

Certain classes of irreducible representations (joint work with Kazunori Nakamoto)

面田 康裕 (明石高専)

1 序章

今回話させていただく内容は山梨大学の中本氏との共同研究に基づくものである。群の表現全体の集合のなかで開集合をなすような特別なクラスの表現達についての研究報告を行う。まず、基本的な問題を提示する。

問題 1. 群 G の既約な n 次元表現 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ について、 $\dim V_1 + \dim V_2 = n$ を満たす任意の 2 つの部分空間 V_1, V_2 を取るとき、うまく $g \in G$ をとることで、 $\rho(g)V_1 \oplus V_2 = V$ となりうるか。

これに対する答えは一般には否である。そこで、自然に以下の問が考えられる。

問題 2. 問題 1 が成り立つような表現は n 次元表現全体のなかでどのような位置を占めるものであろうか。

この問題が今回の主題である。

2 定義および性質

以下、 G を群、 V を体 k 上の n 次元ベクトル空間とする。

定義 2.1. $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ を群 G の n 次表現とする。 ρ が m -thick であるとは、 V の任意の m 次元部分空間 V_1 と任意の $(n - m)$ 次元部分空間 V_2 に対して、ある元 $g \in G$ が存在して、 $\rho(g)V_1 \oplus V_2 = V$ が成り立つときをいう。 ρ が thick であるとは、 $0 < m < n$ なる任意の整数 m に対して、 ρ が m -thick であるときをいう。

定義 2.2. $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ を群 G の n 次表現とする。 ρ が m -dense であるとは、 ρ から自然に誘導される G の外積表現 $\Lambda^m V$ が既約であるときをいう。 ρ が dense であるとは、 $0 < m < n$ なる任意の整数 m に対して、 ρ が m -dense であるときをいう。

dense 、 thick 、 $\mathrm{irreducible}$ に関して成り立つ性質をいくつか述べる。

命題 2.3. $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ を群 G の n 次表現とする。 ρ が m -thick であることと $(n-m)$ -thick であることは同値である。また、 ρ が m -dense であることと $(n-m)$ -dense であることは同値である。

命題 2.4. 群 G の表現について、次が成り立つ。

$$m\text{-dense} \implies m\text{-thick} \implies 1\text{-dense} \iff 1\text{-thick} \iff \mathrm{irreducible}$$

特に次が成り立つ:

$$\mathrm{dense} \implies \mathrm{thick} \implies \mathrm{irreducible}$$

Proof. V を n 次元ベクトル空間として考える。まず $m\text{-dense} \implies m\text{-thick}$ を示す。 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ は dense であり、 V_1, V_2 は $\dim V_1 = m$ かつ $\dim V_2 = n - m$ を満たす V の部分空間であるとしておく。このとき、以下のペアリング

$$\Lambda^m V \otimes \Lambda^{n-m} V \rightarrow \Lambda^n V \cong k$$

は完全で G -equivariant である。そこで V_1 の基底として $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ を、 V_2 の基底として $\{f_1, f_2, \dots, f_{n-m}\}$ をとる。このとき、 $\Lambda^m V$ の既約性から、 $\{\wedge^m(\rho)(g)(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_m) \mid g \in G\}$ はベクトル空間として $\Lambda^m V$ を張る。よって、

$$(\wedge^m(\rho)(g)(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_m)) \wedge (f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_{n-m}) \neq 0$$

をみたすような G の元 g が存在する。このとき、 $\rho(g)V_1 \oplus V_2 = V$ である。それゆえ、 ρ は m -thick である。

次に m -thick なら既約であることを示す。 ρ が既約でないすると、 V の非自明な G 不変部分空間 V' が存在する。 $\ell := \dim V'$ としておこう。 $\ell \leq \min(m, n-m)$ である場合には、 $V' \subseteq V_1$ および $V' \subseteq V_2$ を満たすように V_1, V_2 をとれば、群 G の任意の元 g に対して、 $\rho(g)V_1 \cap V_2 \supseteq V'$ が成り立つ。このとき、 ρ は m -thick ではない。 $\ell > \min(m, n-m)$ である

場合を考える。 m -thick と $(n-m)$ -thick の同値性により、 $m \leq n-m$ の場合のみを考えればよい。 $m \leq \ell \leq n-m$ の場合には、 $V_1 \subseteq V' \subseteq V_2$ を満たすように V の部分空間 V_1, V_2 を取れば、群 G の任意の元 g に対して、 $\rho(g)V_1 \subseteq V' \subseteq V_2$ が成り立つ。よって、 ρ は m -thick ではない。また、 $m \leq n-m \leq \ell$ の場合には、 $V_1 \subseteq V'$ と $V_2 \subseteq V'$ の両方を満たすように V の部分空間 V_1, V_2 を取れば、群 G の任意の元 g に対して、 $\rho(g)V_1 \subseteq V'$ かつ $V_2 \subseteq V'$ が成り立つ。よって、 $\rho(g)V_1 \oplus V_2 = V$ とはなりえず、 ρ は m -thick ではない。これらのことより、 $\ell > \min(m, n-m)$ の場合にも、 m -thick なら既約であることが示された。

最後に 1-dense, 1-thick 及び既約性の同値性をみる。これまでの議論により、 $1\text{-dense} \implies 1\text{-thick} \implies \text{irreducible}$ は示されている。また $\text{irreducible} \implies 1\text{-dense}$ は dense の定義より明らかである。よって、1-dense, 1-thick 及び既約性は同値であることが示された。□

系 2.5. 3 次以下の表現 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ について、

$$\text{dense} \iff \text{thick} \iff \text{irreducible}$$

系 2.5 から 3 次以下の表現については、これらの概念は全て一致する。差異が生じるのは 4 次以上の表現に対してである。

3 モジュライ

この章では、序章で提示された問題に答える。つまり、 m -thick な表現が m 次元 表現全体の中でどのような位置を占めるものであるかという問に対する一つの答えを述べる。まず、 m -thick な表現の特徴付けに必要な定義をする。

定義 3.1. V を体 k 上の n 次元ベクトル空間とする。 V の d 次元部分ベクトル空間 V' ($0 < d < n$) により $\mathbb{P}_*(\Lambda^d V)$ の元 $[\Lambda^d V']$ が定まる。簡単のため以降は $[\Lambda^d V']$ を $\Lambda^d V' \in \Lambda^d V$ と同一視する。部分ベクトル空間 $W \subseteq \Lambda^d V$ がある d 次元部分ベクトル空間 V' から得られるゼロでないベクトル $\Lambda^d V'$ を含むとき、 W は実現可能であるという。

このとき、 m -thick でない表現は以下のように特徴付けられる。

命題 3.2. $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ を群 G の n 次表現とする。 ρ が m -thick でないことは以下と同値である。

G 不変で実現可能な部分ベクトル空間 $W_1 \subseteq \Lambda^m V$ と $W_2 \subseteq \Lambda^{n-m} V$ で $W_1^\perp = W_2$ を満たすものが存在する。

この特徴付けを用いることで、 m -thick でない n 次元表現のなす集合が n 次元表現全体のなす多様体の中で閉集合であることが証明できるので、次の定理を得る。

定理 3.3. $\text{Rep}_n(G)$ を [2] の意味での群 G の代数閉体 k 上の n 次表現からなる表現多様体とする (一般には既約性は保証されない)。 $\text{Rep}_n(G)$ の中で m -thick (もしくは m -dense) である表現全体は、 GL_n 不変な開集合をなす。特に、thick (もしくは dense) である表現全体は、 GL_n 不変な開集合である。

群 G の n 次元表現全体の集合 $\text{Rep}_n(G)$ への GL_n の共役による作用での商を特性多様体 $\text{Ch}_n(G)$ と書くことにする。

系 3.4. 群 G の代数閉体 k 上の n 次既約表現のモジュライ $\text{Ch}_n(G)_{\text{irr}}$ は、 n 次 m -thick な表現 (もしくは m -dense な表現) のモジュライを開集合として含む。特に、 n 次 thick な表現のモジュライ $\text{Ch}_n(G)_{\text{thick}}$ および n 次 dense な表現のモジュライ $\text{Ch}_n(G)_{\text{dense}}$ を開部分スキームとして含む。

Remark 3.5. これらのモジュライに関する主張は、thick や dense、既約性の代わりに *absolutely thick* や *absolutely dense*、絶対既約性の概念を用いることで一般の可換環上の話に拡張される。

ここでの表現多様体 $\text{Rep}_n(G)$ や特性多様体 $\text{Ch}_n(G)$ などの正確な定義や様々な性質については中本 [2] を参照してください。

4 具体例

thick、dense、及び既約性に差が生じる可能性があるのは表現空間の次元が 4 以上のときであった。ではまず実際に 4 次元の場合に差が生じていることを見よう。そのために必要な判定法を述べる。

Proposition 4.1. k を代数閉体、 V を k 上の 4 次元ベクトル空間とする。群 G の表現 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ にたいして、 ρ が thick であることは以下と同値である。

ρ は既約であり、自然に得られる表現 $\wedge^2 \rho : G \rightarrow \text{GL}(\wedge^2 V)$ は、 $2 \leq \dim W \leq 3$ であるような G 不変部分空間 $W \subset \wedge^2 V$ をもたない。

例 4.2. $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ とする。 W を自然な 2 次元表現とすると、 $V = \mathrm{Sym}^3 W$ は G の 4 次元表現であり、その 2 階外積表現は

$$\Lambda^2 V = \mathrm{Sym}^5 W \oplus \mathrm{Sym}^0 W$$

のように既約分解する。よって、上の判定法により、この表現は *thick* はあるが *dense* ではないことがわかる。

例 4.3. n の分割 $\lambda = (n-1, 1)$ に対応するヤング図形から得られる n 次対称群 S_n の自然な $(n-1)$ 次元表現を V とする。このとき、よく知られているように $\Lambda^i V$ ($1 \leq i \leq n-1$) は既約であるので、 V は *dense* である。特に $n=5$ の場合には 4 次元表現で *dense* である例となっている。さらにこの場合に 5 次対称群 S_5 の作用を 5 次交代群 A_5 に制限することで得られる表現を再び V と書くことにすると、 $\Lambda^2 V$ は 2 つの 3 次元既約表現の和に既約分解される。このとき、上の判定法により、5 次交代群 A_5 の表現 V は *thick* でないことがわかる。

例 4.4. $F_2 := \langle a, b \rangle$ をランク 2 の自由群とする。 F_2 の 4 次元表現 ρ を

$$\begin{aligned} \rho : F_2 &\rightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ b &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & r & s \\ x & y & 0 & 0 \\ z & w & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

により定義する。ここで α, β は 0 でない複素数で $\alpha \neq \beta$ であるとする。このとき、 p, q, r, s, x, y, z を *generic* にとれば、 ρ は既約であるが *2-thick* ではない。

これらの例により、表現空間の次元が 4 以上の場合には、 $\text{dense} \Rightarrow \text{thick} \Rightarrow \text{irreducible}$ の逆は一般には成り立たないことがわかった。

5 次元表現に関しても、4 次元の場合と同様の判定法がある。

Proposition 4.5. k を代数閉体、 V を k 上の 5 次元ベクトル空間とする。群 G の表現 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ にたいして、 ρ が *thick* であることは以下と同値である。

ρ は既約であり、自然に得られる表現 $\wedge^2 \rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(\wedge^2 V)$ は、 $4 \leq \dim W \leq 6$ であるような G 不変部分空間 $W \subset \wedge^2 V$ をもたない。

6 以上の次元の表現については、判定が非常に難しいのが現状であるが、幾つかの例を挙げておく。まず、先ほど述べたランク 2 の自由群の 4 次元表現を一般化する。

例 4.6. $F_2 := \langle a, b \rangle$ をランク 2 の自由群、 k は標数 0 の代数閉体とする。さらに、 l, m を自然数とし $n := lm$ により n を定める。このとき、 F_2 の n 次元表現 ρ を

$$\begin{aligned} \rho : F_2 &\rightarrow \mathrm{GL}_n(k) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m & & & A \\ I_m & \mathbf{0}_m & & \\ & I_m & \mathbf{0}_m & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & I_m & \mathbf{0}_m \end{pmatrix} \\ b &\mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m & & & B_l \\ B_1 & \mathbf{0}_m & & \\ & B_2 & \mathbf{0}_m & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & B_{l-1} & \mathbf{0}_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

により定義する。ここで各ブロックは m 次正方行列であり、 B_i 達は *generic* に、そして A は以下で定まるものとする。

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_m \end{pmatrix}, \quad a_i \in k \setminus \{0\}, \quad a_1, \dots, a_m : \text{distinct}.$$

こうして得られた表現 ρ は既約であるが m -thick ではない。

例 4.7. [1] 定理 4.4.2 を使えば、 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の standard 表現 $\mathbb{C}^n$ の外積 $S^2 \mathbb{C}^n$ は既約であるが、 $3 \leq m \leq \frac{n(n+1)}{2} - 3$ なる m に対して、 m -thick ではないことがわかる。但し $n \geq 4$ とする。

例 4.8. [1] 定理 4.4.4 を使えば、 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の standard 表現 $\mathbb{C}^n$ の外積 $\wedge^2 \mathbb{C}^n$ は既約であるが、 $3 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2} - 3$ なる m に対して、 m -thick ではないことがわかる。但し $n \geq 4$ とする。

これらの例から分かるように、概均質ベクトル空間であっても *thick* でないような例がある。また、この例は以下の命題を系に持つ。

Proposition 4.9. $n \geq 4$ のとき、任意の群 G の n 次元表現 V について、表現 S^2V, Λ^2V は *thick* ではない。

5 一般化

m -*thick*、 m -*dense*、既約性には自然な一般化が考えられる。

定義 5.1. $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ を群 G の n 次表現とする。 ρ が (i, j) -*thick* であるとは、 V の任意の i 次元部分空間 V_1 と任意の j 次元部分空間 V_2 に対して、ある元 $g \in G$ が存在して、 $\rho(g)V_1 \cap V_2 = \{0\}$ が成り立つときをいう。

定義 5.2. $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ を群 G の n 次表現とする。 ρ が m -*dense* でないとは、 ρ から自然に誘導される G の外積表現 Λ^iV, Λ^jV において、自明でない G 不変部分空間 $W_1 \subset \Lambda^iV, W_2 \subset \Lambda^jV$ が存在して、 $W_1 \wedge W_2 = 0$ を満たしているときをいう。

定義 5.3. $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ を群 G の n 次表現とする。 ρ が m -*irreducible* であるとは、 V が m 次元以下の非自明な G 不変部分空間を持たないときをいう。

これらについても m -*thick*、 m -*dense*、*irreducible* に類似の性質が成り立つ。

命題 5.4. $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ を群 G の n 次表現とする。 ρ が (i, j) -*thick* であることと (j, i) -*thick* であることは同値である。また、 ρ が (i, j) -*dense* であることと (j, i) -*dense* であることは同値である。

命題 5.5. 群 G の表現について、次が成り立つ。

$$(i, j)\text{-dense} \Rightarrow (i, j)\text{-thick} \Rightarrow (1, i+j-1)\text{-dense} \Leftrightarrow \\ (1, i+j-1)\text{-thick} \Leftrightarrow (i+j-1)\text{-irreducible}$$

こうした一般化に関して、次の性質が得られる。

命題 5.6. $i+j+1 \leq n$ のとき、群 G の n 次元表現について、次が成り立つ。

$$(i+1, j)\text{-thick} \Rightarrow (i, j)\text{-thick} \\ (i+1, j)\text{-dense} \Rightarrow (i, j)\text{-dense}$$

m -thick の場合と異なり、 (i, j) -thick であるが既約でない場合がある。

例 5.7. $\rho : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ を $\rho(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ により定まる 4 次元表現とする。この表現は $(1, 1)$ -thick であるが既約ではない。

特別な場合には (i, j) -thick であることから既約性が判定できる場合もある。

命題 5.8. 群 G の表現 V が完全可約かつ $2(i + j) > n$ であるとする。このとき、 (i, j) -thick ならば、 V は既約表現である。

(i, j) -thick でないことの以下のような特徴付けも m -thick でない場合と同様に得られる。

命題 5.9. $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ を群 G の n 次表現とする。 ρ が (i, j) -thick でないことは以下と同値である。

G -不変で実現可能な部分ベクトル空間 $W_1 \subseteq \Lambda^i V$ と $W_2 \subseteq \Lambda^j V$ で $W_1 \wedge W_2 = 0$ を満たすものが存在する。

(i, j) が様々な値をとるときの (i, j) -thick、 (i, j) -dense 達の相互関係については今後の研究課題である。

参考文献

- [1] Howe, R., Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond, Piatetski-Shapiro, Ilya (ed.) et al., The Schur lectures (1992), Ramat-Gan: Bar-Ilan University, Isr. Math. Conf. Proc. 8, (1995) 1-182.
- [2] Nakamoto, K., Representation varieties and character varieties, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36**, No. 2, (2000) 159-189.