

On the isotropy group of a homogeneous bounded domain

伊師英之（名古屋大 多元数理）

概要. 有界等質領域の自己正則同型群の等方部分群の次元が 1 以上であることを, 一点を固定する 1 パラメーター変換群を具体的に構成することによって示す. これは Hundemer [5] の問題に解答を与えるものである.

序.

複素領域 $D \subset \mathbb{C}^N$ の正則自己同型群を $\text{Hol}(D)$, 点 $p \in D$ での $\text{Hol}(D)$ の等方部分群 (以後, 等方群とよぶ) を $\text{Iso}_p(D)$ で表すものとする. 領域 D が有界領域と正則同値なとき, $\text{Hol}(D)$ は有限次元のリー群となり $\text{Iso}_p(D)$ はそのコンパクト部分リー群であることが知られている. とくに D が有界等質領域のときはジークル領域と正則同値になるので, $\text{Hol}(D)$ のリー代数は [7] の一般論によって記述されるが, それでも与えられた D について群 $\text{Hol}(D)$ を具体的に決定するのは容易ではない ([2], [3]). 一方, Hundemer [5] は一般に有界等質領域の等方群が自明ではないこと, すなわち少なくとも 2 個の元をもつことを示し, 「等方群の位数が丁度 2 となるような例が存在するか」という問題を提出した. 実際, 有界でない等質領域の場合には次のような簡単な例がある: 領域 $D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は乗法群 $\mathbb{C}^\times$ が $D \ni z \mapsto \alpha z \in D$ ($\alpha \in \mathbb{C}^\times$) によって推移的に作用するから等質であり, $p = 1 \in D$ での等方群は $D \ni z \mapsto 1/z \in D$ および恒等変換という 2 つの変換のみからなる.

本稿では全ての有界等質領域の等方群の (リー群としての) 次元が 1 以上であること, したがって Hundemer が問題にしたような例は存在しないことを, 等方群に含まれる 1 パラメータ変換群 (トーラス群と同型) を具体的に構成することによって示す. 実際, 我々は次のような広いクラスの複素領域について結果を得た:

(D1) 拡張錐を底とする管状領域 (§1),

(D2) 管状でない第二種ジークル領域 (§2).

前者については管状領域を ‘ケイリー変換’ によって単位円板を底とする第三種ジークル領域に写し, ジークル領域上での簡単なトーラス群の作用を引き戻すことによって, もとの領域上での自己同型写像を得ている (式 (7) 参照). モデルとなるのは上半平面 $\mathcal{H} := \{c \in \mathbb{C}; \Im c > 0\}$ と単位円板 $\Delta := \{t \in \mathbb{C}; |t| < 1\}$ についての以下のような議論である: 単位円板 Δ の原点 0 での等方群 $\text{Iso}_0(\Delta)$ は, 変換 $\tilde{\sigma}_\theta : t \mapsto e^{i\theta} t$ ($\theta \in \mathbb{R}$) からなるトーラス群であり, これをケイリー変換 $\gamma_0 : \mathcal{H} \ni c \mapsto \frac{c-i}{c+i} \in \Delta$ によって引き戻すことにより, $i = \gamma_0^{-1}(0)$ での $\mathcal{H}$ の等方群 $\text{Iso}_i(\mathcal{H})$ は変換 $\sigma_\theta := \gamma_0^{-1} \circ \tilde{\sigma}_\theta \circ \gamma_0 : c \mapsto \frac{\sin(\theta/2) + c \cos(\theta/2)}{\cos(\theta/2) - c \sin(\theta/2)}$ からなることがわかる. とくに $\dim \text{Iso}_i(\mathcal{H}) = 1$ である.

有界等質領域 D は等質ジークル領域として実現され ([10]), 等質ジークル領域は上半平面 $\mathcal{H}$ でなければ (D1), (D2) のいずれかの場合に該当するから, 結局 D の等方群はトーラス群を含む (定理 6). とくに D が Vinberg 錐を底とする管状領域のとき, $\text{Iso}_p(D)$ の連結成分は我々のトーラス群で尽きることが [3] との比較からわかる (小節 1.4). この意味で我々の結果は等方群の中でも本質的な部分を構成しているといえる.

§1. 拡張錐を底とする管状領域の等方群.

1.1. 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ 中の開凸錐 Ω は $\text{Cl}(\Omega) \cap (-\text{Cl}(\Omega)) = \{0\}$ (ただし $\text{Cl}(\Omega)$ は Ω の閉包) となるときの正則錐とよばれ, $\mathbb{R}^n$ に値をとる実対称双線型形式 $S : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ が正則錐 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に関して正值 (Ω -正值) であるとは, (S1) $S(v, v) \in \text{Cl}(\Omega)$ ($\forall v \in \mathbb{R}^m$), および (S2) $S(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$ が成り立つことをいう. 正則錐 Ω と Ω -正值な S について, 拡張錐 $\hat{\Omega}^S \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ を

$$\hat{\Omega}^S := \{ (x, v, a) \in \mathbb{R}^{n+m+1}; a > 0, x - a^{-1}S(v, v) \in \Omega \}. \quad (1)$$

によって定義する.¹ これは実ジークル領域 $R(\Omega, S) := \{ (x, v) \in \mathbb{R}^{n+m}; x - S(v, v) \in \Omega \}$ を底とする錐である. 次のアフィン変換は管状領域 $D(\hat{\Omega}^S) = \mathbb{R}^{n+m+1} + i\hat{\Omega}^S \subset \mathbb{C}^{n+m+1}$ を保存する:

(A1) 任意の $(x_0, v_0, a_0) \in \mathbb{R}^{n+m+1}$ に対し $\mathbb{C}^{n+m+1} \ni (z, u, c) \mapsto (z + x_0, u + v_0, c + a_0) \in \mathbb{C}^{n+m+1}$,

(A2) 任意の $v_1 \in \mathbb{R}^m$ に対し $\mathbb{C}^{n+m+1} \ni (z, u, c) \mapsto (z + 2S(u, v_1) + cS(v_1, v_1), u + cv_1, c) \in \mathbb{C}^{n+m+1}$,

(A3) 任意の $\alpha > 0$ に対し $\mathbb{C}^{n+m+1} \ni (z, u, c) \mapsto (z, \alpha u, \alpha^2 c) \in \mathbb{C}^{n+m+1}$.

実際 (A2) と (A3) は錐 $\hat{\Omega}^S \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ を保存する線型変換である.

1.2. 管状領域 $D(\hat{\Omega}^S)$ の自己正則同型写像をさらに得るために, $D(\hat{\Omega}^S)$ を第三種ジークル領域に写すことを考える. まず (1) より

$$D(\hat{\Omega}^S) = \{ (z, u, c) \in \mathbb{C}^{n+m+1}; \Im c > 0, \Im z - (\Im c)^{-1}S(\Im u, \Im u) \in \Omega \} \quad (2)$$

であるから, $D(\hat{\Omega}^S)$ は領域 $\mathcal{U} := \mathbb{C}^{n+m} \times \mathcal{H}$ に含まれることに注意しよう. この $\mathcal{U}$ から $\tilde{\mathcal{U}} := \mathbb{C}^{n+m} \times \Delta$ の上への双正則写像 $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}$ を

$$\gamma(z, u, c) := \left(z - \frac{1}{c+i}S(u, u), \frac{\sqrt{2}i}{c+i}u, \frac{c-i}{c+i} \right) \quad ((z, u, c) \in \mathcal{U}) \quad (3)$$

¹記号の簡略化のために $\mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^q$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) と書くべきところを, しばしば $\mathbb{K}^{p+q}$ と書く.

によって定義する (S は複素双線型に $S : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ と拡張されているものとする). このとき逆写像 $\gamma^{-1} : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$ は

$$\gamma^{-1}(\zeta, w, t) := \left(\zeta - \frac{i}{1-t} S(w, w), \frac{\sqrt{2}}{1-t} w, \frac{i(1+t)}{1-t} \right) \quad ((\zeta, w, t) \in \tilde{\mathcal{U}}) \quad (4)$$

で与えられる. いま $t \in \Delta$ に対し, $L_t : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ を

$$L_t(w, w') := \frac{1}{1-|t|^2} \left(S(w, \bar{w}') + \bar{t} S(w, w') \right) \quad (w, w' \in \mathbb{C}^m). \quad (5)$$

によって定める. この $L_t(w, w')$ は複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^m$ 上の $\mathbb{C}^n$ -値エルミート形式 $(1-|t|^2)^{-1} S(w, \bar{w}')$ と $\mathbb{C}^n$ -値対称複素双線型形式 $(1-|t|^2)^{-1} \bar{t} S(w, w')$ の和 ([8] でいう半エルミート形式) であり, t には実解析的に依存している.

命題 1. 管状領域 $D(\hat{\Omega}^S)$ の γ による像 $\gamma(D(\hat{\Omega}^S))$ は第三種ジークル領域

$$\{ (\zeta, w, t) \in \mathbb{C}^{n+m+1}; t \in \Delta, \Im \zeta - \Re L_t(w, w) \in \Omega \}.$$

に等しい.

証明. 点 $(z, u, c) \in \mathcal{U}$ について $(\zeta, w, t) := \gamma(z, u, c)$ とすると, (4) から

$$\Im c = 1 - |t|^2, \quad \Im z - (\Im c)^{-1} S(\Im u, \Im u) = \Im \zeta - \Re L_t(w, w)$$

が直接的な計算によってわかる. したがって (2) から主張は得られる. $\square$

領域 $\tilde{\mathcal{U}}$ 上の 1 パラメータ変換群 $\tilde{T} := \{\tilde{\tau}_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ を

$$\tilde{\tau}_\theta(\zeta, w, t) := (\zeta, e^{i\theta} w, e^{2i\theta} t) \quad ((\zeta, w, t) \in \tilde{\mathcal{U}}) \quad (6)$$

によって定義する.

命題 2. (i) 群 $\tilde{T}$ は $\gamma(D(\hat{\Omega}^S))$ を保存する.

(ii) 任意の $\zeta_0 \in \mathbb{R}^n + i\Omega$ について $(\zeta_0, 0, 0) \in \gamma(D(\hat{\Omega}^S))$ は $\tilde{T}$ の不動点である.

証明. 定義式 (5) から

$$L_{e^{2i\theta}t}(e^{i\theta}w, e^{i\theta}w') = L_t(w, w') \quad (t \in \Delta, w, w' \in \mathbb{C}^m)$$

であるから, 命題 1 より (i) がしたがう. 一方 (ii) は (6) から明らか. $\square$

さて $\tau_\theta := \gamma^{-1} \circ \tilde{\tau}_\theta \circ \gamma$ とすると, (6) および (3), (4) から

$$\tau_\theta(z, u, c) = \left(z + \frac{\sin \theta}{\cos \theta - c \sin \theta} S(u, u), \frac{1}{\cos \theta - c \sin \theta} u, \frac{\sin \theta + c \cos \theta}{\cos \theta - c \sin \theta} \right) \quad (7)$$

$((z, u, c) \in \mathcal{U})$

である. 定義から $T := \{\tau_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ は $\mathcal{U} = \gamma^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})$ 上の 1 パラメータ変換群であり, 命題 2 より直ちに次がわかる.

命題 3. (i) 群 T は管状領域 $D(\hat{\Omega}^S)$ を保存する.

(ii) 任意の $\zeta_0 \in \mathbb{R}^n + i\Omega$ について $(\zeta_0, 0, i) = \gamma^{-1}(\zeta_0, 0, 0) \in D(\hat{\Omega}^S)$ は T の不動点である.

1.3. 以上の議論をまとめて, 次を得る.

定理 4. 拡張錐 $\hat{\Omega}^S$ を底とする管状領域 $D(\hat{\Omega}^S)$ の任意の点での等方群の次元は 1 以上である.

証明. 点 $p = (z, u, c) \in D(\hat{\Omega}^S)$ は平行移動 (A1) により $i(\Im z, \Im u, \Im c) \in i\hat{\Omega}^S$ に移り, さらに $v_1 = -(\Im c)^{-1}(\Im u)$ としたときの線型変換 (A2) により $i(\Im z - (\Im c)^{-1}S(\Im u, \Im u), 0, \Im c)$ に, そして $\alpha = (\Im c)^{-1/2}$ としたときの線型変換 (A3) によって $i(\Im z - (\Im c)^{-1}S(\Im u, \Im u), 0, 1) =: p_0$ に移るが, 命題 3 から点 p_0 での等方群は群 T を含むので $\dim \text{Iso}_p(D(\hat{\Omega}^S)) = \dim \text{Iso}_{p_0}(D(\hat{\Omega}^S)) \geq \dim T = 1$. $\square$

1.4. 次の例を考える: $n = 2$, $\Omega := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^2$, $m = m_1 + m_2$ ($m_1, m_2 \in \mathbb{N}$),

$$S : \mathbb{R}^{m_1+m_2} \times \mathbb{R}^{m_1+m_2} \ni ((v_1, v_2), (v'_1, v'_2)) \mapsto (v_1 \cdot v'_1, v_2 \cdot v'_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ただし $\cdot$ はベクトルの標準内積を表す. このとき管状領域 $D(\hat{\Omega}^S) \subset \mathbb{C}^{2+m_1+m_2+1}$ は等質で, その正則同型群 $\text{Hol}(D(\hat{\Omega}^S))$ および $p := (i, i, 0, 0, i)$ での等方群 $\text{Iso}_p(D(\hat{\Omega}^S))$ は [3] によって完全に決定されている. 等方群に関する結果は次の通りである. 実直交行列の組 $(R_1, R_2) \in O(m_1) \times O(m_2)$ について

$$g_{R_1, R_2} : \mathbb{C}^{2+m_1+m_2+1} \ni (z_1, z_2, u_1, u_2, c) \mapsto (z_1, z_2, R_1 u_1, R_2 u_2, c) \in \mathbb{C}^{2+m_1+m_2+1}$$

とすると, $\text{Iso}_p(D(\hat{\Omega}^S))$ は $m_1 \neq m_2$ のとき g_{R_1, R_2} および (7) の τ_θ たちから生成され, $m_1 = m_2$ のときは更に対合写像

$$\iota : \mathbb{C}^{2+m_1+m_2+1} \ni (z_1, z_2, u_1, u_2, c) \mapsto (z_2, z_1, u_2, u_1, c) \in \mathbb{C}^{2+m_1+m_2+1}$$

も合わせたものによって生成される. とくに $m_1 = m_2 = 1$ のとき $\hat{\Omega}^S$ は Vinberg 錐とよばれる 5 次元の錐であり, この場合 $\text{Iso}_p(D(\hat{\Omega}^S))$ の連結成分はトーラス群 $T = \{\tau_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ に等しい.

§2. 第二種ジークル領域の等方群.

複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ に値をとるエルミート形式 $Q : \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^n$ が正則錐 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に関して正值 (Ω -正值) であることを, 前節の S と同様に (H1) $Q(w, w) \in \text{Cl}(\Omega)$ ($\forall w \in \mathbb{C}^M$), および (H2) $Q(w, w) = 0 \Rightarrow w = 0$ が成り立つこととして定義する. 正則錐 Ω と Ω -正值な Q について, 第二種ジークル領域 $D(\Omega, Q) \subset \mathbb{C}^{n+M}$ を

$$D(\Omega, Q) := \{ (z, w) \in \mathbb{C}^{n+M}; \Im z - Q(w, w) \in \Omega \}$$

と定義する. とくに $M = 0, Q = 0$ のとき, 対応するジークル領域は管状領域 $D(\Omega) = \mathbb{R}^n + i\Omega$ に他ならない. これを第一種ジークル領域とよぶ. しかし我々は $M > 0$ の場合のみをこの節では考える. 次のアファイン変換は $D(\Omega, Q)$ を保存する:

- (B1) 任意の $x_0 \in \mathbb{R}^n$ と $w_0 \in \mathbb{C}^M$ に対し $\mathbb{C}^{n+M} \ni (z, w) \mapsto (z + x_0 + 2iQ(w, w_0) + iQ(w_0, w_0), w + w_0) \in \mathbb{C}^{n+M}$,
- (B2) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対し $\sigma_\theta : \mathbb{C}^{n+M} \ni (z, w) \mapsto (z, e^{i\theta}w) \in \mathbb{C}^{n+M}$.

定理 5. 管状でない第二種ジークル領域 $D(\Omega, Q)$ の任意の点での等方群の次元は 1 以上である.

証明. 任意の $p = (z, w) \in D(\Omega, Q)$ は $x_0 = -\Re z, w_0 = -w$ としたときの変換 (B1) によって $p_0 := i(\Im z - Q(w, w), 0)$ に移される. 一方 (B2) の変換の全体 $\{\sigma_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ は p_0 での等方群の 1 パラメータ部分群になっているから $\dim \text{Iso}_p(D(\Omega, Q)) = \dim \text{Iso}_{p_0}(D(\Omega, Q)) \geq 1$. $\square$

§3. 有界等質領域の等方群.

定理 6. 有界等質領域の任意の点での等方群の次元は 1 以上である.

証明. 一般に有界等質領域 D は双正則写像によって第二種ジークル領域 $D(\Omega, Q) \subset \mathbb{C}^{n+M}$ に写り, しかも Ω は等質錐, すなわち或る線型群が推移的に作用する正則錐である ([10]). この $D(\Omega, Q)$ の等方群について考えればよい. まず $M > 0$ のときは定理 5 から主張は成り立つ. 一方 $M = 0$ かつ $n = 1$ のときジークル領域は上半平面 $\mathcal{H}$ に他ならないから, やはり主張は成り立つ. 最後に $M = 0$ かつ $n > 1$ のとき, 等質錐 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は n より小さい次元の等質錐の拡張錐として得られる ([4, Lemma 1.2]) から, 定理 4 より主張が従う. $\square$

References

- [1] J. E. D'Atri, J. Dorfmeister, and Y. D. Zhao, *The isotropy representation for homogeneous Siegel domains*, Pacific J. Math. **120** (1985), 295–326.
- [2] L. Geatti, *Holomorphic automorphisms of bounded, homogeneous, nonsymmetric domains*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **41** (1983), 203–218.
- [3] —, *Holomorphic automorphisms of some tube domains over nonselfadjoint cones*, Rend. Circ. Mat. Palermo **36** (1987), 281–331.
- [4] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys 19 (1964) 1–89.
- [5] A. Hundemer, *The isotropy groups of bounded homogeneous domains are non-trivial*, Manuscripta Math. **98** (1999), 403–408.
- [6] —, *A characterization of products of balls by their isotropy groups*, Math. Ann. **313** (1999), 585–607.
- [7] W. Kaup, Y. Matsushima, and T. Ochiai, *On the automorphisms and equivalences of generalized Siegel domains*, Amer. J. Math. **92** (1970), 475–498.
- [8] I. I. Piatetskii-Shapiro, “Automorphic functions and the geometry of classical domains,” Gordon and Breach, New York, 1969.
- [9] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963), 340–403.
- [10] E. B. Vinberg, S. G. Gindikin, and I. I. Piatetskii-Shapiro, *Classification and canonical realization of complex bounded homogeneous domains*, Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963), 404–437.

Hideyuki ISHI

Graduate school of Mathematics, Nagoya University,

Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8602, Japan

hideyuki@math.nagoya-u.ac.jp