

統計学に応用をもつ max-plus 不変式の基本形について

久保 奨（内閣府），松井 清（東京 C R O（株））

概要

対称群に対する Weyl の基本不変式がパラメトリックな統計手法を支える．本稿では，ノンパラメトリックな統計手法を支える不変式について報告する．その不変式として，対称群に対する Weyl の基本不変式を超離散化した max-plus 不変式を基本形と考え，その性質について議論する．特に，データセットのケース数が小さい場合，max-plus 不変式の基本形の値からデータセットを決定できることを示す．

1 はじめに

項目 $x, y, \dots, w$ ，ケース数（観測数） n のデータセット

$$\begin{array}{cccc} x_1 & y_1 & \cdots & w_1 \\ x_2 & y_2 & \cdots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & y_n & \cdots & w_n \end{array}$$

において，ケース番号 $1, 2, \dots, n$ の置換全体 S_n （ n 次対称群）のもとで不変な関数 f ，すなわち，任意の $\sigma \in S_n$ に対し

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \dots, w_1, \dots, w_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}, \dots, w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(n)}) \quad (1)$$

を満たす関数を考える．ここでは，Weyl [1] にみられる次の基本不変式を考える．

$$\varphi_{\alpha\beta\dots\omega}^{(n)} = \varphi_{\alpha\beta\dots\omega}^{(n-1)} + x_n \varphi_{\alpha-1\beta\dots\omega}^{(n-1)} + y_n \varphi_{\alpha\beta-1\dots\omega}^{(n-1)} + \cdots + w_n \varphi_{\alpha\beta\dots\omega-1}^{(n-1)} \quad (2a)$$

$$\varphi_{10\dots 0}^{(1)} = x_1, \varphi_{01\dots 0}^{(1)} = y_1, \dots, \varphi_{00\dots 1}^{(1)} = w_1 \quad (2b)$$

ただし， $\alpha, \beta, \dots, \omega$ は 0 以上の整数で，それらの和 $(\alpha + \beta + \cdots + \omega)$ は n 以下，また， $\varphi_{00\dots 0}^{(n)} = 1$ とする．この基本不変式を，“対称群に対する Weyl の基本不変式”と呼ぶことにする．

対称群に対する Weyl の基本不変式はパラメトリックな統計手法を支える．統計計算においてデータの多項式，有理関数，解析関数，連続関数の基本的な式であるのみならず，データ追加・削除等で重要な役割を果たす．現実の統計解析において，データセットの秘匿と開示の問題で，データセットを開示せず統計解析を実行する方法や偽データセットで代理させる方法を与える [2],[3]．

本稿では，ノンパラメトリックな統計手法を支える不変式について議論する．順序統計量などノンパラメトリックな統計手法の多くは連続関数で記述できるが，現在の数値解析においては，対称群に関し不変な連続関数に対して Weierstrass の多項式近似定理を適用し，対称群に対する Weyl の基本不変式を用いて計算することは一部を除いて現実的ではない．ここでは，超離散化に着目し，対称群に対する Weyl の基本不変式を超離散化した max-plus 不変式を“max-plus 不変式の基本形”と呼び，その基本形の可能性に言及する．具体的には，この基本形がノンパラメトリックな統計手法の一部を支える（基本形からデータセットが定まる）という予想とその一部の解決を報告する．

2 max-plus 不変式の基本形について

2.1 定義

max-plus 不変式の基本形を以下のように定義する．

$$\Phi_{\alpha\beta\dots\omega}^{(n)} = \max \left(\Phi_{\alpha\beta\dots\omega}^{(n-1)}, X_n + \Phi_{\alpha-1\beta\dots\omega}^{(n-1)}, Y_n + \Phi_{\alpha\beta-1\dots\omega}^{(n-1)}, \dots, W_n + \Phi_{\alpha\beta\dots\omega-1}^{(n-1)} \right) \quad (3a)$$

$$\Phi_{10\dots 0}^{(1)} = X_1, \Phi_{01\dots 0}^{(1)} = Y_1, \dots, \Phi_{00\dots 1}^{(1)} = W_1 \quad (3b)$$

ただし， $\alpha, \beta, \dots, \omega$ は 0 以上の整数で，それらの和 $(\alpha + \beta + \cdots + \omega)$ は n 以下，また， $\Phi_{00\dots 0}^{(n)} = 0$ とする．これは，対称群に対する Weyl の基本不変式 (2) を超離散化 [4] することで得られる．前節で $\varphi = e^{\Phi/\epsilon}$ ， $x = e^{X/\epsilon}$ ， $y = e^{Y/\epsilon}$ ， $\dots$ ， $w = e^{W/\epsilon}$ と置き， $\epsilon \rightarrow +0$ の極限をとればよい．

2.2 例

2.2.1 項目 X, Y でケース数 2 の場合 $X_1, X_2; Y_1, Y_2$

$$\begin{aligned}\Phi_{10}^{(2)} &= \max(\Phi_{10}^{(1)}, X_2 + \Phi_{00}^{(1)}) = \max(X_1, X_2) \\ \Phi_{01}^{(2)} &= \max(\Phi_{01}^{(1)}, Y_2 + \Phi_{00}^{(1)}) = \max(Y_1, Y_2) \\ \Phi_{20}^{(2)} &= X_2 + \Phi_{10}^{(1)} = X_1 + X_2 \\ \Phi_{11}^{(2)} &= \max(X_2 + \Phi_{01}^{(1)}, Y_2 + \Phi_{10}^{(1)}) = \max(X_1 + Y_2, X_2 + Y_1) \\ \Phi_{02}^{(2)} &= Y_2 + \Phi_{01}^{(1)} = Y_1 + Y_2\end{aligned}$$

2.2.2 項目 X, Y でケース数 3 の場合 $X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3$

$$\begin{aligned}\Phi_{10}^{(3)} &= \max(\Phi_{10}^{(2)}, X_3 + \Phi_{00}^{(2)}) = \max(X_1, X_2, X_3) \\ \Phi_{01}^{(3)} &= \max(\Phi_{01}^{(2)}, Y_3 + \Phi_{00}^{(2)}) = \max(Y_1, Y_2, Y_3) \\ \Phi_{20}^{(3)} &= \max(\Phi_{20}^{(2)}, X_3 + \Phi_{10}^{(2)}) = \max(X_1 + X_2, X_1 + X_3, X_2 + X_3) \\ \Phi_{11}^{(3)} &= \max(\Phi_{11}^{(2)}, X_3 + \Phi_{01}^{(2)}, Y_3 + \Phi_{10}^{(2)}) \\ &= \max(X_1 + Y_2, X_1 + Y_3, X_2 + Y_1, X_2 + Y_3, X_3 + Y_1, X_3 + Y_2) \\ \Phi_{02}^{(3)} &= \max(\Phi_{02}^{(2)}, Y_3 + \Phi_{01}^{(2)}) = \max(Y_1 + Y_2, Y_1 + Y_3, Y_2 + Y_3) \\ \Phi_{30}^{(3)} &= X_3 + \Phi_{20}^{(2)} = X_1 + X_2 + X_3 \\ \Phi_{21}^{(3)} &= \max(X_3 + \Phi_{11}^{(2)}, Y_3 + \Phi_{20}^{(2)}) \\ &= \max(X_1 + X_2 + Y_3, X_1 + X_3 + Y_2, X_2 + X_3 + Y_1) \\ \Phi_{12}^{(3)} &= \max(X_3 + \Phi_{02}^{(2)}, Y_3 + \Phi_{11}^{(2)}) \\ &= \max(X_1 + Y_2 + Y_3, X_2 + Y_1 + Y_3, X_3 + Y_1 + Y_2) \\ \Phi_{03}^{(3)} &= Y_3 + \Phi_{02}^{(2)} = Y_1 + Y_2 + Y_3\end{aligned}$$

2.2.3 項目 X, Y, Z でケース数 2 の場合 $X_1, X_2; Y_1, Y_2; Z_1, Z_2$

$$\begin{aligned}\Phi_{100}^{(2)} &= \max(\Phi_{100}^{(1)}, X_2 + \Phi_{000}^{(1)}) = \max(X_1, X_2) \\ \Phi_{010}^{(2)} &= \max(\Phi_{010}^{(1)}, Y_2 + \Phi_{000}^{(1)}) = \max(Y_1, Y_2) \\ \Phi_{001}^{(2)} &= \max(\Phi_{001}^{(1)}, Z_2 + \Phi_{000}^{(1)}) = \max(Z_1, Z_2) \\ \Phi_{200}^{(2)} &= X_2 + \Phi_{100}^{(1)} = X_1 + X_2 \\ \Phi_{110}^{(2)} &= \max(X_2 + \Phi_{010}^{(1)}, Y_2 + \Phi_{100}^{(1)}) = \max(X_1 + Y_2, X_2 + Y_1) \\ \Phi_{101}^{(2)} &= \max(X_2 + \Phi_{001}^{(1)}, Z_2 + \Phi_{100}^{(1)}) = \max(X_1 + Z_2, X_2 + Z_1) \\ \Phi_{020}^{(2)} &= Y_2 + \Phi_{010}^{(1)} = Y_1 + Y_2 \\ \Phi_{011}^{(2)} &= \max(Y_2 + \Phi_{001}^{(1)}, Z_2 + \Phi_{010}^{(1)}) = \max(Y_1 + Z_2, Y_2 + Z_1) \\ \Phi_{002}^{(2)} &= Z_2 + \Phi_{001}^{(1)} = Z_1 + Z_2\end{aligned}$$

2.2.4 項目 X, Y, Z でケース数 3 の場合 $X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3; Z_1, Z_2, Z_3$

$$\begin{aligned}
\Phi_{100}^{(3)} &= \max(\Phi_{100}^{(2)}, X_3 + \Phi_{000}^{(2)}) = \max(X_1, X_2, X_3) \\
\Phi_{010}^{(3)} &= \max(\Phi_{010}^{(2)}, Y_3 + \Phi_{000}^{(2)}) = \max(Y_1, Y_2, Y_3) \\
\Phi_{001}^{(3)} &= \max(\Phi_{001}^{(2)}, Z_3 + \Phi_{000}^{(2)}) = \max(Z_1, Z_2, Z_3) \\
\Phi_{200}^{(3)} &= \max(\Phi_{200}^{(2)}, X_3 + \Phi_{100}^{(2)}) = \max(X_1 + X_2, X_1 + X_3, X_2 + X_3) \\
\Phi_{110}^{(3)} &= \max(\Phi_{110}^{(2)}, X_3 + \Phi_{010}^{(2)}, Y_3 + \Phi_{100}^{(2)}) \\
&= \max(X_1 + Y_2, X_1 + Y_3, X_2 + Y_1, X_2 + Y_3, X_3 + Y_1, X_3 + Y_2) \\
\Phi_{101}^{(3)} &= \max(\Phi_{101}^{(2)}, X_3 + \Phi_{001}^{(2)}, Z_3 + \Phi_{100}^{(2)}) \\
&= \max(X_1 + Z_2, X_1 + Z_3, X_2 + Z_1, X_2 + Z_3, X_3 + Z_1, X_3 + Z_2) \\
\Phi_{020}^{(3)} &= \max(\Phi_{020}^{(2)}, Y_3 + \Phi_{010}^{(2)}) = \max(Y_1 + Y_2, Y_1 + Y_3, Y_2 + Y_3) \\
\Phi_{011}^{(3)} &= \max(\Phi_{011}^{(2)}, Y_3 + \Phi_{001}^{(2)}, Z_3 + \Phi_{010}^{(2)}) \\
&= \max(Y_1 + Z_2, Y_1 + Z_3, Y_2 + Z_1, Y_2 + Z_3, Y_3 + Z_1, Y_3 + Z_2) \\
\Phi_{002}^{(3)} &= \max(\Phi_{002}^{(2)}, Z_3 + \Phi_{001}^{(2)}) = \max(Z_1 + Z_2, Z_1 + Z_3, Z_2 + Z_3) \\
\Phi_{300}^{(3)} &= X_3 + \Phi_{200}^{(2)} = X_1 + X_2 + X_3 \\
\Phi_{210}^{(3)} &= \max(X_3 + \Phi_{110}^{(2)}, Y_3 + \Phi_{200}^{(2)}) = \max(X_1 + X_2 + Y_3, X_1 + X_3 + Y_2, X_2 + X_3 + Y_1) \\
\Phi_{201}^{(3)} &= \max(X_3 + \Phi_{101}^{(2)}, Z_3 + \Phi_{200}^{(2)}) = \max(X_1 + X_2 + Z_3, X_1 + X_3 + Z_2, X_2 + X_3 + Z_1) \\
\Phi_{120}^{(3)} &= \max(X_3 + \Phi_{020}^{(2)}, Y_3 + \Phi_{110}^{(2)}) = \max(X_1 + Y_2 + Y_3, X_2 + Y_1 + Y_3, X_3 + Y_1 + Y_2) \\
\Phi_{111}^{(3)} &= \max(X_3 + \Phi_{011}^{(2)}, Y_3 + \Phi_{101}^{(2)}, Z_3 + \Phi_{110}^{(2)}) \\
&= \max(X_1 + Y_2 + Z_3, X_1 + Y_3 + Z_2, X_2 + Y_1 + Z_3, X_2 + Y_3 + Z_1, \\
&\quad X_3 + Y_1 + Z_2, X_3 + Y_2 + Z_1) \\
\Phi_{102}^{(3)} &= \max(X_3 + \Phi_{002}^{(2)}, Z_3 + \Phi_{101}^{(2)}) = \max(X_1 + Z_2 + Z_3, X_2 + Z_1 + Z_3, X_3 + Z_1 + Z_2) \\
\Phi_{030}^{(3)} &= Y_3 + \Phi_{020}^{(2)} = Y_1 + Y_2 + Y_3 \\
\Phi_{021}^{(3)} &= \max(Y_3 + \Phi_{011}^{(2)}, Z_3 + \Phi_{020}^{(2)}) = \max(Y_1 + Y_2 + Z_3, Y_1 + Y_3 + Z_2, Y_2 + Y_3 + Z_1) \\
\Phi_{012}^{(3)} &= \max(Y_3 + \Phi_{002}^{(2)}, Z_3 + \Phi_{011}^{(2)}) = \max(Y_1 + Z_2 + Z_3, Y_2 + Z_1 + Z_3, Y_3 + Z_1 + Z_2) \\
\Phi_{003}^{(3)} &= Z_3 + \Phi_{002}^{(2)} = Z_1 + Z_2 + Z_3
\end{aligned}$$

3 データセットと max-plus 不変式の基本形

問題は max-plus 不変式の基本形からデータセットを決定できるかどうかである．項目数が 3 以上のとき，タイが全くない項目が存在すれば，その項目を基準とすることで項目数が 2 の場合に帰着する．以下，項目数が 2 の場合を考える．

3.1 ケース数 2 の場合

ケース数 2 のデータセットは $X_1, X_2; Y_1, Y_2$ である（max-plus 不変式の基本形は 2.2.1 を参照）． $X_1 \geq X_2$ としても一般性を失わない．このとき，ただちに $X_1 = \Phi_{10}^{(2)}$, $X_2 = \Phi_{20}^{(2)} - \Phi_{10}^{(2)}$ を得る．ここで，次の不等式

$$\Phi_{11}^{(2)} \leq \Phi_{10}^{(2)} + \Phi_{01}^{(2)} = X_1 + \Phi_{01}^{(2)} \quad (4)$$

に着目する．(4) で等号が成り立たなければ， $Y_1 = \Phi_{01}^{(2)}$ であり，成り立てば， $Y_2 = \Phi_{01}^{(2)}$ としてもよいことがわかる．この結果を示したものが表 1 である．残りのもう 1 つの値は， $\Phi_{02}^{(2)} - \Phi_{01}^{(2)}$ となる．

不等式 (4)	<	=
$\Phi_{01}^{(2)}$	Y_1	Y_2

表 1: 不等式の等号成立等と $\Phi_{01}^{(2)}$ の値

3.2 ケース数 3 の場合

方針は、まず 1 組のデータ X_k, Y_k を見つけて、残りの 2 組のデータをケース数 2 の場合に帰着させることである。

ケース数 3 のデータセットは $X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3$ である (max-plus 不変式の基本形は 2.2.2 を参照). $X_1 \geq X_2 \geq X_3$ としても一般性を失わない. このとき、ただちに $X_1 = \Phi_{10}^{(3)}$, $X_2 = \Phi_{20}^{(3)} - \Phi_{10}^{(3)}$, $X_3 = \Phi_{30}^{(3)} - \Phi_{20}^{(3)}$ を得る.

まず 1 組のデータ X_k, Y_k を見つけるために、次の不等式

$$\Phi_{11}^{(3)} \leq \Phi_{10}^{(3)} + \Phi_{01}^{(3)} = X_1 + \Phi_{01}^{(3)} \quad (5a)$$

$$\Phi_{21}^{(3)} \leq \Phi_{20}^{(3)} + \Phi_{01}^{(3)} = X_1 + X_2 + \Phi_{01}^{(3)} \quad (5b)$$

に着目する. (5a) で等号が成り立たなければ $Y_1 = \Phi_{01}^{(3)}$ である. (5a) で等号が成り立つとき, (5b) で等号が成り立たなければ $Y_2 = \Phi_{01}^{(3)}$ であり, 成り立てば $Y_3 = \Phi_{01}^{(3)}$ としてよいことがわかる. この結果をまとめたものが表 2 である. 表中の ($<$) は, 上で等号が成り立たないので, ただちに等号が成り立たないことが判明することを示している.

不等式 (5a)	$<$	$=$	$=$
不等式 (5b)	($<$)	$<$	$=$
$\Phi_{01}^{(3)}$	Y_1	Y_2	Y_3

表 2: 不等式の等号成立等と $\Phi_{01}^{(3)}$ の値

つまり, Y_1, Y_2, Y_3 の順に最大であるものを探していき, ある k で $Y_k = \Phi_{01}^{(3)}$ となり, 1 組のデータ X_k, Y_k が定まる. 残りの 2 組のデータはケース数 2 の場合に帰着する. 実際, 残りの 2 組から構成されるデータセットの max-plus 不変式の基本形を $\{\Phi_{\alpha\beta}'^{(2)}\}$ とおくと,

$$\Phi_{10}'^{(2)} = \min(\Phi_{20}^{(3)} - X_k, \Phi_{10}^{(3)}) \quad (6a)$$

$$\Phi_{01}'^{(2)} = \min(\Phi_{02}^{(3)} - Y_k, \Phi_{01}^{(3)}) \quad (6b)$$

$$\Phi_{20}'^{(2)} = \Phi_{30}^{(3)} - X_k \quad (6c)$$

$$\Phi_{11}'^{(2)} = \min(\Phi_{12}^{(3)} - Y_k, \Phi_{21}^{(3)} - X_k) \quad (6d)$$

$$\Phi_{02}'^{(2)} = \Phi_{03}^{(3)} - Y_k \quad (6e)$$

となる. 以下, その理由を述べる.

$\leq 1 >$ (6a)

Appendix の補題の系と不等式 (26a) を用いる.

$\Phi_{10}^{(3)} = \max(\Phi_{10}'^{(2)}, X_k)$, $\Phi_{20}^{(3)} - X_k = \max(\Phi_{10}'^{(2)}, \Phi_{20}'^{(2)} - X_k)$ において, $2\Phi_{10}'^{(2)} \geq X_k + (\Phi_{20}'^{(2)} - X_k) = \Phi_{20}'^{(2)}$ であるから. (6b) も同様であり, 不等式 (26b) を用いる.

$\leq 2 >$ (6c), (6e)

自明である.

$\leq 3 >$ (6d)

Appendix の補題の系と不等式 (26c) を用いる.

$\Phi_{12}^{(3)} - Y_k = \max(\Phi_{11}'^{(2)}, X_k + \Phi_{02}'^{(2)} - Y_k)$, $\Phi_{21}^{(3)} - X_k = \max(\Phi_{11}'^{(2)}, Y_k + \Phi_{20}'^{(2)} - X_k)$ において, $2\Phi_{11}'^{(2)} \geq (X_k + \Phi_{02}'^{(2)} - Y_k) + (Y_k + \Phi_{20}'^{(2)} - X_k) = \Phi_{02}'^{(2)} + \Phi_{20}'^{(2)}$ であるから.

以上, ケース数 3 の場合に, max-plus 不変式の基本形からデータセットを決定することができることが示された.

3.3 ケース数 4 の場合

方針は, ケース数 3 の場合と同様である. まず 1 組のデータ X_k, Y_k を見つけて, 残りの 3 組のデータをケース数 3 の場合に帰着させることである.

ケース数 4 のデータセットは, $X_1, X_2, X_3, X_4; Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ であり, このときの max-plus 不変式の基本形 $\{\Phi_{\alpha\beta}^{(4)}\}$ を具体的に書き下せば

$$\Phi_{10}^{(4)} = \max(X_1, X_2, X_3, X_4) \quad (7a)$$

$$\Phi_{01}^{(4)} = \max(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \quad (7b)$$

$$\Phi_{20}^{(4)} = \max(X_1 + X_2, X_1 + X_3, X_1 + X_4, X_2 + X_3, X_2 + X_4, X_3 + X_4) \quad (7c)$$

$$\Phi_{11}^{(4)} = \max(X_1 + Y_2, X_1 + Y_3, X_1 + Y_4, X_2 + Y_1, X_2 + Y_3, X_2 + Y_4, \\ X_3 + Y_1, X_3 + Y_2, X_3 + Y_4, X_4 + Y_1, X_4 + Y_2, X_4 + Y_3) \quad (7d)$$

$$\Phi_{02}^{(4)} = \max(Y_1 + Y_2, Y_1 + Y_3, Y_1 + Y_4, Y_2 + Y_3, Y_2 + Y_4, Y_3 + Y_4) \quad (7e)$$

$$\Phi_{30}^{(4)} = \max(X_1 + X_2 + X_3, X_1 + X_2 + X_4, X_1 + X_3 + X_4, X_2 + X_3 + X_4) \quad (7f)$$

$$\Phi_{21}^{(4)} = \max(X_1 + X_2 + Y_3, X_1 + X_2 + Y_4, X_1 + X_3 + Y_2, X_1 + X_3 + Y_4, \\ X_1 + X_4 + Y_2, X_1 + X_4 + Y_3, X_2 + X_3 + Y_1, X_2 + X_3 + Y_4, \\ X_2 + X_4 + Y_1, X_2 + X_4 + Y_3, X_3 + X_4 + Y_1, X_3 + X_4 + Y_2) \quad (7g)$$

$$\Phi_{12}^{(4)} = \max(X_1 + Y_2 + Y_3, X_1 + Y_2 + Y_4, X_1 + Y_3 + Y_4, X_2 + Y_1 + Y_3, \\ X_2 + Y_1 + Y_4, X_2 + Y_3 + Y_4, X_3 + Y_1 + Y_2, X_3 + Y_1 + Y_4, \\ X_3 + Y_2 + Y_4, X_4 + Y_1 + Y_2, X_4 + Y_1 + Y_3, X_4 + Y_2 + Y_3) \quad (7h)$$

$$\Phi_{03}^{(4)} = \max(Y_1 + Y_2 + Y_3, Y_1 + Y_2 + Y_4, Y_1 + Y_3 + Y_4, Y_2 + Y_3 + Y_4) \quad (7i)$$

$$\Phi_{40}^{(4)} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \quad (7j)$$

$$\Phi_{31}^{(4)} = \max(X_1 + X_2 + X_3 + Y_4, X_1 + X_2 + X_4 + Y_3, \\ X_1 + X_3 + X_4 + Y_2, X_2 + X_3 + X_4 + Y_1) \quad (7k)$$

$$\Phi_{22}^{(4)} = \max(X_1 + X_2 + Y_3 + Y_4, X_1 + X_3 + Y_2 + Y_4, X_1 + X_4 + Y_2 + Y_3, \\ X_2 + X_3 + Y_1 + Y_4, X_2 + X_4 + Y_1 + Y_3, X_3 + X_4 + Y_1 + Y_2) \quad (7l)$$

$$\Phi_{13}^{(4)} = \max(X_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4, X_2 + Y_1 + Y_3 + Y_4, \\ X_3 + Y_1 + Y_2 + Y_4, X_4 + Y_1 + Y_2 + Y_3) \quad (7m)$$

$$\Phi_{04}^{(4)} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \quad (7n)$$

である. $X_1 \geq X_2 \geq X_3 \geq X_4$ としても一般性を失わない. このとき, ただちに $X_1 = \Phi_{10}^{(4)}, X_2 = \Phi_{20}^{(4)} - \Phi_{10}^{(4)}, X_3 = \Phi_{30}^{(4)} - \Phi_{20}^{(4)}, X_4 = \Phi_{40}^{(4)} - \Phi_{30}^{(4)}$ を得る.

まず 1 組のデータ X_k, Y_k を見つけるために, 次の不等式

$$\Phi_{11}^{(4)} \leq \Phi_{10}^{(4)} + \Phi_{01}^{(4)} = X_1 + \Phi_{01}^{(4)} \quad (8a)$$

$$\Phi_{21}^{(4)} \leq \Phi_{20}^{(4)} + \Phi_{01}^{(4)} = X_1 + X_2 + \Phi_{01}^{(4)} \quad (8b)$$

$$\Phi_{31}^{(4)} \leq \Phi_{30}^{(4)} + \Phi_{01}^{(4)} = X_1 + X_2 + X_3 + \Phi_{01}^{(4)} \quad (8c)$$

に着目する. (8a) で等号が成り立たなければ $Y_1 = \Phi_{01}^{(4)}$ である. (8a) で等号が成り立つとき, (8b) で等号が成り立たなければ $Y_2 = \Phi_{01}^{(4)}$ である. (8a), (8b) で等号が成り立つとき, (8c) で等号が成り立たなければ $Y_3 = \Phi_{01}^{(4)}$ であり, 成り立てば $Y_4 = \Phi_{01}^{(4)}$ としてよいことがわかる. この結果をまとめたものが表 3 である. 表中の ($<$) は, 上で等号が成り立たないので, ただちに等号が成り立たないことが判明することを示している.

不等式 (8a)	$<$	$=$	$=$	$=$
不等式 (8b)	$(<)$	$<$	$=$	$=$
不等式 (8c)	$(<)$	$(<)$	$<$	$=$
$\Phi_{01}^{(4)}$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4

表 3: 不等式の等号成立等と $\Phi_{01}^{(4)}$ の値

つまり, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 の順に最大であるものを探していき, ある k で $Y_k = \Phi_{01}^{(4)}$ となり, 1 組のデータ X_k, Y_k が定まる. 残りの 3 組のデータはケース数 3 の場合に帰着する. 実際, 残りの 3 組から構成さ

れるデータセットの max-plus 不変式の基本形を $\{\Phi'_{\alpha\beta}(3)\}$ とおくと,

$$\Phi'_{10}(3) = \min(\Phi_{10}^{(4)}, \Phi_{20}^{(4)} - X_k) \quad (9a)$$

$$\Phi'_{01}(3) = \min(\Phi_{01}^{(4)}, \Phi_{02}^{(4)} - Y_k) \quad (9b)$$

$$\Phi'_{20}(3) = \min(\Phi_{20}^{(4)}, \Phi_{30}^{(4)} - X_k) \quad (9c)$$

$$\Phi'_{11}(3) = \min(\Phi_{11}^{(4)}, \Phi_{12}^{(4)} - Y_k, \Phi_{21}^{(4)} - X_k) \quad (9d)$$

$$\Phi'_{02}(3) = \min(\Phi_{03}^{(4)} - Y_k, \Phi_{02}^{(4)}) \quad (9e)$$

$$\Phi'_{30}(3) = \Phi_{40}^{(4)} - X_k \quad (9f)$$

$$\Phi'_{21}(3) = \min(\Phi_{22}^{(4)} - Y_k, \Phi_{31}^{(4)} - X_k) \quad (9g)$$

$$\Phi'_{12}(3) = \min(\Phi_{13}^{(4)} - Y_k, \Phi_{22}^{(4)} - X_k) \quad (9h)$$

$$\Phi'_{03}(3) = \Phi_{04}^{(4)} - Y_k \quad (9i)$$

となる。以下、その理由を述べる。

$\leq 1 \geq$ (9a),(9b)

3.2 (ケース数 3 の場合) の $\leq 1 \geq$ と同様であり、不等式 (27a),(27b) を用いる。

$\leq 2 \geq$ (9c)

Appendix の補題の系と不等式 (27c) を用いる。

$\Phi_{20}^{(4)} = \max(\Phi'_{20}(3), X_k + \Phi'_{10}(3))$, $\Phi_{30}^{(4)} - X_k = \max(\Phi'_{20}(3), \Phi'_{30}(3) - X_k)$ において, $2\Phi'_{20}(3) \geq (X_k + \Phi'_{10}(3)) + (\Phi'_{30}(3) - X_k) = \Phi'_{10}(3) + \Phi'_{30}(3)$ であるから, (9e) も同様であり, 不等式 (27d) を用いる。

$\leq 3 \geq$ (9d)

Appendix の補題と不等式を用いる。

$\Phi_{11}^{(4)} = \max(\Phi'_{11}(3), X_k + \Phi'_{01}(3), Y_k + \Phi'_{10}(3))$, $\Phi_{12}^{(4)} - Y_k = \max(\Phi'_{11}(3), \Phi'_{12}(3) - Y_k, X_k + \Phi'_{02}(3) - Y_k)$, $\Phi_{21}^{(4)} - X_k = \max(\Phi'_{11}(3), \Phi'_{21}(3) - X_k, Y_k + \Phi'_{20}(3) - X_k)$ において,

$$\Phi'_{11}(3) < \max(X_k + \Phi'_{01}(3), Y_k + \Phi'_{10}(3)) \quad (10a)$$

$$Y_k + \Phi'_{11}(3) < \max(\Phi'_{12}(3), X_k + \Phi'_{02}(3)) \quad (10b)$$

$$X_k + \Phi'_{11}(3) < \max(\Phi'_{21}(3), Y_k + \Phi'_{20}(3)) \quad (10c)$$

とすると矛盾するから。なぜなら, (10b),(10c) から X_k, Y_k をそれぞれ消去して

$$Y_k + 2\Phi'_{11}(3) < \max(\Phi'_{11}(3) + \Phi'_{12}(3), \Phi'_{21}(3) + \Phi'_{02}(3), Y_k + \Phi'_{20}(3) + \Phi'_{02}(3)) \quad (11a)$$

$$X_k + 2\Phi'_{11}(3) < \max(\Phi'_{11}(3) + \Phi'_{21}(3), \Phi'_{12}(3) + \Phi'_{20}(3), X_k + \Phi'_{02}(3) + \Phi'_{20}(3)) \quad (11b)$$

を得る。ここで, Appendix の不等式 (27e) から最後の“項”は落ちる。これらを用いて, (10a) において X_k, Y_k を消去すると,

$$3\Phi'_{11}(3) < \max(\Phi'_{11}(3) + \Phi'_{21}(3) + \Phi'_{01}(3), \Phi'_{12}(3) + \Phi'_{20}(3) + \Phi'_{01}(3), \Phi'_{11}(3) + \Phi'_{12}(3) + \Phi'_{10}(3), \Phi'_{21}(3) + \Phi'_{02}(3) + \Phi'_{10}(3)) \quad (12)$$

を得る。これは, Appendix の不等式 (27f),(27g),(27h),(27i) から成り立たない。

$\leq 4 \geq$ (9f),(9i)

自明である。

$\leq 5 \geq$ (9g)

Appendix の補題の系と不等式 (27j) を用いる。

$\Phi_{31}^{(4)} - X_k = \max(\Phi'_{21}(3), Y_k + \Phi'_{30}(3) - X_k)$, $\Phi_{22}^{(4)} - Y_k = \max(\Phi'_{21}(3), X_k + \Phi'_{12}(3) - Y_k)$ において, $2\Phi'_{21}(3) \geq (Y_k + \Phi'_{30}(3) - X_k) + (X_k + \Phi'_{12}(3) - Y_k) = \Phi'_{30}(3) + \Phi'_{12}(3)$ であるから, (9h) も同様であり, 不等式 (27k) を用いる。

以上, ケース数 4 の場合に, max-plus 不変式の基本形からデータセットを決定することができることが示された。

4 Discussion

ケース数が4までの場合に、max-plus 不変式の基本形からデータセットを決定することができることを示した。一般に、ケース数が n の場合にも同様に帰納的に示せると考えられる。今後の課題である。

さらに、max-plus 不変式がその基本形で表現できるといった性質が期待される（その場合、“基本不変式”と呼ぶことができよう）。また、max-plus 不変式の基本形の間の関係から対称群に対する Weyl の基本不変式の間の関係を見出し得る可能性がある。

ある正則条件、すなわち $X_i, Y_i (i = 1, \dots, n)$ それぞれにタイがなく、 $X_i - Y_j (i, j = 1, \dots, n)$ にもタイがない場合には、パラメトリックな場合と同様、max-plus 不変式の基本形からデータセットが決定されることは比較的容易に分かる [3]。この事実や本稿での議論はデータセットの秘匿と開示の議論に関係する。

Appendix

A1. 補題

max-plus 方程式

$$P_1 = \max(X, A_1, B_1), \quad P_2 = \max(X, A_2, B_2), \quad P_3 = \max(X, A_3, B_3) \quad (13)$$

において、

$$X \geq \max(A_1, B_1), \quad X \geq \max(A_2, B_2), \quad \text{または} \quad X \geq \max(A_3, B_3) \quad (14)$$

であれば、

$$\min(P_1, P_2, P_3) = X \quad (15)$$

となる。

[証明]

$$p_1 = x + a_1 + b_1, \quad p_2 = x + a_2 + b_2, \quad p_3 = x + a_3 + b_3 \quad (16)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}} &= \frac{1}{\frac{1}{x+a_1+b_1} + \frac{1}{x+a_2+b_2} + \frac{1}{x+a_3+b_3}} \\ &= \frac{1}{3} x \left(1 + \frac{\frac{1}{3}\gamma_1 x + \frac{2}{3}\gamma_2 + \frac{\gamma_3}{x}}{x^2 + \frac{2}{3}\gamma_1 x + \frac{1}{3}\gamma_2} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

を得る。ここで、

$$\begin{cases} \gamma_1 = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \\ \gamma_2 = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) + (a_1 + b_1)(a_3 + b_3) + (a_2 + b_2)(a_3 + b_3) \\ \gamma_3 = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) \end{cases} \quad (18)$$

である。式 (17), (18) で $p_i = e^{P_i/\epsilon}, x = e^{X/\epsilon}, a_i = e^{A_i/\epsilon}, b_i = e^{B_i/\epsilon}, \gamma_i = e^{\Gamma_i/\epsilon}$ とおき、 $\epsilon \rightarrow +0$ の極限をとること（超離散化）で

$$\min(P_1, P_2, P_3) = X + \max(0, \max(\Gamma_1 + X, \Gamma_2, \Gamma_3 - X) - \max(2X, \Gamma_1 + X, \Gamma_2)) \quad (19)$$

$$\begin{cases} \Gamma_1 = \max(A_1, B_1) \\ \Gamma_2 = \max(A_1, B_1) + \max(A_2, B_2) \\ \Gamma_3 = \max(A_1, B_1) + \max(A_2, B_2) + \max(A_3, B_3) \end{cases} \quad (20)$$

を得る。ただし、 $\max(A_1, B_1) \geq \max(A_2, B_2) \geq \max(A_3, B_3)$ とした。よって、

$$\max(\Gamma_1 + X, \Gamma_2, \Gamma_3 - X) - \max(2X, \Gamma_1 + X, \Gamma_2) \quad (21)$$

が0以下となることを確かめればよい。 $X \geq \max(A_3, B_3) = \Gamma_3 - \Gamma_2$ であれば、

$$(21) = \max(\Gamma_1 + X, \Gamma_2) - \max(2X, \Gamma_1 + X, \Gamma_2) \leq 0 \quad (22)$$

である。したがって、補題は証明された。

系

max-plus 方程式

$$P_1 = \max(X, A_1), P_2 = \max(X, A_2) \quad (23)$$

において,

$$X \geq A_1, \text{ または } X \geq A_2 \quad (\text{特に, } 2X \geq A_1 + A_2) \quad (24)$$

であれば,

$$\min(P_1, P_2) = X \quad (25)$$

となる.

[証明]

上の補題で, $A_i = B_i$ ($i = 1, 2, 3$), $P_2 = P_3$, $A_2 = A_3$ とすればよい.

A2. max-plus 不変式の基本形の間に成り立つ不等式

ケース数 2 の場合

$$2\Phi_{10}^{(2)} \geq \Phi_{20}^{(2)} \quad (26a)$$

$$2\Phi_{01}^{(2)} \geq \Phi_{02}^{(2)} \quad (26b)$$

$$2\Phi_{11}^{(2)} \geq \Phi_{20}^{(2)} + \Phi_{02}^{(2)} \quad (26c)$$

ケース数 3 の場合

$$2\Phi_{10}^{(3)} \geq \Phi_{20}^{(3)} \quad (27a)$$

$$2\Phi_{01}^{(3)} \geq \Phi_{02}^{(3)} \quad (27b)$$

$$2\Phi_{20}^{(3)} \geq \Phi_{10}^{(3)} + \Phi_{30}^{(3)} \quad (27c)$$

$$2\Phi_{02}^{(3)} \geq \Phi_{01}^{(3)} + \Phi_{03}^{(3)} \quad (27d)$$

$$2\Phi_{11}^{(3)} \geq \Phi_{20}^{(3)} + \Phi_{02}^{(3)} \quad (27e)$$

$$2\Phi_{11}^{(3)} \geq \Phi_{21}^{(3)} + \Phi_{01}^{(3)} \quad (27f)$$

$$2\Phi_{11}^{(3)} \geq \Phi_{12}^{(3)} + \Phi_{10}^{(3)} \quad (27g)$$

$$\Phi_{11}^{(3)} + \Phi_{10}^{(3)} \geq \Phi_{20}^{(3)} + \Phi_{01}^{(3)} \quad (27h)$$

$$\Phi_{11}^{(3)} + \Phi_{01}^{(3)} \geq \Phi_{02}^{(3)} + \Phi_{10}^{(3)} \quad (27i)$$

$$2\Phi_{21}^{(3)} \geq \Phi_{30}^{(3)} + \Phi_{12}^{(3)} \quad (27j)$$

$$2\Phi_{12}^{(3)} \geq \Phi_{03}^{(3)} + \Phi_{21}^{(3)} \quad (27k)$$

参考文献

- [1] H. Weyl, The classical groups: their invariants and representations, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1939.
- [2] 松井清, 「統計解析とセキュリティを考慮したデータ再構成」, 日本数学会 2006 年度年会講演アブストラクト (2006).
- [3] 松井清, 「セキュリティの深さの定義とデータ追加の取り扱い (不変式論からのアプローチ)」, 2006 年度表現論シンポジウム講演集 (2006).
- [4] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 3247-3250.