

一般化された Verma 加群、過去と現在

The theory of generalized Verma modules old and new

松本久義

Hisayosi Matumoto

Graduate School of Mathematical Sciences

University of Tokyo

3-8-1 Komaba, Tokyo

153-8914, JAPAN

e-mail: hisayosi@ms.u-tokyo.ac.jp

一般化された Verma 加群については、可約性と b -関数の関係とか、annihilator の生成元の具体的な構成など、重要な研究の流れがあるが、ここでは準同型の分類問題に焦点を絞って話しをすることにする。

準同型の分類問題には以下のような動機付けがある。F.Klein によるエルランゲン目録は幾何を群とその等質空間への作用として理解しようとしたものと見なせる。その後、Cartan, Weyl らによって古典的な幾何を局所的なモデルとする大域的な幾何学の枠組が整備されるようになった。そのようなもののうち等角幾何、CR 幾何といったようなモデル空間が実簡約群の等質空間になっているものがある。このような空間は、一般化された旗多様体 (generalized flag manifold) というものの例であるが、90 年代に Baston や Eastwood らが、等角幾何、CR 幾何の一般化として一般化された旗多様体をモデルとする、放物幾何 (Parabolic geometry) という枠組みがある。放物幾何の場合最初の自明でない例である等角幾何においては Yamabe 作用素が微分不変式の例になっている。そこで一般的な放物幾何に対して Yamabe 作用素にあたるものを分類するという問題がある。そのためには、まずモデル空間の場合を考察しそれが、大域的な曲がった状況でも対応物があるかということになる。例えば等角幾何においてはモデル空間については結果は古典的であり、大域化は近年 Gover-平地 [1] によって完成された。一方、一般的な状況ではモデル空間についてさえ問題は未解決である。このような微分不変式で線形なものを求める問題は、一般化された Verma 加群の間の準同型を分類することと同値であることが知られているのである ([Collingwood-Shelton 1990]、[Huang 1993])。

§ 1. Verma 加群

Verma 加群を考えるため $\mathfrak{g}$ を複素半単純 Lie 代数としよう。 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とし三角分解 $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{n}} + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ を固定する。 Verma 加群は最高ウェイトを持つ加群の中で普遍性を持つものであるから、三角分解が意味を持つ状況なら、Kac-Moody 代数などでも定義できるのであるが、ここでは有限次元の場合だけ考えることにする。 Δ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に関するルート系とし、 Δ^+ を $\mathfrak{n}$ に対応する正ルート系とする。 $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数となる。 また ρ で全ての正ルートの和の 2 分の 1 を表す。 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\mathfrak{h}$ の元がウェイト λ で $\mathfrak{n}$ の元が 0 で作用するような $\mathfrak{b}$ の一次元表現を $\mathbb{C}_\lambda$ で表す。 $U(\mathfrak{g})$ および $U(\mathfrak{b})$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$ および $\mathfrak{b}$ の普遍包絡代数とすると、次のような誘導加群を $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して考える。

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda-\rho}.$$

これが Verma 加群である。 わざわざ、 ρ だけずらすのであるが、結果的にはこうした方がいいいろいろな Verma 加群についての記述が簡単になるので、このように定義するのが主流だとは思ふ。たとえば $M(\lambda)$ の形式指標を考えてみよう。まず Poincaré-Birkhoff-Witt の定理より $U(\mathfrak{g}) = U(\bar{\mathfrak{n}}) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{b})$ であるから、ベクトル空間としては $M(\lambda) = U(\bar{\mathfrak{n}}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\lambda-\rho}$ となる。 $\bar{\mathfrak{n}}$ の作用は左からの積であり、 $\mathfrak{h}$ の作用は $U(\bar{\mathfrak{n}})$ への adjoint action をウェイト $\lambda - \rho$ だけひねったものになる。($\mathfrak{n}$ の作用は複雑である。) $M(\lambda)_\mu$ を $M(\lambda)$ の μ - ウェイト空間とするときこの次元はいわゆる Kostant の分割関数で書ける。各 $\mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して e^μ を形式的な記号とすると形式和

$$ch(M(\lambda)) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \dim M(\lambda)_\mu e^\mu$$

が形式指標である。 $e^\mu e^\nu = e^{\mu+\nu}$ で積構造を入れて形式的な計算を適当な環の中で考えると

$$ch(M(\lambda)) = \frac{e^\lambda}{D}.$$

となる。ただし D は Weyl の指標公式に出てくる Weyl 分母でありパラメータ λ によらない。

Verma 加群というが、別に Verma が初めて考えたものではなく、起源自体はもっと古い。私の知る限りではすでに [Harish-Chandra 1951] に出てくる。他の重要な表現論の概念同様もしかしたら Verma 加群も Harish-Chandra が初めて考えたのかもしれない。 Verma 加群を $M(\lambda)$ と書くこの記法の起源は私は知らないが、少なくとも Dixmier の教科書 [Dixmier 1977] はこう書いておりかなり影響力があったようで、その後の [Knapp 2002] など Verma 加群は $M(\lambda)$ と書く人は多い。なお Verma 加群 $M(\lambda)$ は既約商加群を一意に持つがそれは Dixmier 流には $L(\lambda)$ と書かれる。 $L(\lambda)$ は最高ウェイト $\lambda - \rho$ を持つ既約 $U(\mathfrak{g})$ -加群でありそのようなものは同型を除いて一意であることが Verma 加群の普遍性からわかる。

Verma 加群の名前の由来となった [Verma 1968] であるが、この論文では Verma は 2 つの Verma 加群の間の準同型を調べた。まず 0 でない準同型は必ず単射になることがすぐわかる。ま 0 でない Verma 加群の間の準同型は存在するならスカラー倍を除くと一意であることもわかる。

Verma の結果を説明するためにもう少し記号を導入する。 W を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ についての Weyl 群、 $\alpha \in \Delta$ に対して s_α で対応する W の元である鏡映を表す。

定理 1.1. ([Verma 1968]) $\alpha \in \Delta^+$, $\lambda \in \mathfrak{h}$ とする。もし $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ が非負整数になるならば、 $M(s_\alpha \lambda)$ から $M(\lambda)$ への 0 でない準同型が存在する。

まず注意しておく、定理 1.1 は α が simple root のときは非常に易しい。というのは $X_{-\alpha}$ を 負ルート $-\alpha$ についての (0 でない) ルートベクトルであるとするとき、 $k = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ として、 $X_{-\alpha}^k \otimes 1 \in M(\lambda)$ が $\mathfrak{h}$ についてウェイト $s_\alpha \lambda - \rho$ を持ち、 $\mathfrak{n}$ が 0 で作用することが容易にわかるからである。 $M(s_\alpha \lambda)$ の最高ウェイトベクトル $1 \otimes 1$ の行先を $X_{-\alpha}^k \otimes 1$ とすれば準同型が定まる。 α が simple root とは限らない一般の場合は、 $1 \otimes 1$ の行先を具体的に決めるのはじつは容易ではない。Verma が用いたのは次のような議論である。 k を上のようにとり次のような $\mathfrak{h}^*$ の部分集合を考える。

$$S = \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid M(\mu - k\alpha) \subseteq M(\mu)\}$$

Verma はこれが、Zariski 位相での閉集合 (つまり多項式の共通零点の集合) になることを見抜いた。一方、simple root では定理が成り立つことなどを使って、 λ が integral という条件のもとでは定理が成り立つことがわかる。そこで S に含まれる integral なウェイト全体の Zariski 閉包は再び S に含まれるので一般の λ でも定理が成り立つことが示せるのである。

Verma は上の構成で出来た準同型の合成ですべての準同型が尽くされると予想したが、これを示したのが、Bernstein-Gelfand-Gelfand の有名な論文 [Bernstein-Gelfand-Gelfand 1971] である。もっとも、そのころは東西間の交流が乏しかったせいで、Gelfand たちは Verma とは独立に Verma の結果も含めて解いたらしい。Bernstein-Gelfand-Gelfand の証明はかなりテクニカルなように見え、方針を分りやすく述べるのは私では力不足である。しかし一つ指摘しておく、彼らは Verma 加群と有限次元表現のテンソル積加群を考えた。有限次元表現のテンソル積加群を考えるというテクニックは半単純リー代数の表現論において基本的な手法として、多くの研究者によるその後のいろいろな重要な研究で使われることになる。

準同型の構成の副産物として次のようなことが得られる。まず、Bernstein-Gelfand-Gelfand の上記の結果の証明は $M(\mu) \subseteq M(\lambda)$ であることと $L(\mu)$ が $M(\lambda)$ の組成列に現れることと同値であることをも導くものであった。($M(\lambda)$ は $U(\mathfrak{g})$ - 加群として有限の長さをもつ。) 明らかに前者から後者は従うが逆は明らかではない。組成列に現れる既約加群は全てある Verma 加群の既約商加群になっていることも容易にわかるので、あとは重複度を求める問題が残る。最初は重複度自由と思われていたようだがそうではない。この問題は約 10 年後に解かれることになるが、20 世紀末の表現論の中心に位置するような大理論に発展することになる。

次もまた重要な話である。 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を dominant regular integral であるウェイトであるとする。Weyl 群の元 $x, y \in W$ に対して、半順序 $x \leq y$ を $M(x\lambda) \subseteq M(y\lambda)$ で定める。(実は λ の取り方によらないで定まる。) これが Bruhat order に他ならない。この Bruhat order は次のような幾何的な解釈がある。 G を $\mathfrak{g}$ に対応する連結複素半単純群とし、 B を $\mathfrak{b}$ に対応する Borel 部分群と

する。等質空間 G/B は旗多様体といわれる。旗多様体の B -分解 (要するに G の B についての両側 coset 分解) は Bruhat 分解といわれる。 H を Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ に対応する G の Cartan 部分群としたとき Weyl 群は H の G における正規化群を H で割った商群とみなせる。各 W の元 w に対して H の G における正規化群への引き戻しを一つ選び同じ文字 w であらわすとしよう。すると、 $\{w/B \mid w \in W\}$ は、旗多様体の B -分解における完全代表系になる。 w/B を含む B -軌道を U_w と書こう。すると実は、Bruhat order $x \leq y$ は B -軌道の closure relation $\overline{U_x} \supseteq U_y$ に一致するのである。Bruhat order が本格的に研究されるのは [Deodhar 1977] 以降である。ところで、代数的な対象である Verma 加群と旗多様体上の幾何である Bruhat 分解の両方に Bruhat order がでてくるのはどうしてなのだろうか？ そこで Bernstein-Gelfand-Gelfand のもう一つの結果 BGG resolution に触れる。 $w \in W$ にたいして $\ell(w)$ で w の reduced expression の長さとする。(これは U_w の次元に一致する。) $d = \#\Delta^+$ とする。 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を dominant regular integral weight として、各 $0 \leq i \leq d$ に対して以下のように置く。

$$C_i = \bigoplus_{\ell(w)=i} M(w\lambda).$$

すると以下のような完全系列が得られる。

$$0 \rightarrow C_d \rightarrow C_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow M(\lambda) \rightarrow L(\lambda) \rightarrow 0.$$

これが BGG resolution である。この場合 $L(\lambda)$ は最高ウェイト $\lambda - \rho$ をもつ既約有限次元表現である。一方 Verma 加群の形式指標の計算結果」と BGG resolution を組み合わせると

$$ch(L(\lambda)) = \sum_{i=0}^d (-1)^{\ell(w)} ch(C_i) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w\lambda}}{D}$$

となり Weyl の指標公式が出てくる。その後 [Kempf 1978] において、BGG resolution の幾何的な意義が明らかになった。まず Borel-Weil の定理で、大域切断の空間が $L(\lambda)$ の dual $L(\lambda)^*$ に一致するような G/B の正則な等質直線束 $\mathcal{C}_\lambda$ を考える。ここで論文の表題になっている Grothendieck-Cousin complex を Bruhat 分解に対して考えると、各 U_x ($x \in W$) に台を持つ $\mathcal{C}_\lambda$ を係数とする局所コホモロジーによる $L(\lambda)^*$ の resolution が出てくる。実は局所コホモロジーの (ある種の) 双対は Verma 加群 $M(x\lambda)$ であり Grothendieck-Cousin complex の双対は BGG resolution に他ならないのである。これで Verma 加群およびその間の準同型の旗多様体上の幾何学での解釈が得られた。

§ 2. Lepowsky による一般化された Verma 加群

Verma 加群は Borel 部分代数の 1 次元表現からの誘導加群であったが、一般化された Verma 加群は放物型部分代数の既約有限次元表現からの誘導加群として、[Lepowsky 1977a] によって定義された。Lepowsky はこれに先立ついくつかの論文でこの種の加群 (の特別な場合) を調べていた

が、generalized Verma module と呼んだのは上記の論文が初めてのようである。(もちろん、一般化された Verma 加群の特殊なものについては、正則離散系列の Harish-Chandra 加群など以前から研究されていた。)

きちんと述べるためまず $\mathfrak{b}$ を含むような $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数についての記号を導入する。以下正ルート系 Δ^+ の基底 Π の部分集合 Θ を固定する。 $\bar{\Theta}$ で Δ の元であって Θ の元の整数係数一次結合で書けるもの全体をあらわす。 $\alpha \in \Delta$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha$ で対応するルート空間を表す。以下のように $\mathfrak{g}$ の部分代数を導入する。 $\mathfrak{a}_\Theta = \{H \in \mathfrak{h} \mid \forall \alpha \in \Theta \ \alpha(H) = 0\}$, $\mathfrak{l}_\Theta = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \bar{\Theta}} \mathfrak{g}_\alpha$,

$$\mathfrak{n}_\Theta = \sum_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \bar{\Theta}} \mathfrak{g}_\alpha, \bar{\mathfrak{n}}_\Theta = \sum_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \bar{\Theta}} \mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{l}_\Theta + \mathfrak{n}_\Theta. \text{ すると } \mathfrak{p}_\Theta \text{ は } \mathfrak{b} \text{ を含む } \mathfrak{g} \text{ の放物型部分代数}$$

であり $\mathfrak{l}_\Theta$ はその Levi part, $\mathfrak{n}_\Theta$ は nilradical となる。また逆に $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$ なる放物型部分代数に対しては ある $\Theta \subseteq \Pi$ で $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\Theta$ となるものが一意に存在する。 W_Θ で $(\mathfrak{l}_\Theta, \mathfrak{h})$ の Weyl 群を表すと、 W_Θ は $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Theta\}$ によって生成される W の部分群になる。 W_Θ の最長元を w_Θ で表すことにする。 $\mathfrak{h}^*$ に W -不変な非退化双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を 1 つ取りそれによって、 $\mathfrak{a}_\Theta^*$ を $\mathfrak{h}^*$ の部分空間とみなす。

以下のように置く。 $\rho_\Theta = \frac{1}{2}(\rho - w_\Theta \rho)$ $\rho^\Theta = \frac{1}{2}(\rho + w_\Theta \rho)$. すると $\rho^\Theta \in \mathfrak{a}_\Theta^*$ となる。さて、一般化された Verma 加群のパラメータ集合を以下のように定める。

$$\mathcal{P}_\Theta^{++} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Theta \ \langle \lambda, \alpha \rangle \in \{1, 2, \dots\}\}$$

$${}^\circ \mathcal{P}_\Theta^{++} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Theta \ \langle \lambda, \alpha \rangle = 1\}$$

このように定めると次が直ちに言える。

$${}^\circ \mathcal{P}_\Theta^{++} = \{\rho_\Theta + \mu \mid \mu \in \mathfrak{a}_\Theta^*\}.$$

$\mu \in \mathfrak{h}^*$ であって $\mu + \rho \in \mathcal{P}_\Theta^{++}$ を満たすものに対して $\sigma_\Theta(\mu)$ で $\mathfrak{l}_\Theta$ の既約有限次元表現であって最高ウェイトが μ であるものを表す。 $E_\Theta(\mu)$ を $\sigma_\Theta(\mu)$ の表現空間とする。 $\mathfrak{n}_\Theta$ が $E_\Theta(\mu)$ に 0 で作用することにして $E_\Theta(\mu)$ を $U(\mathfrak{p}_\Theta)$ -加群とみなす。

$\mu \in \mathcal{P}_\Theta^{++}$, 一般化された Verma 加群 ([Lepowsky 1977a]) を次で定義する。

$$M_\Theta(\mu) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_\Theta)} E_\Theta(\mu - \rho).$$

Θ が空集合であるときこれは Verma 加群に他ならない。 $\mu \in \mathcal{P}_\Theta^{++}$ ならば、一般化された Verma 加群 $M_\Theta(\mu)$ は $\mathfrak{h}$ に関する最高ウェイト $\mu - \rho$ をもちそれに対応するウェイトベクトルで生成されるから $M(\mu)$ の商加群になる。明らかに $M(\mu)$ からその既約商加群 $L(\mu)$ は $M_\Theta(\mu)$ によってファクターされる。 $\dim E_\Theta(\mu - \rho) = 1$ となるための必要十分条件は $\mu \in {}^\circ \mathcal{P}_\Theta^{++}$ である。このとき $M_\Theta(\mu)$ はスカラー型の一般化された Verma 加群と言われる。

Verma 加群の時と同じように一般化された Verma 加群の間の準同型を分類することが取りあえず問題になる。実はこの問題は一般的な状況ではいまだ未解決な難問である。Lepowsky は Kac-Moody 代数の研究に移行する前 1970 年代中盤にこの問題に取り組んでいた。

まず、以下のような Lepowsky の考察から始めよう。とりあえず、 $\mu, \lambda \in P_{\Theta}^{++}$ として 0 でない準同型 $\varphi : M_{\Theta}(\mu) \rightarrow M_{\Theta}(\lambda)$ が存在したとしよう。すると $M_{\Theta}(\mu)$ はウエイト $\mu - \rho$ の最高ウエイトベクトルによって生成されるからその φ によるイメージは 0 でなくウエイト $\mu - \rho$ をもち n_{Θ} が 0 で作用する。このことから $L(\mu)$ が $M_{\Theta}(\lambda)$ の組成因子として出てくることがわかる。一方 $M_{\Theta}(\lambda)$ は Verma 加群 $M(\lambda)$ の商加群であるから、 $L(\mu)$ が $M(\lambda)$ の組成因子として出てくることになる。ということは §1 で紹介した Bernstein-Gelfand-Gelfand の結果から $M(\mu) \subseteq M(\lambda)$ が成り立たねばならないことがわかる。

では逆に $M(\mu) \subseteq M(\lambda)$ が $\mu, \lambda \in P_{\Theta}^{++}$ に対して成り立ったとしよう。 $M_{\Theta}(\lambda)$ は Verma 加群 $M(\lambda)$ の商加群であるから合成することによって準同型 $\tilde{\psi} : M(\mu) \rightarrow M_{\Theta}(\lambda)$ が得られる。Verma 加群の時と同様に Poincaré-Birkhoff-Witt の定理より $U(\mathfrak{g}) = U(\bar{n}_{\Theta}) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{p}_{\Theta})$ であるから、ベクトル空間としては $M_{\Theta}(\lambda) = U(\bar{n}_{\Theta}) \otimes_{\mathbb{C}} E_{\Theta}(\mu - \rho)$ となる。ここで I_{Θ} の作用は右辺で見ると $U(\bar{n}_{\Theta})$ には adjoint で作用するので、 I_{Θ} -加群として $M_{\Theta}(\lambda)$ は完全可約でありすべての既約成分は有限次元となる。このことを使うと比較的容易に、 $\tilde{\psi}$ は $\psi : M_{\Theta}(\mu) \rightarrow M_{\Theta}(\lambda)$ なる準同型によってファクターされることがわかる。こうして作られた準同型を Lepowsky は standard homomorphism と呼んだ。但し注意しなければいけないことは、たとえ $M(\mu) \subseteq M(\lambda)$ であっても射影との合成 $\tilde{\psi}$ は 0 になりうるのである。したがって $M(\mu) \subseteq M(\lambda)$ は $\text{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(M_{\Theta}(\mu), M_{\Theta}(\lambda)) \neq 0$ となるための必要条件ではあるが十分条件とは言えない。そこで、Lepowsky はいつ standard homomorphism が 0 にならないのか調べている。例えば重要な場合は $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が dominant regular integral であるウエイトであるとき、 $x, y \in W$ が $x \leq y$ かつ $\ell(x) + 1 = \ell(y)$ を満たすとする。するとこの時 $M_{\Theta}(x\lambda)$ から $M_{\Theta}(y\lambda)$ への standard homomorphism は 0 にならないというものである。このような standard homomorphism を用いて、Lepowsky は $L(\lambda)$ 一般化 Verma 加群の直和で resolve する BGG resolution の一般化を構成した ([Lepowsky 1977b])。また、standard homomorphism が 0 になるための十分条件も得ている。しかし、同時に Lepowsky は次のような例も見出している。 $M(\mu) \subseteq M(\lambda)$ であるが、対応する、standard homomorphism は 0。しかし、それとは別に $M_{\Theta}(x\lambda)$ から $M_{\Theta}(y\lambda)$ への 0 でない準同型が存在することがある。こういった nonstandard homomorphism が存在する背景には、Verma 加群の組成列が重複度自由とは限らないことが効いているのである。

次に、一般化された Verma 加群の場合に Verma 加群の場合に言えたことがなりたつかどうか注意しておく。まず、nonzero な準同型がかならず単射になるかどうかであるがこれは容易に反例を作れる。但し定義域がスカラー型であるならば Verma 加群の時と同じ議論で簡単に単射性が言える ([Lepowsky 1977b])。さらに [Lepowsky 1976] においては、スカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型は高々一次元であることが証明されている。スカラー型とは限らない一般化された Verma 加群の間の準同型についても、2 次元以上になる例はなかなか作れない。とういわけで、この場合も準同型は定数倍を除いて一意であろうと予想されていたが、その後 [Irving-Shelton 1988] において D_4 で反例が与えられた。

Lepowsky は [Lepowsky 1975a], [Lepowsky 1975b] において $\mathfrak{p}_{\Theta}$ がある実形の極小放物型部分代数の複素化になっているような場合でスカラー型の一般化 Verma 加群の間の準同型を詳細に研

究しとくに real rank 1 の場合は決定的な結果を得ている。

Lepowsky 以降での研究としては ここでもう一つ [Boe 1985] を挙げておく。Boe は、 p_Θ を nilradical nns が可換であるような極大放物型部分代数の場合にスカラー型の一般化 Verma 加群の間の準同型を分類している。

§ 4. Kazhdan-Lusztig 予想

[Kazhdan-Lusztig 1979] は 20 世紀の表現論の論文の中でも最も影響力のあるものの内の一つであろう。書いてあることは主に Coxeter 系に付随する Iwahori-Hecke 代数のよい基底を求めるアルゴリズムの説明とそれから得られる Iwahori-Hecke 代数の正則表現の分解である。「よい」とは Iwahori-Hecke 代数に自然にさだまる involution で不変になるということである。その良い基底は Iwahori-Hecke 代数の自然な基底の一次結合で書けるわけでその係数は Iwahori-Hecke 代数の関係式に出てくる不定元 q を含んだ式になる。これが、本質的には Kazhdan-Lusztig 多項式の正体である。実はこの論文には $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を dominant regular integral であるウエイトで $x, y \in W$ であるときに $L(x\lambda)$ の $M(y\lambda)$ における重複度は Kazhdan-Lusztig 多項式 $P_{x,y}(q)$ に $q = 1$ を代入したものであるという驚くべき予想が書かれていた。(実は書かれていたのは $\lambda = \rho$ の場合だけだが、一般の dominant regular integral であるウエイトの場合い当時しられていた一般論で容易に拡張できた。) この予想はまもなく、[Beilinson-Bernstein 1981] と [Brylinski-Kashiwara 1981] によって独立に解かれた。簡単にどういふことか触れると Kemf の結果に戻ってみる。 $\lambda = \rho$ の場合を考えると Verma 加群のある種の双対が旗多様体の構造層を係数とする局所コホモロジーで表せることに注意しよう。局所コホモロジーについては定義は説明してはられないが、Schubert cell に沿ったデルタ関数 (の複素化みたいなもの) に normal 方向の微分と cell 上での多項式をかけたものの一次結合全体というようなものである。重要な点は旗多様体上の代数的な線型微分作用素が局所コホモロジーには自然に作用することと、局所コホモロジーは関数みたいに局所的な対象で開集合への制限などが関数のように自由に出来ることである。旗多様体は G が代数的に作用するから、 $\mathfrak{g}$ の元は代数的ベクトル場として局所コホモロジーに作用するこれが Verma 加群のある種の双対を与える $\mathfrak{g}$ 作用に他ならない。局所コホモロジーには $\mathfrak{g}$ よりも一般的な代数的微分作用素環が作用している。また開集合への制限もいっせいに考えて代数的微分作用素環の層 $\mathcal{D}$ 上の加群層 (いわゆる $\mathcal{D}$ -加群) と思えるのである。証明のポイントの一つは、この局所コホモロジーの $\mathfrak{g}$ -加群としての組成列と $\mathcal{D}$ -加群としての組成列は一致するということである。したがって既約 $\mathcal{D}$ -加群が既約最大ウエイト加群 $L(x\rho)$ に対応するのである。あとは Kashiwara による Riemann-Hilbert 対応によって、旗多様体上の構成可能層の複体の話に持ち込んで標数 p 還元を行い正標数の対応物に移行する。そこでは、Deligne によって Weil 予想の一般化として整備された weight の理論があるのでそういう構造を用いて重複度が計算できるのである。実は Kazhdan-Lusztig が与えていたアルゴリズムはそういうものだったのである。(証明の後半は Kazhdan-Lusztig がすでにやっていたことである。) [Beilinson-Bernstein 1981] ではさらに徹底

的な定式化がおこなわれ、旗多様体上の連接 D -加群と有限生成 $\mathfrak{g}$ -加群で $U(\mathfrak{g})$ の中心が自明表現 $\mathbb{C}$ と同じ用に作用するもの間にカテゴリー同値があることを確立している。

Verma 加群の組成列が計算できれば、原理的には一般化された Verma 加群の組成列も計算できる。ただし強引にやるとかなり無駄が出るので、[Casian-Collingwood 1987] で、一般化された Verma 加群の組成列に適した Kazhdan-Lusztig 理論の修正版が展開された。[Collingwood-Irving-Shelton 1988],[Boe-Enright-Shelton 1988] などその後この Kazhdan-Lusztig タイプのアルゴリズムを使って具体的に一般化された Verma 加群の組成列を計算することがなされ、幾つかの具体例に対して準同型の存在問題も解決された。しかし、原理的には計算できるといってもかなり複雑なアルゴリズムであり、[Boe-Collingwood 1990] 以降はこの方針では進展はないようではある。

Kazhdan-Lusztig のオリジナルな予想は、無限小指標が integral な場合のみであったが、実は一般の場合も適切な定式化の元で Kazhdan-Lusztig 予想は正しい。そのためには以下の概念が必要である。

まず Q を root lattice つまり Δ の整数係数一次結合全体とする。integral とは限らない $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を一つ固定しよう。ここで integral Weyl 群 W_λ を以下のように定義する。

$$W_\lambda = \{w \in W \mid w\lambda - \lambda \in Q\}.$$

また integral ルート系 Δ_λ を以下のように定める。

$$\Delta_\lambda = \{\alpha \in \Delta \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

Δ_λ は Δ の部分ルート系になり、 W_λ は Δ_λ の Weyl 群になることが知られている。 $\Delta_\lambda^+ = \Delta^+ \cap \Delta_\lambda$ とおけばこれは、 Δ_λ の正ルート系を定める。 Π_λ を Δ_λ^+ の基底とし、 Φ_λ で Π_λ の元に対応する simple reflection 全体の集合を表す。すると、Coxeter 系 $(W_\lambda, \Phi_\lambda)$ を得る。

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を integral とは限らないが dominant regular であるようにとる。このとき $x, y \in W_\lambda$ に対して $L(x\lambda)$ の $M(y\lambda)$ における重複度は Coxeter 系 $(W_\lambda, \Phi_\lambda)$ から定義された Kazhdan-Lusztig 多項式の 1 での値になるのである。要するに重複度を計算するには Lie 代数全体の情報はいらず、Coxeter 系 $(W_\lambda, \Phi_\lambda)$ の情報だけで十分である。Coxeter 系 $(W_\lambda, \Phi_\lambda)$ は抽象ルート系の Weyl 群であるから、 $\mathfrak{g}$ とは異なる別の Lie 代数に対応して居る場合、異なる Lie 代数で、対応する重複度が一致するのである。このことは一般化された Verma 加群の準同型の存在問題に有効に使える。

§ 5. 極大放物型部分代数の場合

しばらくの間忘れられていた一般化された Verma 加群の準同型の存在問題であるが最近 p_Θ が極大放物型部分代数であるようなスカラー型の場合に解決された ([Matumoto 2006])。簡単にアイデアに触れたい。

この場合一般の放物型部分代数に比べて、簡単なのは $\mathfrak{a}_\Theta$ が一次元であるので $\mu \in \mathfrak{a}_\Theta^*$ にたいして $M_\Theta(\rho_\Theta - \mu) \subseteq M_\Theta(\rho_\Theta + \mu)$ かどうかを調べればよいことである。しかも $M_\Theta(\rho_\Theta - \mu)$ が

既約の時だけ考えればよくしかもそれは $M_{\Theta}(\rho_{\Theta} - \mu) = L(\rho_{\Theta} - \mu)$ が $M_{\Theta}(\rho_{\Theta} + \mu)$ の組成因子に出てくるかどうかという問題におきかえられる。Kazhdan-Lusztig 多項式の計算の問題に帰着できるが、それは integral Weyl 群 $(W_{\rho_{\Theta}-\mu}, \Phi_{\rho_{\Theta}-\mu})$ を見ればよい。そういうわけで問題をより簡単な Lie 代数に帰着できる場合が出てくる。これが Kazhdan-Lusztig 予想の「計算」とは別の使い方である。

この問題を解くためにはもう一つのアイデアがある。まともに Kazhdan-Lusztig アルゴリズムを実行して解くという方針は、パラメーターが regular なところを考えていることになる。パラメーターが $\mu = 0$ となる近くでは、何が起ころかという $M_{\Theta}(\rho_{\Theta} + \mu)$ の組成因子が退化して 0 になってしまい実は構造が簡単になるのである。たとえば $M_{\Theta}(\rho_{\Theta} + \mu)$ が既約になってしまえば、translation functor は当然なりたない。可約の場合だと無限小指標が退化していて、そのような無限小指標に対応する最大ウエイトの可能性が極端に限られ $M_{\Theta}(\rho_{\Theta} - \mu) \subseteq M_{\Theta}(\rho_{\Theta} + \mu)$ とならざるを得なくなることもある。ということは、 μ が大きいところでまともに Kazhdan-Lusztig アルゴリズムを適用するのではなく、 μ ができるだけ 0 に近いところに問題が帰着できればいいわけである。それを可能にするのが translation functor である。translation functor は適当な既約有限次元表現とのテンソル積表現と考えるという関手と $U(\mathfrak{g})$ の中心の作用についての一般化された同時固有空間を取り出すという関手の合成であり完全系列を保つ。通常はよい性質を期待すると regular なところから最初の壁までしか無限小指標を動かすことはできない。しかし、[Vogan 1988] で展開されたアイデアの一つを使うと、適当な translation functor を適用してゆくことによって $M_{\Theta}(\rho_{\Theta} - \mu)$ と $M_{\Theta}(\rho_{\Theta} + \mu)$ の μ を 0 に向かって小さくしてゆくことができる。よってもし $M_{\Theta}(\rho_{\Theta} + \mu)$ が最終的に既約になってしまえば translation functor を適用する以前の大きな μ に対しても $M_{\Theta}(\rho_{\Theta} - \mu) \subseteq M_{\Theta}(\rho_{\Theta} + \mu)$ とはならないことがわかる。 $\mathfrak{p}_{\Theta}$ に条件がつくが小さな μ に対して $M_{\Theta}(\rho_{\Theta} - \mu) \subseteq M_{\Theta}(\rho_{\Theta} + \mu)$ なら大きな μ に対してもそうなるというタイプの議論も可能である。

§ 5. Elementary homomorphism

最後に Verma の定理 1・1 をどのようにスカラー型の一般化された Verma 加群の場合に拡張されるか述べたい。定理を定式化するためにまず、定理 1・1 に出てきた s_{α} がこの場合どのようなものであるべきか考察してみよう。スカラー型の一般化された Verma 加群のパラメーター空間は実質的に $\mathfrak{a}_{\Theta}^*$ である。したがって、 $\alpha \in \Delta$ よりもむしろ α の $\mathfrak{a}_{\Theta}$ への制限に関する $\mathfrak{a}_{\Theta}^*$ の鏡映を考えたい。うまい W の元を取ってこのようなものを作れるかが問題である。回答は以下のとおりになる。

まず Θ なる Π の部分集合を以下固定しておく。 $\alpha \in \Delta$ なるルートに対して以下のように置く。

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha) &= \{\beta \in \Delta \mid \exists c \in \mathbb{R} \ \beta|_{\mathfrak{a}_{\Theta}} = c\alpha|_{\mathfrak{a}_{\Theta}}\}, \\ \Delta^+(\alpha) &= \Delta(\alpha) \cap \Delta^+, \\ U_{\alpha} &= \mathbb{C}\Theta + \mathbb{C}\alpha \subseteq \mathfrak{h}^*.\end{aligned}$$

すると $\Delta(\alpha)$ は Δ の部分ルート系になる。 $\Delta^+(\alpha)$ は $\Delta(\alpha)$ の正ルート系を与えるのでそれに関する基底を $\Pi(\alpha)$ と書く。もし $\alpha|_{\mathfrak{a}_\Theta} \neq 0$ ならば $\tilde{\alpha} \in \Delta^+$ で $\Pi(\alpha) = \Theta \cup \{\tilde{\alpha}\}$ となるものが一意に存在する。 $\alpha \in \Delta^+$ に対して $W_\Theta(\alpha)$ で $(\mathfrak{h}^*, \Pi(\alpha))$ についての Weyl 群をあらわす。あきらかに, $W_\Theta \subseteq W_\Theta(\alpha) \subseteq W$. w^α で $W_\Theta(\alpha)$ の最長元を表す。ここで、

$$\sigma_\alpha = w^\alpha w_\Theta$$

とおこう。これが求める鏡映の候補である。しかし、鏡映なら $\sigma_\alpha^2 = 1$ となっていなければまずい。そこでつぎのように定義する。

定義 5.1. $\alpha \in \Delta$ が Θ -useful であるとは $\sigma_\alpha^2 = 1$ を満たすこととする。

$\alpha \in \Delta$ に対して以下のように定めよう。

$$V_\alpha = \{\lambda \in \mathfrak{a}_\Theta^* \mid \langle \lambda, \alpha \rangle = 0\}.$$

$\omega_\alpha \in \mathfrak{a}_\Theta^* \subseteq \mathfrak{h}^*$ で α に対する fundamental weight で基底 $\Pi(\alpha) = \Theta \cup \{\alpha\}$ に関するものとする。つまり、 ω_α は $\beta \in \Theta$ に対しては $\langle \omega_\alpha, \beta \rangle = 0$ となり、さらに $\langle \beta, \tilde{\alpha} \rangle = 1$, および $\omega_\alpha|_{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{c}(\mathfrak{g}(\alpha))} = 0$ をみたすようなものとして定義される。ただし $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}(\alpha))$ は $\mathfrak{g}(\alpha)$ の中心を表す。ある正の実数 a で $\omega_\alpha = a\alpha|_{\mathfrak{a}_\Theta}$ をみたすものがある。というのは $\alpha|_{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{c}(\mathfrak{g}(\alpha))} = 0$ だからである。したがって $V_\alpha = \{\lambda \in \mathfrak{a}_\Theta^* \mid \langle \lambda, \omega_\alpha \rangle = 0\}$ となる。

以下が容易にえられるので σ_α がわれわれの求めるものであることがわかる。

補題 5.1. $\alpha \in \Delta$ を Θ -useful とすると以下が成り立つ。

- (1) σ_α は $\mathfrak{a}_\Theta^*$ を保つ。
- (2) $\sigma_\alpha \in W(\Theta)$ となる。特に, $\sigma_\alpha \rho_\Theta = \rho_\Theta$.
- (3) $\sigma_\alpha \omega_\alpha = -\omega_\alpha$.
- (4) $\sigma_\alpha|_{\mathfrak{a}_\Theta}$ は V_α に関しての鏡映である。

Θ -useful な $\alpha \in \Delta$ に対して以下のように定める。

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{h} + \sum_{\beta \in \Delta(\alpha)} \mathfrak{g}_\beta, \quad \mathfrak{p}_\Theta(\alpha) = \mathfrak{g}(\alpha) \cap \mathfrak{p}_\Theta.$$

すると, $\mathfrak{g}(\alpha)$ は $\mathfrak{g}$ の簡約部分代数でそのルート系が $\Delta(\alpha)$ となり $\mathfrak{p}_\Theta(\alpha)$ は $\mathfrak{g}(\alpha)$ の極大放物型部分代数となる。

$\rho(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Delta^+(\alpha)} \beta$ と置く。 $\nu \in \mathfrak{a}_\Theta^*$ に対して $\mathbb{C}_\nu$ で ν に対応する 1 次元 $U(\mathfrak{p}_\Theta(\alpha))$ -加群を表す。 $\nu \in \mathfrak{a}_\Theta^*$ に対し $\mathfrak{g}(\alpha)$ の以下のようなスカラー型の一般化された Verma 加群を考える。

$$M_\Theta^{\mathfrak{g}(\alpha)}(\rho_\Theta + \nu) = U(\mathfrak{g}(\alpha)) \otimes_{U(\mathfrak{p}_\Theta(\alpha))} \mathbb{C}_{\nu - \rho(\alpha)}.$$

ここで $\nu \in V_\alpha$ とし c を 1 と $\frac{1}{2}$ のどちらかいずれかとする。ここで $M_\Theta^{\mathfrak{g}(\alpha)}(\rho_\Theta - nc\omega_\alpha) \subseteq M_\Theta^{\mathfrak{g}(\alpha)}(\rho_\Theta + nc\omega_\alpha)$ がすべての非負整数 n に対して成り立つとしよう。このようなことがいつ成り立つかは、§4 で述べた通りすでにわかっていることである。

すると $M_\Theta^{\mathfrak{g}(\alpha)}(\rho_\Theta - nc\omega_\alpha)$ は既約であり $\sigma_\alpha(\rho_\Theta + nc\omega_\alpha) = \rho_\Theta - nc\omega_\alpha$ であることに注意すると integral Weyl 群がこの場合とおなじ状況なら対応して準同型が作れることが Kazhdan-Lusztig 予想から言える。実際 $Q_{\alpha,n} = \{\nu \in V_\alpha \mid \Delta(\alpha)_{\rho_\Theta + nc\omega_\alpha} = \Delta_{\rho_\Theta + \nu + nc\omega_\alpha}\}$ と置くと、 $\nu \in Q_{\alpha,n}$ に対して $M_\Theta(\rho_\Theta + \nu - nc\omega_\alpha) \subseteq M_\Theta(\rho_\Theta + \nu + nc\omega_\alpha)$ が言える。さて、 $Q_{\alpha,n}$ は V_α のなかで Zariski 位相で稠密である。(じつは通常位相で open dense.) さらに §1 で述べた Verma の論法と同様に容易に各 $\mu \in \mathfrak{a}_\Theta^*$ に対して $\{\nu \in \mathfrak{a}_\Theta^* \mid M_\Theta(\rho_\Theta + \nu - \mu) \subseteq M_\Theta(\rho_\Theta + \nu)\}$ は $\mathfrak{a}_\Theta^*$ の Zariski 閉集合になることがわかるので、結局すべての非負整数 n と $\nu \in V_\alpha$ に対して

$$M_\Theta(\rho_\Theta + \nu - nc\omega_\alpha) \subseteq M_\Theta(\rho_\Theta + \nu + nc\omega_\alpha)$$

となる。このようにして得られた準同型を elementary homomorphism という。

ここで問題として以下のようなものが考えられる。

問題 5.1. スカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型は elementary homomorphism の合成で尽くされるか？

無限小指標が regular という条件の下で、上記の問題は肯定的な場合がいろいろと知られている。例えば、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ で $\mathfrak{l}_\Theta \cong \mathfrak{gl}(k, \mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(k, \mathbb{C})$ (k は n の約数) となるような場合である。

References

- [Baston 1990] R. J. Baston, Verma modules and differential conformal invariants. *J. Differential Geom.* **32** (1990), 851–898.
- [Beilinson-Bernstein 1981] A. Beilinson and J. Bernstein. Localisation de G-modules, *Comptes-rendus Acad. Sc.* **292** (1981) p. 15-18.
- [Beilinson-Bernstein 1993] A. Beilinson and J. Bernstein, A proof of Jantzen conjectures, I. *M. Gelfand Seminar, 1-50, Adv. Soviet Math.* , **16** Part 1, Amer. Math. Soc. , Providence, RI, 1993.
- [Bernstein-Gelfand-Gelfand 1971] J. Bernstein, I. M. Gelfand, and S. I. Gelfand, Structure of representations generated by vectors of highest weight, *Funct. Anal. Appl.* **5** (1971), 1-8.
- [Boe 1985] B. Boe, Homomorphism between generalized Verma modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **288** (1985), 791-799.
- [Boe-Collingwood 1985] B. Boe and D. H. Collingwood, A comparison theory for the structure of induced representations, *J. of Algebra* **94** (1985), 511-545.

- [Boe-Collingwood 1990] *B. Boe and D. H. Collingwood, Multiplicity free categories of highest weight representations. I, II, Comm. Algebra* **18** (1990), 947–1032, 1033–1070.
- [Boe-Enright-Shelton 1988] *B. Boe, T. J. Enright, and B. Shelton, Determination of the intertwining operators for holomorphically induced representations of Hermitian symmetric pairs. Pacific J. Math.* **131** (1988), 39–50.
- [Borho-Jantzen 1977] *W. Borho and J. C. Jantzen, Über primitive Ideale in der Einhüllenden einer halbeinfachen Lie-Algebra, Invent. Math.* **39** (1977), 1–53.
- [Borho-Kraft 1976] *W. Borho and H. Kraft, Über die Gelfand-Krillov-Dimension, Math. Ann.* **220** (1976), 1–24.
- [Brylinski-Kashiwara 1981] *J.-L. Brylinski and M. Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent. Math.* **64** (1981), 387–410.
- [Casian-Collingwood 1987] *The Kazhdan-Lusztig conjecture for generalized Verma modules. Math. Z.* **195** (1987), 581–600.
- [Collingwood-Irving-Shelton 1988] *D. H. Collingwood, R. S. Irving, and B. Shelton, Filtrations on generalized Verma modules for Hermitian symmetric pairs. J. Reine Angew. Math.* **383** (1988), 54–86.
- [Collingwood-McGovern 1993] *D. H. Collingwood and W. M. McGovern, “Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras”. Van Nostrand Reinhold Mathematics Series. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993. xiv+186 pp.*
- [Collingwood-Shelton 1990] *D. H. Collingwood and B. Shelton, A duality theorem for extensions of induced highest weight modules, Pacific J. Math.* **146** (1990), 227–237.
- [Deodhar 1977] *V. V. Deodhar, Some characterizations of Bruhat ordering on a Coxeter group and determination of the relative Möbius function, Invent. Math.* **39** (1977), 187–198.
- [Dixmier 1977] *J. Dixmier, “Enveloping Algebras” North-Holland, Amsterdam and New York, 1977.*
- [Gover-Hirachi 2004] *R. A. Gover and K. Hirachi, Conformally invariant powers of the Laplacian—a complete nonexistence theorem, J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), 389–405.
- [Harish-Chandra 1951] *Harish-Chandra, On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, Trans. Amer. Math. Soc.* , **37** (1951), 813–818.
- [Huang 1993] *J.-S. Huang, Intertwining differential operators and reducibility of generalized Verma modules, Math. Ann.* **297** (1993), 309–324.
- [Humphreys 1972] *J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972.*
- [Irving-Shelton 1988] *R. S. Irving and B. Shelton, Loewy series and simple projective modules in the category $\mathcal{O}_S$. Pacific J. Math.* **132**(1988), 319–342.
- [Jakobsen 1985] *H. P. Jakobsen, Basic covariant differential operators on Hermitian symmetric spaces, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **18** (1985), 421–436.

- [Kazhdan-Lusztig 1979] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*. *Invent. Math.* **53** (1979), 165–184.
- [Kempf 1978] G. Kempf, *The Grothendieck-Cousin complex of an induced representation* *Adv. in Math.* **29** (1978) 310–396.
- [Knapp 2002] A. W. Knap, “*Lie groups beyond an introduction*” Second edition. *Progress in Mathematics*, 140. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002. xviii+812 pp.
- [Kostant 1975] B. Kostant, *Verma modules and the existence of quasi-invariant differential operators*, “*Non-commutative harmonic analysis*” (Actes Colloq. , Marseille-Luminy, 1974), pp. 101–128. *Lecture Notes in Math.* , Vol. 466, Springer, Berlin, 1975.
- [Lepowsky 1975a] J. Lepowsky, *Conical vectors in induced modules*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **208** (1975), 219–272.
- [Lepowsky 1975b] J. Lepowsky, *Existence of conical vectors in induced modules*, *Ann. of Math.* **102** (1975), 17–40.
- [Lepowsky 1976] J. Lepowsky, *Uniqueness of embeddings of certain induced modules*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **56** (1976), 55–58.
- [Lepowsky 1977a] J. Lepowsky, *Generalized Verma modules, the Cartan-Helgason theorem, and the Harish-Chandra homomorphism*, *J. Algebra* **49** (1977), 470–495.
- [Lepowsky 1977b] J. Lepowsky, *A generalization of the Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution*, *J. Algebra* **49** (1977) 496–511.
- [Matumoto 1993] H. Matumoto, *On the existence of homomorphisms between scalar generalized Verma modules*, in: *Contemporary Mathematics*, 145, 259–274, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [Matumoto 2006] H. Matumoto, *The homomorphisms between scalar generalized Verma modules associated to maximal parabolic subalgebras* *Duke Math. J.* **131** (2006), 75–118.
- [Murray-Rice 1992] *A Geometric Realisation of the Lepowsky Bernstein Gelfand Gelfand Resolution* Michael Murray, John Rice *Proc. of the AMS* **114** (1992), 553–559
- [Soergel 1987] W. Soergel, *Universelle versus relative Einhüllende: Eine geometrische Untersuchung von Quotientienten von universellen Einhüllenden halbeinfacher Lie-Algebren*, *Dissertation, der Universität Hamberg*, 1987.
- [Verma 1968] D. N. Verma, *Structure of certain induced representations of complex semisimple lie algebras*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **74** (1968), 160–166.
- [Vogan 1988] D. A. Vogan Jr., *Irreducibilities of discrete series representations for semisimple symmetric spaces*, *Adv. Stud. in Pure Math.* vol. 14, Kinokuniya Book Store, 1988, 381–417.
- [Vogan 1990] D. A. Vogan Jr., *Dixmier algebras, sheets, and representation theory*, in: *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory* (Paris, 1989), 333–395, *Progr. Math.*, 92, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.