu)}{P_6(\lambda, \mu)} \sqrt{-Q(\lambda, \mu)}.$$

をみたす α, κ と適当な $\tilde{b}_j^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, \dots, \tilde{l}_i - 1$) を用いて

$$(4.4) \quad f_{HK}(x; l_0, l_1, l_2, l_3; \lambda, \mu) = \exp(\kappa x) \left(\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{\tilde{l}_i-1} \tilde{b}_j^{(i)} \left(\frac{d}{dx} \right)^j \Phi_i(x, \alpha) \right)$$

と書けるものが存在する。ここで

$$(4.5) \quad \Phi_i(x, \alpha) = \frac{\sigma(x + \omega_i - \alpha)}{\sigma(x + \omega_i)} \exp(\zeta(\alpha)x), \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

であり、 $\zeta(x)$, $\sigma(x)$ はそれぞれ基本周期が $(2\omega_1, 2\omega_3)$ である Weierstrass のゼータ関数、シグマ関数である。関数 $f_{HK}(x) = f_{HK}(x; l_0, l_1, l_2, l_3; \lambda, \mu)$ の周期性については

$$(4.6) \quad f_{HK}(x + 2\omega_j) = \exp(-2\zeta(\omega_j)\alpha + 2\omega_j\zeta(\alpha) + 2\kappa\omega_j)f_{HK}(x),$$

が $j = 1, 2, 3$ について成り立つ。

また、 $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}$ のならばフックス型微分方程式系 $D_Y(l_1 + 1/2, l_2 + 1/2, l_3 + 1/2, -l_0 + 1/2; \lambda, \mu; k)$ においても解を Hermite-Krichever 仮設法の形で書くことができる。

ここで、 $l_0 = l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合の Hermite-Krichever 仮設法について具体的に記述しよう ([14])。微分方程式 (4.2) は

$$(4.7) \quad \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\wp'(x)}{\wp(x) - \wp(\delta)} \frac{d}{dx} - \frac{4\mu\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)(e_2-e_1)^2}{\wp(x) - \wp(\delta)} + C \right\} f(x) = 0,$$

$$C = 2(2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 - (3\lambda^2 - 2(1+t)\lambda + t)\mu)(e_2 - e_1),$$

命題 4.1 における多項式 $Q(\lambda, \mu)$ は

$$(4.8) \quad Q(\lambda, \mu) = -2\mu(2\lambda\mu - 1)(2(\lambda-1)\mu - 1)(2(\lambda-t)\mu - 1)/(e_2 - e_1),$$

と計算される。 $\mu \neq 0$ ならば Hermite-Krichever 仮設法の形で書ける解 $f_{HK}(x) (= f_{HK}(x; 0, 0, 0, 0; \lambda, \mu))$ は

$$(4.9) \quad f_{HK}(x) = \bar{b}_0^{(0)} \exp(\kappa x) \Phi_0(x, \alpha),$$

と表示され、 α と κ は

$$(4.10) \quad \wp(\alpha) = e_1 + (e_2 - e_1) \left(\lambda - \frac{1}{2\mu} \right), \quad \wp'(\alpha) = -\frac{(e_2 - e_1)^2 \sqrt{-Q(\lambda, \mu)}}{2\mu^2},$$

$$\kappa = \frac{(e_2 - e_1) \sqrt{-Q(\lambda, \mu)}}{2\mu},$$

によって決定される。 λ, μ について解きなおすと以下ようになる。

$$(4.11) \quad \lambda = \frac{1}{e_2 - e_1} \left\{ \wp(\alpha) - e_1 - \frac{\wp'(\alpha)}{2\kappa} \right\}, \quad \mu = -\frac{(e_2 - e_1)\kappa}{\wp'(\alpha)}.$$

5. フックス型微分方程式系の解の積分表示

フックス型微分方程式系 (式 (2.1)) において $\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty \in \mathbb{Z}$, $\theta_0 + \theta_1 + \theta_t + \theta_\infty \in 1 + 2\mathbb{Z}$ ならば、定理 3.2 と命題 4.1 を組み合わせることにより、以下で述べる Hermite-Krichever 仮設法の形の関数を用いた解の積分表示が得られる。

定理 5.1. ([15]) $\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty \in \mathbb{Z}$, $\theta_0 + \theta_1 + \theta_t + \theta_\infty \in 1 + 2\mathbb{Z}$ を仮定し、

$$(5.1) \quad l_0 = \frac{-\theta_0 - \theta_1 - \theta_t - \theta_\infty + 1}{2}, \quad l_1 = \frac{\theta_0 - \theta_1 - \theta_t + \theta_\infty - 1}{2},$$

$$l_2 = \frac{-\theta_0 + \theta_1 - \theta_t + \theta_\infty - 1}{2}, \quad l_3 = \frac{-\theta_0 - \theta_1 + \theta_t + \theta_\infty - 1}{2},$$

$$\tilde{\wp}(x) = \frac{\wp(x) - e_1}{e_2 - e_1}, \quad \tilde{\kappa}_1 = \frac{\theta_0 + \theta_1 + \theta_t - \theta_\infty}{2},$$

とおく。 $f_{HK}(x) = f_{HK}(x; l_0, l_1, l_2, l_3; \lambda - \tilde{\kappa}_1/\mu, \mu)$ を、命題 4.1 での Hermite-Krichever 仮設法の形の関数とする。このとき、

$$(5.2) \quad \tilde{y}_1^{(i)}(z) = \int_{-\tilde{\wp}^{-1}(z)+2\omega_i}^{\tilde{\wp}^{-1}(z)} \left[\left\{ \frac{\tilde{\kappa}_1}{e_2 - e_1} + (\tilde{\wp}(\xi) - \lambda) \sum_{j=1}^3 \frac{l_j}{2(\wp(\xi) - e_j)} \right\} \wp'(\xi) f_{HK}(\xi) \right. \\ \left. + (\tilde{\wp}(\xi) - \lambda) \frac{df_{HK}(\xi)}{d\xi} \right] \prod_{j=1}^3 (\wp(\xi) - e_j)^{l_j/2} \frac{(z - \tilde{\wp}(\xi))^{\tilde{\kappa}_1}}{(\tilde{\wp}(\xi) - \lambda + \tilde{\kappa}_1/\mu)} d\xi,$$

で定義される関数 $\tilde{y}_1^{(i)}(z)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) はフックス型微分方程式 $D_{y_1}(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu)$ の解となっている。 $\kappa_1 \leq -1$ の場合にも、積分路を適切に考えなおすことで正当化できる。

定理 5.1 と同じ条件のもとでフックス型微分方程式系 $D_Y(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$ の解の積分表示を得ることもできる。

$\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty \in \mathbb{Z}$, $\theta_0 + \theta_1 + \theta_t + \theta_\infty \in 1 + 2\mathbb{Z}$ の場合には、フックス型微分方程式系 $D_Y(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; \lambda, \mu; k)$ の解のモノドロミーを、解の積分表示とその特異点のまわりでの挙動を調べることで原理的に計算することができる。次章において、 $(\theta_0, \theta_1, \theta_t, 1 - \theta_\infty) = (0, 0, 0, 0)$ の場合についての計算結果を紹介する。

6. 特別な場合における解の積分表示とモノドロミー

$(\theta_0, \theta_1, \theta_t, 1 - \theta_\infty) = (0, 0, 0, 0)$ の場合のフックス型微分方程式系の解の積分表示とモノドロミーについて考察する。この場合では、式 (5.2) の積分核の関数 $f_{HK}(\xi)$ は $l_0 = l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合の Hermite-Krichever 仮設法の形の関数であり、式 (4.9) で記述されている。 λ, μ と α, κ の関係を見直すことにより、以下の命題が得られる。

命題 6.1. ([15])

$$(6.1) \quad \begin{aligned} f_i(x) &= \int_{-x+2\omega_i}^x \frac{e^{(\kappa+\zeta(\alpha))\xi} \sigma(x) \sigma(\xi - \alpha)}{\sqrt{\sigma(x - \xi) \sigma(x + \xi)}} d\xi, \\ g_i(x) &= \frac{1}{4k(e_2 - e_1)} \int_{-x+2\omega_i}^x \left(\kappa^2 + \frac{\wp'(\xi) + \wp'(\alpha)}{\wp(\xi) - \wp(\alpha)} \kappa + 2\wp(\xi) + \wp(\alpha) \right) \\ &\quad \frac{e^{(\kappa+\zeta(\alpha))\xi} \sigma(x) \sigma(\xi - \alpha)}{\sqrt{\sigma(x - \xi) \sigma(x + \xi)}} d\xi, \\ \lambda &= \frac{\wp(\alpha) - e_1}{e_2 - e_1}, \quad \mu = -\frac{(e_2 - e_1)\kappa}{\wp'(\alpha)}, \end{aligned}$$

とすると、関数 ${}^t(f_i(x), g_i(x))$ ($i = 0, 1, 2, 3$, $z = (\wp(x) - e_1)/(e_2 - e_1)$) はフックス型微分方程式系 $D_Y(0, 0, 0, 1; \lambda, \mu; k)$ の解となる。そして、関数 $f_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, 3$, $z = (\wp(x) - e_1)/(e_2 - e_1)$) はフックス型微分方程式 $D_{y_1}(0, 0, 0, 1; \lambda, \mu)$ の解となる。

フックス型微分方程式系 $D_Y(0, 0, 0, 1; \lambda, \mu; k)$ の解のモノドロミーはフックス型微分方程式 $D_{y_1}(0, 0, 0, 1; \lambda, \mu)$ の解のモノドロミーと同じになっているが、それを解の積分表示を用いて計算することができる ([15])。

γ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) を、 x 平面にて $x = \omega_i$ のまわりを反時計周りに回る径路とし、 $f(x)$ に対して $f^\gamma(x)$ を γ に沿って解析接続された関数とする。

$$(6.2) \quad e[i] = \exp(2\omega_i(\kappa + \zeta(\alpha)) - 2\eta_i\alpha), \quad (i = 1, 2, 3).$$

とおく。 $e[1] \neq 1$ ならば $f_0(x), f_1(x)$ は一次独立であり、モノドロミー行列は

$$(6.3) \quad \begin{aligned} (f_0^{\gamma_0}(x), f_1^{\gamma_0}(x)) &= (f_0(x), f_1(x)) \begin{pmatrix} 1 & 2(1 - e[1]) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ (f_0^{\gamma_1}(x), f_1^{\gamma_1}(x)) &= (f_0(x), f_1(x)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2(1 - 1/e[1]) & 1 \end{pmatrix}, \\ (f_0^{\gamma_j}(x), f_1^{\gamma_j}(x)) &= (f_0(x), f_1(x)) \begin{pmatrix} 1 + 2\frac{(e[1]-e[j])(e[j]-1)}{(e[1]-1)e[j]} & 2\frac{(e[1]-e[j])^2}{(e[1]-1)e[j]} \\ -2\frac{(e[j]-1)^2}{(e[1]-1)e[j]} & 1 - 2\frac{(e[1]-e[j])(e[j]-1)}{(e[1]-1)e[j]} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

と計算される。ただし、 $j = 2, 3$ である。

また、ここで求めたモノドロミー行列に対して、(確定特異点 t の位置に対応する) 周期の比 ω_3/ω_1 を動かしたときにモノドロミーを保つための条件を考察することにより、第六パンルヴェ方程式のピカルルの解が再現されることもわかる。

さて、 $\gamma = \delta = \epsilon = 1$ and $\alpha = 3/2, \beta = 1/2$ のときのホインの微分方程式の解の積分表示を、式 (6.1) において極限をとることで導出しよう。式 (6.1) で定義される関数 $f_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) はフックス型微分方程式系 $D_{y_1}(0, 0, 0, 1; (\wp(\alpha) - e_1)/(e_2 - e_1), -(e_2 - e_1)\kappa/\wp'(\alpha))$ の解となっているが、 $\kappa = -\zeta(\alpha) + \tilde{\kappa}$ とおいて $\alpha \rightarrow 0$ の極限をとる。すると、 $i = 0, 1, 2, 3$ に対して関数

$$(6.4) \quad f_i(x) = \int_{-x+2\omega_i}^x \frac{e^{\tilde{\kappa}\xi} \sigma(x) \sigma(\xi)}{\sqrt{\sigma(x-\xi) \sigma(x+\xi)}} d\xi,$$

は $z = (\wp(x) - e_1)/(e_2 - e_1)$, $t = (e_3 - e_1)/(e_2 - e_1)$ とおくことで

$$(6.5) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-t} \right) \frac{dy}{dz} + \frac{3z + (3e_1 - \tilde{\kappa}^2)/(e_2 - e_1)}{4z(z-1)(z-t)} y = 0,$$

の解となっていることがわかる。これは、 $\gamma = \delta = \epsilon = 1$, $\alpha = 3/2, \beta = 1/2$ のときのホインの微分方程式となっており、 $\tilde{\kappa}$ によりアクセサリパラメータは任意の値をとることができる。また、 $i = 0, 1, 2, 3$ に対して関数

$$f^{(i)}(x) = \left(\prod_{i=1}^3 (\wp(x) - e_i) \right)^{1/4} \int_{-x+2\omega_i}^x \frac{e^{\tilde{\kappa}\xi} \sigma(x) \sigma(\xi)}{\sqrt{\sigma(x-\xi) \sigma(x+\xi)}} d\xi,$$

は、微分方程式

$$(6.6) \quad \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{3}{4} \wp(x) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \wp(x + \omega_i) + \tilde{\kappa}^2 \right) f(x) = 0,$$

の解となっている。この微分方程式は、ホインの微分方程式の楕円関数による表示

$$(6.7) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=0}^3 l_i(l_i + 1) \wp(x + \omega_i) - E \right) f(x) = 0,$$

の $l_0 = 1/2$, $l_1 = l_2 = l_3 = -1/2$ で $E = -\tilde{\kappa}^2$ の場合となっている。

微分方程式 (6.5) の解のモノドロミーは、式 (6.3) で得られたものに対して $\kappa = -\zeta(\alpha) + \tilde{\kappa}$ を代入して $\alpha \rightarrow 0$ とすることで得られる。すなわち、 $e^{2\omega_1 \tilde{\kappa}} \neq 1$ ならば $f_0(x)$ と $f_1(x)$ は一次独立であり、モノドロミー行列は以下ようになる。

$$(6.8) \quad (f_0^{\gamma_0}(x), f_1^{\gamma_0}(x)) = (f_0(x), f_1(x)) \begin{pmatrix} 1 & 2(1 - e^{2\omega_1 \tilde{\kappa}}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(f_0^{\gamma_1}(x), f_1^{\gamma_1}(x)) = (f_0(x), f_1(x)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2(1 - e^{-2\omega_1 \tilde{\kappa}}) & 1 \end{pmatrix},$$

$$(f_0^{\gamma_j}(x), f_1^{\gamma_j}(x)) \quad (j = 2, 3)$$

$$= (f_0(x), f_1(x)) \begin{pmatrix} 1 + 2 \frac{(e^{2\omega_1 \tilde{\kappa}} - e^{2\omega_j \tilde{\kappa}})(e^{2\omega_j \tilde{\kappa}} - 1)}{(e^{2\omega_1 \tilde{\kappa}} - 1)e^{2\omega_j \tilde{\kappa}}} & 2 \frac{(e^{2\omega_1 \tilde{\kappa}} - e^{2\omega_j \tilde{\kappa}})^2}{(e^{2\omega_1 \tilde{\kappa}} - 1)e^{2\omega_j \tilde{\kappa}}} \\ -2 \frac{(e^{2\omega_1 \tilde{\kappa}} - 1)^2}{(e^{2\omega_1 \tilde{\kappa}} - 1)e^{2\omega_j \tilde{\kappa}}} & 1 - 2 \frac{(e^{2\omega_1 \tilde{\kappa}} - e^{2\omega_j \tilde{\kappa}})(e^{2\omega_j \tilde{\kappa}} - 1)}{(e^{2\omega_1 \tilde{\kappa}} - 1)e^{2\omega_j \tilde{\kappa}}} \end{pmatrix}.$$

REFERENCES

- [1] Dettweiler M. and Reiter S., An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem. *Algorithmic methods in Galois theory J. Symbolic Comput.* **30** (2000), 761–798.
- [2] Dettweiler M. and Reiter S., On the middle convolution, Preprint, math.AG/0305311.
- [3] Filipuk G., On the middle convolution and birational symmetries of the sixth Painleve equation, *Kumamoto J. Math.* **19** (2006), 15–23.

- [4] Gesztesy F. and Weikard R., Treibich-Verdier potentials and the stationary (m)KdV hierarchy, *Math. Z.* **219** (1995), 451–476.
- [5] Kazakov, A. Ya.; Slavyanov, S. Yu. Integral relations for special functions of the Heun class. (Russian) *Teoret. Mat. Fiz.* 107 (1996), no. 3, 388–396; translation in *Theoret. and Math. Phys.* 107 (1996), no. 3, 733–739 (1997)
- [6] Novikov, D. P., Integral transformation of solutions of a Fuchs-class equation that corresponds to the Okamoto transformation of the Painlevé VI equation. (Russian) *Teoret. Mat. Fiz.* 146 (2006), no. 3, 355–364; translation in *Theoret. and Math. Phys.* 146 (2006), no. 3, 295–303
- [7] Ronveaux A.(ed.), *Heun's differential equations*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [8] Smirnov A. O., Elliptic solitons and Heun's equation, *The Kowalevski property*, 287–305, CRM Proc. Lecture Notes, 32, Amer. Math. Soc., Providence (2002).
- [9] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system I: the Bethe Ansatz method. *Comm. Math. Phys.* **235** (2003), 467–494.
- [10] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system II: the perturbation and the algebraic solution, *Electron. J. Differential Equations* **2004** no. 15 (2004), 1–30.
- [11] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system III: the finite gap property and the monodromy, *J. Nonlinear Math. Phys.* **11** (2004), 21–46.
- [12] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system IV: the Hermite-Krichever Ansatz, *Comm. Math. Phys.* **258** (2005), 367–403.
- [13] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system V: generalized Darboux transformations, *J. Nonlinear Math. Phys.* **13** (2006), 584–611.
- [14] Takemura K., Fuchsian equation, Hermite-Krichever Ansatz and Painlevé equation, Preprint, math.CA/0501428.
- [15] Takemura K., Integral representation of solutions to Fuchsian system and Heun's equation, Preprint, arXiv:0705.3358 [math.CA].
- [16] Takemura K., in preparation.
- [17] Treibich A. and Verdier J.-L., Revêtements exceptionnels et sommes de 4 nombres triangulaires, *Duke Math. J.* **68** (1992), 217–236.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, YOKOHAMA CITY UNIVERSITY, 22-2 SETO, KANAZAWA-KU, YOKOHAMA 236-0027, JAPAN.

E-mail address: takemura@yokohama-cu.ac.jp