

戸田階層とパンルヴェ方程式 (Toda lattice hierarchy and Painlevé equations)

菊地 哲也 (Tetsuya Kikuchi)
東大数理・研究拠点形成特任研究員

1 はじめに

一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層により与えられるソリトン方程式系の相似簡約という視点による Painlevé 方程式の研究が現在進行中である (筧三郎, 池田岳との共同研究. [KK1], [KK2], [KIK]). まずソリトン方程式の相似簡約とは何かということを, 最も易しい例である変形 KdV 方程式

$$q_t = \frac{1}{4}q_{xxx} - \frac{3}{2}q^2q_x \quad (1.1)$$

を用いて説明する. この方程式は, 未知関数 $q = q(x, t)$ の次数を 1, 独立変数 x, t の次数をそれぞれ $-1, -3$ と定める (微分すると次数がそれぞれ 1, 3 だけ上がる) と, 4 次の同次式である. これより方程式 (1.1) を満たす q は, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して

$$q(x, t) \mapsto \lambda q(\lambda x, \lambda^3 t) \quad (1.2)$$

という変換を行っても (1.1) の解であることがわかる. そこで, 自己相似条件

$$q(x, t) = \lambda q(\lambda x, \lambda^3 t) \quad (1.3)$$

を満たす解を考える. 条件 (1.3) の等式を λ で微分してから $\lambda \rightarrow 1$ とおくことで, 次が得られる:

$$q + xq_x + 3tq_t = 0. \quad (1.4)$$

(1.1), (1.4) から q_t を消去すると

$$\frac{q + xq_x}{3t} + \frac{q_{xxx}}{4} - \frac{3}{2}q^2q' = 0$$

となるが, これは x に関して積分できて, その結果次の 2 階常微分方程式が得られる:

$$\frac{xq}{3t} + \frac{q_{xx}}{4} - \frac{q^3}{2} = C \quad (C \text{ は積分定数}). \quad (1.5)$$

さらに, $t = -4/3$ とおけば, Painlevé II 型方程式

$$\frac{d^2q}{dx^2} = 2q^3 + xq + 4C \quad (1.6)$$

が得られる. ここでは変形 KdV 方程式の場合を述べたが, 他のソリトン方程式も類似の手続きで Painlevé 方程式と関連付けることができる. ただし, ソリトン方程式を任意に与えたときに相似簡約で得られた常微分方程式が 2 階になるとは限らないし, なったとしてもそれが Painlevé になるのか, あるいは 6 種の Painlevé 方程式のうちのどれに一致するかを調べることは, 一般にはかなり大変であり, また必ずしもそのこと自体にこだわることはないとも言える (問題の背景については教科書 [AS1] 参照. ここに述べられているように「非線形偏微分方程式は, リダクションにより得られるあらゆる非線形常微分方程式が, 全て Painlevé 性をみたすときにのみ逆散乱変換で解ける」という予想がある).

我々の研究の出発点は, 野海・山田による $A_n^{(1)}$ 型 affine Weyl 群対称性に基づいた Painlevé 方程式の一般化 [NY] が, $A_n^{(1)}$ “principal” Drinfel’d-Sokolov 階層の相似簡約として得られるという事実である. ここで principal Drinfel’d-Sokolov 階層とは, ソリトン理論でいう KP 階層の n 周期簡約を, 擬微分作用素ではなく affine Lie 環を用いて構成した方程式系のことである [DS]. 野海・山田に引き続く我々の研究では, principal 以外の階層 (このように拡張された方程式系を一般化 Drinfel’d-Sokolov 階層と呼ぶ) を調べ, その場合でも相似簡約としてやはり Painlevé 方程式が得られることを示した [KK1], [KK2], [KIK]. 我々の結果も含めて, これまでに知られている結果をまとめると次のようになっている¹.

Lie 環	実現	ソリトン方程式	→ Painlevé 方程式
$A_1^{(1)}$	principal	変形 KdV	→ P_{II} [AS2]
	homogeneous	非線形 Schrödinger	→ P_{IV} [JM], [KK1]
$A_2^{(1)}$	principal	変形 Boussinesq	→ P_{IV} [NY]
	“3 = 2 + 1”	変形矢嶋・及川	→ P_V [KIK]
	homogeneous	3 波相互作用	→ P_{VI} [KK2]
$A_3^{(1)}$	principal	4-reduced KP	→ P_V [NY]
	⋮	⋮	⋮

表 1: 一般化 Drinfel’d-Sokolov 階層と Painlevé 方程式

また, この表の他に, A 型以外の Lie 環の場合 [FS], [SF] や, q 差分ソリトン方程式と q 差分 Painlevé 方程式の対応の研究 [KNY], [KK3] もある.

本稿では, 上の表における $A_l^{(1)}$ principal 階層の方程式と, 野海・山田による Painlevé 型方程式系の対応を詳しく紹介し, 現在どこまで明らかにされ,, 何が問題となっているかについて述べる. なお, ここでは一般化 Drinfel’d-Sokolov 階層を戸田格子階層 [UT], [T1] の特殊化と考えて定式化を行う. 一般に

$$\begin{aligned}
A_l^{(1)} \text{ principal} &\leftrightarrow 1 \text{ 成分戸田階層の } l+1 \text{ 周期簡約} \\
A_l^{(1)} \text{ homogeneous} &\leftrightarrow l+1 \text{ 成分戸田階層の } \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{l \text{ times}} \text{ 簡約}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

という対応がある. 戸田階層の周期簡約では KdV 方程式などの Lax 表示は自然には得られず, 変形 KdV などを含む「変形 KP 階層」の $l+1$ 周期簡約の Lax 表示が得られるが, ここではその対応 (Miura 変換) は扱わない. また, 2 成分戸田階層から現れる Painlevé 方程式の例については, 箕氏による解説 [学会] がある.

¹変形 KdV と KdV のように, “Miura 変換” で移りあう方程式は, 相似簡約で同じ Painlevé 方程式に移るため, この表では Miura 変換の自由度は無視している

2 変型 KP 階層の構成

2.1 Sato-Wilson operators と Lax operators

「はじめに」で述べたように, 戸田格子階層の差分作用素による定式化 [UT], [T1] を説明する. まず, e^{∂_s} を, 離散変数 $s \in \mathbb{Z}$ の差分作用素 $e^{\partial_s} f(s) = f(s+1)$ として佐藤・Wilson 作用素を

$$\begin{aligned} W(e^{\partial_s}; s) &= 1 + w_1(s)e^{-\partial_s} + w_2(s)e^{-2\partial_s} + w_3(s)e^{-3\partial_s} + \cdots, \\ \bar{W}(e^{\partial_s}; s) &= \bar{w}_0(s) + \bar{w}_1(s)e^{\partial_s} + \bar{w}_2(s)e^{2\partial_s} + \cdots. \end{aligned} \quad (2.1)$$

で定義する. さらにこのうち W を用いて Lax 作用素を

$$\begin{aligned} L &:= W e^{\partial_s} W^{-1} \\ &= e^{\partial_s} + u_1(s) + u_2(s)e^{-\partial_s} + u_3(s)e^{-2\partial_s} + u_4(s)e^{-3\partial_s} + \cdots \end{aligned} \quad (2.2)$$

で, 高階の Lax 作用素を同様に

$$\begin{aligned} L^n &:= W e^{n\partial_s} W^{-1} \\ &= e^{n\partial_s} + u_1^{(n)}(s)e^{(n-1)\partial_s} + \cdots + u_n^{(n)}(s) + u_{n+1}^{(n)}(s)e^{-\partial_s} + \cdots \end{aligned} \quad (2.3)$$

で定義する. これら作用素の係数関数のうち, 差分作用素に関して定数項と -1 次の項が方程式を記述するときに基本的な量となる. これらはたとえば

$$\begin{aligned} u_1(s) &= w_1(s) - w_1(s+1), \\ u_2(s) &= w_2(s) - w_2(s+1) - u_1(s)w_1(s), \\ u_2^{(2)}(s) &= w_2(s) - w_2(s+2) - u_1^{(2)}(s)w_1(s+1) = u_2(s) + u_2(s+1) + u_1(s)^2, \\ u_3^{(2)}(s) &= w_3(s) - w_3(s+2) - u_1^{(2)}(s)w_2(s+1) - u_2^{(2)}(s)w_1(s) \end{aligned}$$

と表せる. W に対して L は一意に決まるが, 逆に L が与えられても W は一意に定まらないことを注意しておく.

2.2 Sato-Wilson 方程式

W の係数である関数 $w_i, \bar{w}_j$ に, 変数 $t = (t_1, t_2, \dots)$ による時間発展を次で定義する:

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = -B_n^c W = B_n W - W e^{n\partial_s}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t_n} = B_n \bar{W}, \quad B_n := (L^n)_{\geq 0}, \quad B_n^c := (L^n)_{< 0}. \quad (2.5)$$

ここで $(X)_{\geq 0}, (X)_{< 0}$ はそれぞれ差分作用素 X の e^{∂_s} に関する非負べき, 負べきをとるという意味である. 戸田格子階層というときは, さらに時間変数 $\bar{t} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots)$ による時間発展

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \bar{t}_n} &= [\bar{W} e^{-n\partial_s} \bar{W}^{-1}]_{< 0} W, \\ \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}_n} &= -[\bar{W} e^{-n\partial_s} \bar{W}^{-1}]_{\geq 0} \bar{W} = [\bar{W} e^{-n\partial_s} \bar{W}^{-1}]_{< 0} \bar{W} - \bar{W} e^{-n\partial_s} \end{aligned}$$

も一緒に考える. この方程式は Painlevé 方程式との対応を考えるとときも使うことがあり, たとえば 2 周期簡約で得られるソリトン方程式である sine-Gordon 方程式から Painlevé III 型方程式を構成できるのだが, 本稿では変数 $\bar{t}$ は全て 0 とする.

Sato-Wilson 方程式のうち, (2.4) の -1 次の係数より得られる関係式

$$\frac{\partial w_1(s)}{\partial t_n} = -u_{n+1}^{(n)}(s) \quad (2.6)$$

と, (2.5) の 0 次より得られる関係式

$$\frac{\partial \bar{w}_0(s)}{\partial t_n} = u_n^{(n)}(s) \bar{w}_0(s) \quad \Leftrightarrow \quad u_n^{(n)}(s) = \frac{\partial}{\partial t_n} \log \bar{w}_0(s) \quad (2.7)$$

は基本的である. すなわち, Lax operator L^n の -1 次の係数は $w_1(s)$ の t_n 微分であり, 定数項は $\bar{w}_0(s)$ の t_n による $\log$ 微分であるという意味づけができる.

2.3 Lax 方程式

Sato-Wilson 方程式により, Lax 作用素 L は次の方程式 (Lax 方程式) をみたすことがわかる

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n, L] = -[B_n^c, L] \quad (2.8)$$

特に $n = 1$ のとき, 右辺の括弧積の 2 通りの表示は $[B_1, L] = -[B_1^c, L] = [B_1, B_1^c]$ なので, 例えば

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(s)}{\partial t_1} &= [e^{\partial_s}, u_2(s)e^{-\partial_s}] = u_2(s+1) - u_2(s), \\ \frac{\partial u_2(s)}{\partial t_1} &= u_3(s+1) - u_3(s) + u_2(s)\{u_1(s) - u_1(s-1)\}, \\ \frac{\partial u_3(s)}{\partial t_1} &= u_4(s+1) - u_4(s) + u_3(s)\{u_1(s) - u_1(s-2)\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

が得られる. これらの等式より $u_i(s) - u_i(s+1)$ という関数は, より低次の項の係数 $u_1, \dots, u_{i-1}$ の, 変数 t_1 による微分多項式として表すことができる.

2.4 零曲率方程式

Sato-Wilson 方程式は,

$$\frac{\partial}{\partial t_n} - B_n = W \left(\frac{\partial}{\partial t_n} - e^{n\partial_s} \right) W^{-1} = \bar{W} \left(\frac{\partial}{\partial t_n} \right) \bar{W}^{-1}$$

と書き直せるので, B_n と B_m の間の関係式 (零曲率方程式)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_n} - B_n, \frac{\partial}{\partial t_m} - B_m \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial B_n}{\partial t_m} = [B_m, B_n] + \frac{\partial B_m}{\partial t_n}$$

が得られる. 特に $n = 1$ として 0 次の項を見ると

$$\frac{\partial u_1(s)}{\partial t_m} = \frac{\partial u_m^{(m)}(s)}{\partial t_1} \quad (2.10)$$

となり, $u_1(s)$ の満たす偏微分方程式が得られた. この方程式が周期条件のもとでソリトン方程式になる. また, 関係式 (2.10) は (2.7) より両辺とも

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_m} \log \bar{w}_0(s)$$

と表せるので trivial な関係式なのだが, 非線形方程式の従属変数 $u_i(s)$ で考えると明らかではない方程式になる.

2.5 波動関数と τ 関数

Sato-Wilson 作用素 W を用いて波動関数 Ψ を

$$\Psi(s, t, \lambda) = W \lambda^s e^{\xi(t, \lambda)} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(s, t) \lambda^{-n}\right) \lambda^s e^{\xi(t, \lambda)}, \quad (2.11)$$

ここで $\xi(t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda^n$ と定義し, また $\bar{W}$ を用いて $\bar{\Psi}(s, t, \lambda) = \bar{W} \lambda^s$ とおく. この $\bar{\Psi}$ は戸田階層の波動関数において変数 $\bar{t}_n = 0$ としたものである. $\Psi, \bar{\Psi}$ は線形方程式

$$L\Psi = \lambda\Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t_n} = B_n \Psi, \quad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t_n} = B_n \bar{\Psi}$$

を満たす. よって Lax 方程式や零曲率方程式は, この線形方程式系の両立条件である. 波動関数 Ψ に対して τ 関数を

$$\Psi(s, t, \lambda) = \frac{\tau(s, t - [\lambda^{-1}])}{\tau(s, t)} \lambda^s e^{\xi(t, \lambda)}, \quad [\lambda^{-1}] = \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{2\lambda^2}, \frac{1}{3\lambda^3}, \dots\right), \quad (2.12)$$

$$\bar{\Psi}(s, t, \lambda) = \frac{\tau(s+1, t)}{\tau(s, t)} \lambda^s, \quad (2.13)$$

で定義する. 両辺を λ で展開して係数を比較すれば τ 関数と $w_i, \bar{w}_j$ の関係が得られる. 特に

$$w_1(s, t) = -\frac{\partial}{\partial t_1} \log \tau(s, t), \quad \bar{w}_0(s, t) = \frac{\tau(s+1, t)}{\tau(s, t)} \quad (2.14)$$

が基本的である.

3 周期簡約とソリトン方程式

Lax 作用素に $l+1$ 周期条件

$$W e^{(l+1)\partial_s} = e^{(l+1)\partial_s} \circ W \quad \Leftrightarrow \quad L^{l+1} = e^{(l+1)\partial_s}$$

を課す. このとき従属変数たちは, 関係式

$$w_n(s+l+1) = w_n(s), \quad u_n(s+l+1) = u_n(s) \quad (3.1)$$

を満たす. また, このとき L^{l+1} の係数 $u_m^{(l+1)}$ はすべて 0 なので,

$$u_1(s) + u_1(s+1) + \cdots + u_1(s+l+1) = 0$$

をはじめとする関係式が得られる. そのためこれらと $u_n(s)$ の満たす微分方程式 (2.9) を合わせれば Lax 作用素の係数が, L の 0 次の項 $u_1(s)$ の t_1 微分多項式で表すことができる. このとき方程式 (2.10) を $u_1(s)$ のみで書いたものがソリトン方程式であり, 例えば $l=1, m=3$ の場合がはじめに述べた変形 KdV 方程式, $l=2, m=2$ の場合が変形 Boussinesq 方程式である.

4 相似簡約

4.1 相似条件

Sato-Wilson 作用素の 1 パラメータ変形を

$$W_\lambda(e^{\partial_s}; s, t) := \lambda^s \circ W(e^{\partial_s}; s, t_\lambda) \circ \lambda^{-s}, \quad (4.1)$$

$$= 1 + \lambda w_1(s; t_\lambda) e^{-\partial_s} + \lambda^2 w_2(s; t_\lambda) e^{-2\partial_s} + \cdots$$

$$\bar{W}_\lambda(e^{\partial_s}; s, t) := \lambda^s \circ \bar{W}(e^{\partial_s}; s, t_\lambda) \circ \lambda^{-s-c(s)}. \quad (4.2)$$

$$= \lambda^{-c(s)} \bar{w}_0(s; t_\lambda) + \lambda^{-c(s+1)-1} \bar{w}_1(s; t_\lambda) e^{\partial_s} + \lambda^{-c(s+2)-2} \bar{w}_2(s; t_\lambda) e^{2\partial_s} + \cdots$$

で定義する. ここで $t_\lambda := (\lambda t_1, \lambda^2 t_2, \dots)$ であり, $c(s)$ は t に依存しない定数とする. この W_λ も Sato-Wilson 方程式を満たすことがわかるので, W がこの変形で不変であるという相似条件

$$W_\lambda = W, \quad \bar{W}_\lambda = \bar{W} \quad (4.3)$$

を課すことは意味がある. (4.3) を λ で微分して $\lambda=1$ とおくと,

$$\sum_n n t_n \frac{\partial W}{\partial t_n} = -w_1 e^{-\partial_s} - 2w_2 e^{-2\partial_s} + \cdots = [W, s] \quad (4.4)$$

が得られる. 特に $e^{-\partial_s}$ 次の係数に Sato-Wilson 方程式 (2.6) を代入すると

$$-w_1(s) = \sum_n n t_n \frac{\partial w_1(s)}{\partial t_n} = - \sum_n n t_n u_{n+1}^{(n)}(s) \quad (4.5)$$

がわかる. こうして $w_1(s)$ を L^n の -1 次の係数で表す関係式が得られた. 一方 $\bar{W}$ の相似条件を λ で微分して $\lambda=1$ とおくと,

$$\sum_n n t_n \frac{\partial \bar{W}}{\partial t_n}(s; t) = [\bar{W}(s; t), s] + \bar{W}(s; t) c(s)$$

であり, 両辺の次数 0 の項を比較すると

$$\sum_n nt_n \frac{\partial}{\partial t_n} \log \bar{w}_0(s; t) = \sum_n nt_n u_n^{(n)}(s; t) = c(s) \quad (4.6)$$

が得られる. すなわち L^n の 0 次の項から定数が得られる. これが Painlevé 方程式のパラメータになるのである. このように, 相似条件を課した偏微分方程式を積分したらパラメータが現れるという現象を, 計算によらずに Sato-Wilson 作用素の対称性に組み込んで定式化したところが我々の研究 [KK1, KK2, KK3, 講究, 学会] のひとつの重要なポイントである.

4.2 Orlov-Shulman 作用素

Sato-Wilson 作用素により, Orlov-Shulman 作用素 M を

$$M := W(s + \sum_n nt_n e^{n\partial_s})W^{-1} = WsW^{-1} + \sum_n nt_n L^n$$

で定義する. 関係式

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_n} - e^{n\partial_s}, s + \sum_n nt_n e^{n\partial_s} \right] = 0$$

によりこの作用素 M は

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_n} - B_n, M \right] = 0 \quad (4.7)$$

を満たす. 一方, 相似条件より得られる関係式 (4.4) に Sato-Wilson 方程式を合わせると,

$$WsW^{-1} + \sum_n nt_n L^n = s + \sum_n nt_n B_n$$

が得られる. すなわち相似条件 $W_\lambda = W$ は, Orlov-Shulman 作用素 M に対して

$$(M)_{\geq 0} = M$$

という条件を課すことと同値である.

5 Painlevé 型方程式

変形 KP 階層に周期条件と相似条件の両方を課することにより Painlevé 型の常微分方程式が得られる. $l+1$ 周期条件のもとでは, 差分作用素 e^{∂_s} を $l+1$ 次行列

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ z & & & & 0 \end{bmatrix}$$

と同一視でき, 差分作用素 $A = \sum a_n(s)e^{n\partial_s}$ は行列 $\sum_n \text{diag}(a_n(0), a_n(1), \dots, a_n(l))\Lambda^n$ とみなせる. さらに作用素としての s は $[s, e^{n\partial_s}] = ne^{n\partial_s}$ という関係式を満たすことから

$$(l+1)z\frac{d}{dz} + \frac{1}{2}\text{diag}(l, l-2, \dots, -l)$$

になることがわかる. このように読み替え, t_n 依存性を調整して (4.7) を書けば Painlevé 型の方程式を記述する Lax 方程式が得られる.

たとえば 3 周期条件のもとで $t_2 = -3/2, t_3 = t_4 = \dots = 0$ とおくと, (4.7) は, 行列係数の微分作用素

$$z\frac{d}{dz} - A(z) = z\frac{d}{dz} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & f_1 & 1 \\ z & \varepsilon_2 & f_2 \\ zf_0 & z & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t_1} - B_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} - \begin{bmatrix} u_1(1) & 1 & 0 \\ 0 & u_1(2) & 1 \\ z & 0 & u_1(0) \end{bmatrix}$$

の間の零曲率方程式となる. ここで行列 $A(z)$ の成分を Lax 作用素の成分で表すと

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{t_1}{3} + u_1^{(2)}(1), & f_2 &= -\frac{t_1}{3} + u_1^{(2)}(2), & f_0 &= -\frac{t_1}{3} + u_1^{(2)}(0) \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{3} - \frac{t_1}{3}u_1(1) + u_2^{(2)}(1), & \varepsilon_2 &= -\frac{t_1}{3}u_1(2) + u_2^{(2)}(2), & \varepsilon_3 &= -\frac{1}{3} - \frac{t_1}{3}u_1(0) + u_2^{(2)}(0) \end{aligned}$$

となる. 方程式 (4.7) をここで導入した新しい成分で表すと $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = \varepsilon'_3 = 0$,

$$\begin{cases} f'_1 = f_1(f_0 - f_2) - \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ f'_2 = f_2(f_1 - f_0) - \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ f'_0 = f_0(f_2 - f_1) - \varepsilon_3 + \varepsilon_1 - 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

となる ($'$ は t_1 微分). これが Painlevé IV 型方程式の対称形式である [N].

6 考察

本稿では述べていないが, この対応によりソリトン方程式と Painlevé 方程式の有理解の対応や, τ 関数の満たす双線形方程式, affine Weyl 群対称性などが説明できる [N]. ここで問題にしたいのは, Painlevé 方程式のハミルトニアンである. たとえば前節の 3 周期条件をおいた場合だと, f_1, f_2, f_0 の定義より $f_0 + f_1 + f_2 = -t_1$ だから, 方程式 (5.1) は

$$q := f_1 \quad p := f_2$$

のみで表示でき

$$\begin{cases} q' = q(-x - q - 2p) - \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ p' = p(2q + p + x) - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{cases} \quad (6.1)$$

となる. この方程式は,

$$H = -(p + q + x)pq + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)p + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)q - \frac{x}{3}(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad (6.2)$$

という p, q についての多項式関数により

$$q' = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p' = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

という正準方程式になる. この関数 H に対して関数 τ を $H = \tau'/\tau$ となるように定めると, τ は $\mathbb{C}$ 上一価正則関数であり, 零点は 1 位である. そこでこの τ 関数は Painlevé 方程式の解を正則関数の比で表すのに用いるものであるが, これが (2.12) で定義されたソリトン方程式の τ 関数に (t_1 の多項式程度のずれで) 一致すると信じられている. しかしソリトンの τ 関数は (6.2) のように非線形方程式の従属変数で表示されるものではないので, Painlevé 方程式の多項式ハミルトニアンをソリトンの立場から捉えるという問題は難しい. 本講演ではこの問題について論じる予定である. 本稿に述べた考察により, 関数 (6.2) は $u_1(s)$ の (t_1 微分を含む) 多項式で書き直すことができ, 一方では関係 (4.5) と (2.14) により相似条件のもとで τ 関数も $u_1(s)$ の微分多項式で書くことができるのだが, この両者が一致していることをこの 3 周期の例を含むいくつかの場合に示す.

References

- [AS1] Ablowitz, M. J and Segur, H. *Solitons and the inverse scattering transform*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1981 (日本語訳: ソリトンと逆散乱変換 (薩摩・及川 訳), 日本評論社, 1991).
- [AS2] Ablowitz, M. J.. and Segur, H., “Exact linearization of a Painlevé transcendent”, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977), 1103–1106.
- [DS] Drinfel’d, V. G. and Sokolov, V. V., “Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type”, *J. Sov. Math.* **30** (1985), 1975–2036.
- [FS] Fuji, K. and Suzuki, T., “The sixth Painleve equation arising from $D_4^{(1)}$ hierarchy”. *J. Phys. A* **39** (2006), no. 39, 12073–12082.
- [JM] Jimbo, M. and Miwa, T., “Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. III”, *Physica D* **4** (1981), 26–46.
- [KNY] Kajiwara, K., Noumi, M. and Yamada, Y., “ q -Painlevé systems arising from q -KP hierarchy”, *Lett. in Math. Phys.* **62** (2002), 259–268.
- [KK1] Kakei, S. and Kikuchi, T., “Affine Lie group approach to a derivative nonlinear Schrödinger equation and its similarity reduction”, *Int. Math. Res. Not.* **78** (2004), 4181–4209.
- [KK2] Kakei, S. and Kikuchi, T., “The sixth Painlevé equation as similarity reduction of $\widehat{\mathfrak{gl}}_3$ hierarchy”, *Lett. Math. Phys.* **79** 221–234 (2007).
- [KK3] Kakei, S. and Kikuchi, T., “A q -analogue of $\widehat{\mathfrak{gl}}_3$ hierarchy and q -Painlevé VI”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 12179–12190 (2006).

- [講究] 筧三郎, 菊地哲也, “一般化ドリinfeld・ソコロフ階層の離散化と相似簡約” 数理解析研究所講究録 1422 「可積分系数理の展望と応用」, 192–203 (2005).
- [学会] 筧三郎, “戸田階層から見たパンルベ方程式”, 日本数学会 2005 年度年会無限可積分系セッション特別講演 (2005 年 3 月, 日本大学).
- [KIK] Kikuchi, T., Ikeda, T. and Kakei, S., “Similarity reduction of the modified Yajima-Oikawa equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 11465–11480.
- [NY] Noumi, M. and Yamada, Y., “Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$ ”, *Funkcial. Ekvac.* **41** (1998), 483–503.
- [N] 野海正俊, “パンルヴェ方程式—対称性からの入門” 朝倉書店 (2000).
- [SF] 鈴木貴雄, 藤健太, “ドリinfeld・ソコロフ階層の相似簡約と結合型パンルヴェ VI 系” 数理解析研究所講究録 1541 「可積分系数理の眺望」, 1–14 (2007).
- [T1] 高崎金久, “可積分系の世界—戸田格子とその仲間” 共立出版 (2001).
- [UT] Ueno, K. and Takasaki, K., “Toda lattice hierarchy”, *Adv. Stud. in Pure Math.* **4** (1981), 1–95.