

C 型 affine Hecke 代数の幾何学的表現論について

An exotic Deligne-Langlands correspondence for symplectic groups

加藤 周*

2007 年 10 月 31 日

概 要

講演で与える C 型 affine Hecke 代数の表現論の幾何学的記述をなるべく少ない準備の下で定式化する。

1 C 型 affine Hecke 代数

$\mathbb{C}$ 上の Laurant 多項式環 $\mathcal{A} := \mathbb{C}[\mathbf{q}_0^{\pm 1}, \mathbf{q}_1^{\pm 1}, \mathbf{q}_2^{\pm 1}]$ を取る。そして整数 n に依存して決まる単位元を持つ結合的 $\mathcal{A}$ 代数 $\mathbb{H} = \mathbb{H}_n$ を、 T_i, X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を生成元として以下の 9 つの関係式を持つものと定義する。

1. 任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対して $X_i X_j = X_j X_i$.
2. 任意の $1 \leq i < i+1 < j \leq n$ に対して $T_i T_j = T_j T_i$.
3. 任意の $1 \leq i < n$ に対して $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$.
4. $T_{n-1} T_n T_{n-1} T_n = T_n T_{n-1} T_n T_{n-1}$.
5. 任意の $1 \leq i < n$ に対して $(T_i + 1)(T_i - \mathbf{q}_2) = 0$.
6. $(T_n + 1)(T_n + \mathbf{q}_0 \mathbf{q}_1) = 0$.
7. 任意の $1 \leq i, j \leq n$ で $|i - j| > 1$ を満たすものまたは $i = n, j = n - 1$ に対して $T_i X_j = X_j T_i$.

*京都大学数理解析研究所 E-mail:kato@kurims.kyoto-u.ac.jp

8. 任意の $1 \leq i < n$ に対して $T_i X_i T_i = q_2 X_{i+1}$.

9. $(X_n T_n + q_0)(X_n T_n + q_1) = 0$.

Remark 1.1. いわゆる $C_n^{(1)}$ 型の affine Coxeter 図形は

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & & n-2 & n-1 & n \\ \circ & \text{--} & \circ & \text{--} & \circ & \text{--} & \circ \\ & \text{--} & & & & & \text{--} \end{array}$$

であり、0 番目の頂点に対応する $\mathbb{H}$ の岩堀-松本生成元は定数倍を除いて

$$T_0 := (X_1 T_1 \cdots T_{n-1} T_n T_{n-1} \cdots T_1)^{-1},$$

1 番目から n 番目までの頂点に対応する岩堀-松本生成元はそれぞれ $T_1, \dots, T_n$ と思う事ができる。ここで T_0 が Hecke 型関係式

$$(T_0 + q_0^{-1} q_2^{\frac{1-n}{2}})(T_0 + q_1^{-1} q_2^{\frac{1-n}{2}}) = 0$$

を満たす事は条件 8 と条件 9 を用いて、 $T_0 T_i = T_i T_0$ ($i \geq 2$) と $(T_0 T_1)^2 = (T_1 T_0)^2$ を満たす¹事も条件を用いて計算すると分かる。

Remark 1.2. 我々の設定の中で目を引くのはパラメータ q_0, q_1 である。つまり

$$(T_i + 1)(T_i - t_i) = 0$$

という通常の (正規化された) Hecke 関係式から逆算すると $q_0 = \pm \sqrt{-t_0 t_n}$, $q_1 = \pm \sqrt{-t_0^{-1} t_n}$ (復号同順) という一見すると非常に奇妙な式が導かれる。しかし、加藤信一の結果によりこの奇妙な式は $\mathbb{H}$ の主系列表現の退化可能性と元々の t_0, t_n よりも直接的に結びついている事が分かる。また、 C 型 affine Hecke 代数の多項式表現の 2-パラメタ変形であるいわゆる野海表現にも t_0, t_n の代わりに q_0, q_1 が出現する。

この時、

$$\mathcal{H} := \mathbb{H} / (q_0 = -q_1 = q_2 = 1)$$

とおくと、 $T_1, \dots, T_n$ の $\mathcal{H}$ のおける像 $s_1, \dots, s_n$ は B_n 型 (有限) Weyl 群 W と同形な群を $\mathcal{H}$ 内で生成する。また、 W は $\mathcal{H}$ 内の $X_1, \dots, X_n$ の像で生成される部分代数 $\mathcal{P}$ を保つ。

さて、 $\mathcal{P}$ は自然な分裂

$$\mathcal{P} \cong \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}] \subset \mathbb{H}$$

を持ち、この埋め込みの像にも W が左辺への作用を通じて作用する。

¹但し、形式的に $n = 1$ とした時には $(T_0 T_1)^2 = (T_1 T_0)^2$ という関係式はない。(あってしまうとこれは B_2 型 Hecke 代数になってしまう。)

Theorem 1.3 (Bernstein-Lusztig). $Z(\mathbb{H})$ は $\mathcal{A}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^W$ と同型。

$\mathfrak{P}$ を $\mathcal{A}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^W$ の 1 次元表現全体の集合とする。すると、各 $a \in \mathfrak{P}$ は $Z(\mathbb{H})$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_a$ を定める。ここで、 $\mathbb{H}_a := \mathbb{C}_a \otimes_{Z(\mathbb{H})} \mathbb{H}$ と定義する。これは $(\#W)^2$ 次元の $\mathbb{C}$ -代数になる。

Theorem 1.4 (Schur の補題). $\text{Irrep} \mathbb{H} = \coprod_{a \in \mathfrak{P}} \text{Irrep} \mathbb{H}_a$ となる。

2 $\mathbb{H}$ に付随する幾何学と表現論

$G = Sp(2n, \mathbb{C})$ とする。また、 $\mathbb{G} := G \times (\mathbb{C}^\times)^3$ とおく。ここで $V_1 := \mathbb{C}^{2n}$ として、 $V_2 := \wedge^2 V_1$ とし、さらに

$$\mathbb{V} := V_1^{\oplus 2} \oplus V_2$$

とおく。そして

$$\mathfrak{N} := \text{Spec} \mathbb{C}[\mathbb{V}] / \langle \mathbb{C}[\mathbb{V}]_+^G \rangle$$

とする。ここで $\mathbb{C}[\mathbb{V}]_+^G$ は定数項のない $\mathbb{V}$ の G -不変な多項式のなす集合である。すると、 $\mathbb{V} = V_1 \oplus V_1 \oplus V_2$ の各直和因子のスカラー倍作用と対角 G 作用が $\mathbb{G}$ の $\mathfrak{N}$ への作用を誘導する事が従う。

$R(\mathbb{G})$ によって $\mathbb{G}$ の $\mathbb{C}$ 上の既約有限次元表現の $\mathbb{C}$ -線形結合を基底とし、それらのテンソル積を積とする環 (表現環) を表す。

Theorem 2.1 (Well-known). $R(\mathbb{G}) \cong \mathcal{A}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^W$ を右辺の q_i ($i = 0, 1, 2$) が各々 $\mathbb{G} = G \times (\mathbb{C}^\times)^3$ の i 番目の $\mathbb{C}^\times$ の 1 次表現で残りが自明に作用するものの類に対応するように構成できる。

Corollary 2.2. $\mathfrak{P}$ の元は $\mathbb{G}$ の半単純元の共役類と 1 対 1 対応する。

Theorem 2.3 ($\mathbb{H}$ の既約表現の分類 cf. [K06a, K06b]). $a = (s, q_0, q_1, q_2) \in \mathbb{G}$ を半単純元とし、対応する $\mathfrak{P}$ の元と同一視する。すると、

1. q_2 は $2n$ 次以下の 1 の冪根でない。
2. $\{q_0 q_1^{\pm 1}\} \cap \{q_2^m; -n < m < n\} = \emptyset$ が成立。

という条件の下で 1 対 1 対応

$$\text{Irrep} \mathbb{H}_a \leftrightarrow Z_{\mathbb{G}}(a) \backslash \mathfrak{N}^a$$

が存在する。ここで $\mathfrak{N}^a$ は $\mathfrak{N}$ の a -作用による固定点集合である。

Example 2.4. $a = (1, 1, -1, 1)$ とする。この時、

$$\mathbb{H}_a \cong \mathbb{C}[W] \# (\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_+^W)$$

という同型が存在し、特に自然な同一視

$$\mathrm{Irrep} \mathbb{H}_a = \mathrm{Irrep} \mathbb{C}[W]$$

が右辺の任意の加群に対し X_i を 0 で作用させるという構成によって定まる。この時、主定理は

$$\mathrm{Irrep} \mathbb{C}[W] \leftrightarrow G \backslash \mathfrak{N}^a$$

という 1 対 1 対応の存在を主張する。さらに、 $\mathfrak{S}_n \subset W$ で $T_1, \dots, T_{n-1}$ の像の生成する部分群 (記号が示唆するように対称群と同型) を表す事にすると

$$\{n \text{ の分割} \} \leftrightarrow \mathrm{Irrep} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \leftrightarrow G \backslash (\mathfrak{N}^a \cap \{0\} \oplus V_2)$$

という 1 対 1 対応が誘導される。この対応は

$$G \curvearrowright (\mathfrak{N}^a \cap \{0\} \oplus V_2)$$

が対称対 $(GL(2n, \mathbb{C}), Sp(2n, \mathbb{C}))$ に対する冪零錐であるという切り口から関口次郎によって見いだされ太田琢也によって付随する特異点の構造が研究された。

参考文献

- [K06a] Syu Kato, An exotic Deligne-Langlands correspondence for symplectic groups, math.RT/0601155v5.
- [K06b] Syu Kato, An exotic Springer correspondence for symplectic groups, math.RT/0607478v2.