

Asymptotic expansion of certain matrix coefficients of P_J principal series representation of $Sp(2, \mathbb{R})$ *

飯田 正敏 (Masatoshi IIDA, 城西大学理学部数学科) [†]

1 Introduction

半単純 Lie 群の球関数 (表現の行列要素) の無限遠点における挙動は c 関数の研究や Poisson 変換 (とその逆変換である境界値写像) に深く関連してこれまで多くの研究があるが, 表現論的に重要な leading term を除くと高次の項については漸化式や不等式による評価が見られるものの具体的な形が求められているケースは少ないように見受けられる.

さて, [5] において $Sp(2, \mathbb{R})$ の (一般) 主系列表現の最低次元 K -type に対応する行列要素の radial part が満たす微分方程式系が求められた. 特に一般主系列表現 (本稿でいう P_J 主系列表現) においては特定の K -type に対応する行列要素が満たす微分方程式は退化するため, その解の単位元の近傍における級数表示と積分表示が求められ, 2 変数超幾何関数で表されることが分かった.

本講演では [5] で求められた行列要素の無限遠点の近傍での展開を (変数を上手くとることで) 高次の項まで explicit に求めることを目的とする.

2 P_J principal series representations

$G = Sp(2, \mathbb{R})$ とし, その極大 compact 部分群を $K \simeq U(2)$ とする. G の long root に対応する極大放物型部分群 (Jacobi parabolic subgroup) とその Langlands 分解を $P_J = M_J A_J N_J$ とする. このとき $M_J \simeq SL(2, \mathbb{R}) \times \{\pm 1\}$ であり, $(D_\pm^l, \varepsilon)$ を M_J の表現とする. ここで D_l^+ は $SL(2, \mathbb{R})$ の anti-holomorphic discrete series で Blattner parameter が l ($l \in \mathbb{N}, l \geq 2$) のもの, D_l^- はその contragredient representation である. また ε は $\{\pm 1\}$ の character である. $A_J = \{\text{diag}(a_1, 1, a_1^{-1}, 1) \mid a_1 > 0\}$ の character を $\mathfrak{a}_J = \text{Lie}(A_J) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$ 上の linear form ν と N_J に対応する positive root の和の半分 ρ_J から $a_1^{\nu+\rho_J}$ で定義し, id_{N_J} を N_J の trivial 表現として $Sp(2, \mathbb{R})$ の P_J principal series representation を

$$\pi_{(D_l^\pm, \varepsilon), \nu} = \text{Ind}_{P_J}^G ((D_l^\pm, \varepsilon) \boxtimes a_1^{\nu+\rho_J} \boxtimes \text{id}_{N_J})$$

で定める.

K の既約表現 を highest weight で parametrize してその全体を $\widehat{K} = \{\tau_{(\lambda_1, \lambda_2)} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2, \lambda_1 \geq \lambda_2\}$ とおく¹. $\varepsilon(-1) = (-1)^l$ のときに P_J principal series representation $\pi_{(D_l^+, \varepsilon), \nu}$ は 1 次元 K -type $\{\tau_{(k, k)} \in \widehat{K} \mid k \geq l, k \equiv l \pmod{2}\}$ を持ち, その multiplicity は 1 である. これらのうち highest weight が (辞書式順序で) 最小の表現 $\tau_{(l, l)}$ を $\pi_{(D_l^+, \varepsilon), \nu}$ の “corner K -type” と呼ぶ².

以下, $\pi = \pi_{(D_l^+, \varepsilon), \nu}$ とおき, π^* をその contragredient 表現とする.

* 織田孝幸氏 (東京大学数理科学研究科) との共同研究

[†] e-mail : iida@math.josai.ac.jp

¹ (λ_1, λ_2) に対応する表現は $\text{Sym}^{\lambda_1 - \lambda_2} \otimes \det^{\lambda_2}$ である.

² $\varepsilon(-1) = (-1)^{l+1}$ の場合, K -type の最低次元は 2 であり, それに対しても corner K -type は定義でき, 以下の議論もパラレルに行える.

3 Matrix coefficients

$\eta, \tau \in \hat{K}$, τ^* を τ の contragredient 表現, V_η, V_{τ^*} をそれぞれ η, τ の表現空間として球関数の空間を次で定める.

$$C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G / K) = \{f : G \rightarrow V_\eta \otimes V_{\tau^*} \mid f \text{ は } C^\infty\text{-class, } f(k_1 g k_2) = \eta(k_1) \otimes \tau^*(k_2)^{-1} f(g), \\ \forall g \in G, \forall k_1, \forall k_2 \in K\}.$$

π の $\tau_{(l,l)}$ -isotypic component の元 v と π^* の $\tau_{(k,k)}^* (= \tau_{(-k,-k)})$ -isotypic component の元 w^* を $\langle v, w^* \rangle = 1$ なるように取っておく. これらから作られる π の行列要素 $\phi(g) = \langle \pi(g)v, w^* \rangle$ は $C_{\tau_{(k,k)}, \tau_{(l,l)}}^\infty(K \backslash G / K)$ の元である.
 G の部分群

$$A = \{\text{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

について Cartan 分解 $G = KAK$ が成り立つので, ϕ は A -radial part $\phi|_A$ で定まる. A の座標 (x_1, x_2) を $a_i = \exp x_i$ ($i = 1, 2$) で定め, $\phi|_A$ を (x_1, x_2) 上の関数と思うと (これも ϕ で表し) 次が成り立つ.

定理 3.1. ([5] Theorem 7.5) ϕ は次の微分方程式系を満たす.

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \phi + \sum_{i=1}^2 \{2 \coth 2x_i + \coth(x_1 + x_2)\} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \\ + \coth(x_1 - x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \phi - \coth(x_1 - x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \phi \\ - (k^2 + l^2)(\text{sh}^{-2} x_1 + \text{sh}^{-2} x_2) \phi + 2kl(\text{ch } 2x_1 \cdot \text{sh}^{-2} 2x_1 + \text{ch } 2x_2 \cdot \text{sh}^{-2} 2x_2) \phi \\ = \{\nu^2 + (l-1)^2 - 5\} \phi, \quad (3.1)$$

$$2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi + \{2l \coth 2x_2 - 2k \text{sh}^{-1} 2x_2 + \coth(x_1 + x_2) - \coth(x_1 - x_2)\} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi \\ + \{2l \coth 2x_1 - 2k \text{sh}^{-1} 2x_1 + \coth(x_1 + x_2) + \coth(x_1 - x_2)\} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi \\ + 2(l \coth 2x_1 - k \text{sh}^{-1} 2x_1)(l \coth 2x_2 - k \text{sh}^{-1} 2x_2) \phi \\ + (l \coth 2x_2 - k \text{sh}^{-1} 2x_2)(\coth(x_1 + x_2) + \coth(x_1 - x_2)) \phi \\ + (l \coth 2x_1 - k \text{sh}^{-1} 2x_1)(\coth(x_1 + x_2) - \coth(x_1 - x_2)) \phi = 0. \quad (3.2)$$

最初の方程式は Casimir operator と π の infinitesimal character $\nu^2 + (l-1)^2 - 5$ から得られ, 2 番目の方程式は $\tau_{(l,l)}$ が π の corner K -type であることから shift operator([5] Definition 6.2, $\text{Lie}(G)$ の enveloping algebra の元) を利用して得られる.

$$\delta(x_1, x_2) = (\text{ch } x_1 \text{ch } x_2)^{(l+k)/2} (\text{sh } x_1 \text{sh } x_2)^{(l-k)/2} \text{ とし,}$$

$$\psi(x_1, x_2) = \delta(x_1, x_2) \phi(x_1, x_2).$$

とくと上記の微分方程式系から ψ が満たす微分方程式系が得られる.

命題 3.2. ψ は次の微分方程式系を満たす.

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i^2} \psi + \sum_{i=1}^2 \{2k \text{sh}^{-1} 2x_i - 2(l-1) \coth 2x_i\} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi \\ + \frac{\text{sh } 2x_1}{\text{sh}^2 x_1 - \text{sh}^2 x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \psi - \frac{\text{sh } 2x_2}{\text{sh}^2 x_1 - \text{sh}^2 x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \psi = \{\nu^2 - (l-2)^2\} \psi \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \psi - \frac{1}{2} \frac{\text{sh } 2x_2}{\text{sh}^2 x_1 - \text{sh}^2 x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \psi + \frac{1}{2} \frac{\text{sh } 2x_1}{\text{sh}^2 x_1 - \text{sh}^2 x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \psi = 0 \quad (3.4)$$

この微分方程式系の解は2変数超幾何関数

$$F_{10} \left(\begin{matrix} a & b & c_1 & c_2 \\ d & e & & \end{matrix} ; x_1, x_2 \right) = \sum_{m_i \geq 0} \frac{(a)_{m_1+m_2} (b)_{m_1+m_2} (c_1)_{m_1} (c_2)_{m_2}}{m_1! m_2! (d)_{m_1+m_2} (e)_{m_1+m_2}} x_1^{m_1} x_2^{m_2}$$

を用いて

$$\psi(x_1, x_2) = F_{10} \left(\begin{matrix} \mu_+ & \mu_- & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & C & & \end{matrix} ; -\text{sh}^2 x_1, -\text{sh}^2 x_2 \right),$$

と表される ([5] Theorem 8.1). ここで $\mu_{\pm} = \pm\nu/2 - (l-2)/2$, $C = (3+k-l)/2$ であり, $(\lambda)_n = \Gamma(\lambda+n)/\Gamma(\lambda)$ とする.

$\phi = \delta^{-1} F_{10}$ の無限遠点 $a_1/a_2 = 0, a_2 = 0$ (a_1/a_2 と a_2^2 が simple root $e_1 - e_2$ と $2e_2$ に対応することに注意) での挙動を調べるのが本稿の目標である.

4 The holonomic system and characteristic indices

変数 y_1, y_2 を

$$y_1 = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 = \exp 2(x_1 - x_2), \quad y_2 = a_2^2 = \exp 2x_2$$

と定める ($(y_1, y_2) = (0, 0)$ が無限遠点に相当し, $(y_1, y_2) = (1, 1)$ が A の単位元に相当する) と命題 3.2 の微分方程式系は次のように書き換えられる.

命題 4.1. ψ は次の微分方程式系を満たす.

$$\begin{aligned} & 4 \left\{ 2 \left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^2 - 2 \left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) + \left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right)^2 \right\} \psi \\ & + \left\{ \frac{4ky_1y_2}{y_1^2y_2^2-1} - \frac{4ky_2}{y_2^2-1} - 2(l-1) \frac{y_1^2y_2^2+1}{y_1^2y_2^2-1} + 2(l-1) \frac{y_2^2+1}{y_2^2-1} \right\} \left(2y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \psi \\ & + \left\{ \frac{4ky_2}{y_2^2-1} - 2(l-1) \frac{y_2^2+1}{y_2^2-1} \right\} \left(2y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \psi \\ & + 4 \frac{y_1^2y_2^2-1+y_1(y_2^2-1)}{(y_1-1)(y_1y_2^2-1)} \left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \psi - 4 \frac{y_1(y_2^2-1)}{(y_1-1)(y_1y_2^2-1)} \left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \psi \\ & = \{\nu^2 - (l-2)^2\} \psi, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} & \left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \left(-y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \psi \\ & - \frac{1}{2} \frac{y_1(y_2^2-1) + (y_1^2y_2^2-1)}{(y_1-1)(y_1y_2^2-1)} \left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \psi + \frac{1}{2} \frac{y_1^2y_2^2-1}{(y_1-1)(y_1y_2^2-1)} \left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \psi = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

この命題から ψ の $(y_1, y_2) = (0, 0)$ における leading exponent (α, β) は前セクションの $\mu_{\pm}$ を用いて

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, \mu_{\pm} \right), \quad (\mu_{\pm}, \mu_{\pm}) \tag{4.3}$$

と書けることが分かる. すなわち, 命題 4.1 の微分方程式系には

$$\psi_{\alpha, \beta}(y_1, y_2) = y_1^{\alpha} y_2^{\beta} + \text{higher order term},$$

という形の解が4つあり, ψ はこれらの線形結合になる.

multiplier $\delta(x_1, x_2)^{-1}$ については

$$\begin{aligned}\delta(x_1, x_2)^{-1} &= (\operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2)^{-\frac{l+k}{2}} (\operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2)^{-\frac{l-k}{2}} \\ &= 2^{2l} y_1^{\frac{l}{2}} y_2^l (1 + \text{higher order term}),\end{aligned}$$

が成り立つので ϕ は leading exponent が

$$\left(\alpha + \frac{l}{2}, \beta + l\right) = \left(\frac{l+1}{2}, \mu_{\pm} + l\right), \left(\mu_{\pm} + \frac{l}{2}, \mu_{\pm} + l\right)$$

である関数

$$\phi_{\alpha+l/2, \beta+l}(y_1, y_2) = 2^{-2l} \delta(x_1, x_2)^{-1} \psi_{\alpha, \beta}(y_1, y_2). \quad (4.4)$$

の線形結合で表される.

5 Asymptotic expansion

以下では $(y_1, y_2) = (1, 1)$ の近傍 (すなわち $(x_1, x_2) = (0, 0)$ の近傍) で得られている ψ を $(y_1, y_2) = (1, 0)$ まで解析接続し, 続いて $(y_1, y_2) = (1, 0)$ から $(y_1, y_2) = (0, 0)$ まで解析接続することで, ϕ を $\phi_{\alpha, \beta}$ の線形結合で表す.

まず $1/4 \times (4.1) + 2 \times (4.2)$ により

$$\begin{aligned}&\left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2 \psi + \left\{ \frac{2k(1-y_1)y_2(1+y_1y_2^2) - 2(l-1)(1-y_1^2)y_2^2}{(y_2^2-1)(y_1^2y_2^2-1)} \right\} \left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\right) \psi \\ &+ \left\{ \frac{2ky_2 - (l-1)(y_2^2+1)}{y_2^2-1} + \frac{y_1y_2^2+1}{y_1y_2^2-1} \right\} \left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \psi = \frac{1}{4} \{\nu^2 - (l-2)^2\} \psi.\end{aligned}$$

を得る. この方程式は $y_2 = 0$ に沿って regular singularity を持ち, その indicial equation

$$\beta^2 + \left\{ \frac{-(l-1)}{(-1)} + \frac{1}{(-1)} \right\} \beta = \frac{1}{4} \{\nu^2 - (l-2)^2\}$$

の解である特性指数 $\beta = \pm\nu/2 - (l-2)/2 = \mu_{\pm}$ が y_1 と独立なことから, $\mu_+ - \mu_- = \nu \notin \mathbb{Z}$ のときに命題 4.1 の微分方程式系は ideally analytic solution

$$\psi(y_1, y_2) = a_+(y_1, y_2) y_2^{\mu_+} + a_-(y_1, y_2) y_2^{\mu_-}$$

を持つことが分かる. ここで $a_{\pm}(y_1, y_2)$ は $(y_1, y_2) = (1, 0)$ の近傍で analytic な関数である. 以下 $\nu \notin \mathbb{Z}$ と仮定する.

$f_{\pm}(y_1) = a_{\pm}(y_1, 0)$ とおくと, 式 (4.2) から次が分かる.

補題 5.1. $f_{\pm}(y_1)$ は次の微分方程式を満たす.

$$\left\{ \left(y_1 \frac{d}{dy_1}\right)^2 - \mu_{\pm} \left(y_1 \frac{d}{dy_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{y_1 + 1}{y_1 - 1} \left(y_1 \frac{d}{dy_1}\right) - \frac{1}{2} \frac{\mu_{\pm}}{y_1 - 1} \right\} f_{\pm}(y_1) = 0.$$

$y_1 = 1/\zeta$ と変数変換をすることで上の方程式は Gauss の超幾何方程式となり, ある定数 $c_{\pm}$ があって

$$f_{\pm}(y_1) = c_{\pm} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \mu_{\pm}; 1; 1 - \zeta\right) = c_{\pm} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \mu_{\pm}; 1; 1 - \frac{1}{y_1}\right)$$

であることが分かる. ${}_2F_1$ の接続公式

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= (1-z)^{-a} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} {}_2F_1\left(a, c-b; 1+a-b; \frac{1}{1-z}\right) \\ &+ (1-z)^{-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)} {}_2F_1\left(c-a, b; 1-a+b; \frac{1}{1-z}\right) \end{aligned}$$

と $1/\{1 - (1 - 1/y_1)\} = y_1$ により

$$\begin{aligned} f_{\pm}(y_1) &= c_{\pm} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \mu_{\pm}; 1; 1 - \frac{1}{y_1}\right) \\ &= c_{\pm} \left\{ \frac{\Gamma(\mu_{\pm} - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu_{\pm})} y_1^{\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1 - \mu_{\pm}; \frac{3}{2} - \mu_{\pm}; y_1\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu_{\pm})}{\sqrt{\pi}\Gamma(1 - \mu_{\pm})} y_1^{\mu_{\pm}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \mu_{\pm}; \frac{1}{2} + \mu_{\pm}; y_1\right) \right\} \end{aligned}$$

が分かる.

関数 $a_{\pm}(y_1, y_2)y_2^{\mu_{\pm}} = f_{\pm}(y_1)y_2^{\mu_{\pm}}(1 + O(y_2))$ は $\psi_{\alpha, \beta}$ たちの線形結合なので leading term を比較して次の命題を得る.

命題 5.2.

$$\begin{aligned} \psi_{\frac{1}{2}, \mu_{\pm}}(y_1, y_2) &= y_1^{\frac{1}{2}} y_2^{\mu_{\pm}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1 - \mu_{\pm}; \frac{3}{2} - \mu_{\pm}; y_1\right) + \text{higher order term}, \\ \psi_{\mu_{\pm}, \mu_{\pm}}(y_1, y_2) &= y_1^{\mu_{\pm}} y_2^{\mu_{\pm}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \mu_{\pm}; \frac{1}{2} + \mu_{\pm}; y_1\right) + \text{higher order term}, \\ a_{\pm}(y_1, y_2)y_2^{\mu_{\pm}} &= c_{\pm} \left\{ \frac{\Gamma(\mu_{\pm} - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu_{\pm})} \psi_{\frac{1}{2}, \mu_{\pm}}(y_1, y_2) + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu_{\pm})}{\sqrt{\pi}\Gamma(1 - \mu_{\pm})} \psi_{\mu_{\pm}, \mu_{\pm}}(y_1, y_2) \right\} \end{aligned}$$

である.

この命題と式 (4.4) および [5] の式 (9.8) より得られる

$$\begin{aligned} F_{10}\left(\begin{matrix} \mu_+ & \mu_- & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & C \end{matrix}; \eta_1, \eta_2\right) \\ &= \frac{\Gamma(-\nu)\Gamma(C)}{\Gamma(\mu_-)\Gamma(C - \mu_+)} (-\eta_2)^{-\mu_+} F_2\left(\mu_+; \frac{1}{2}, \mu_+ - C + 1; 1, \nu + 1; 1 - \eta_1/\eta_2, 1/\eta_2\right) \\ &+ \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(C)}{\Gamma(\mu_+)\Gamma(C - \mu_-)} (-\eta_2)^{-\mu_-} F_2\left(\mu_-; \frac{1}{2}, \mu_- - C + 1; 1, -\nu + 1; 1 - \eta_1/\eta_2, 1/\eta_2\right) \end{aligned}$$

を利用すると³ $c_{\pm}$ を決定でき, 次の定理が得られる.

定理 5.3. π の corner K -type に対応する行列要素 ϕ の動径成分は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) &= \delta(x_1, x_2)^{-1} F_{10}\left(\begin{matrix} \mu_+ & \mu_- & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & C \end{matrix}; -\text{sh}^2 x_1, -\text{sh}^2 x_2\right) \\ &= \frac{4^{\mu_+ + l} \Gamma(-\nu) \Gamma(C)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\mu_-) \Gamma(C - \mu_+)} \left\{ \frac{\Gamma(\mu_+ - \frac{1}{2})}{\Gamma(\mu_+)} \phi_{(l+1)/2, \mu_+ + l}(y_1, y_2) + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu_+)}{\Gamma(1 - \mu_+)} \phi_{\mu_+ + l/2, \mu_+ + l}(y_1, y_2) \right\} \\ &+ \frac{4^{\mu_- + l} \Gamma(\nu) \Gamma(C)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\mu_+) \Gamma(C - \mu_-)} \left\{ \frac{\Gamma(\mu_- - \frac{1}{2})}{\Gamma(\mu_-)} \phi_{(l+1)/2, \mu_- + l}(y_1, y_2) + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu_-)}{\Gamma(1 - \mu_-)} \phi_{\mu_- + l/2, \mu_- + l}(y_1, y_2) \right\}. \end{aligned}$$

³ F_{10} のパラメータは [5] に書かれた定理の仮定を満たさないが, その条件は誤っており定理の適用は可能である. 誤りは [6] で訂正されている.

この定理から c -関数の類似物

$$\begin{aligned}
c_1(\nu) &= \frac{4^{\mu_+ + l} \Gamma(-\nu) \Gamma(C) \Gamma(\mu_+ - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\mu_-) \Gamma(C - \mu_+) \Gamma(\mu_+)} \\
&= \frac{2^{\nu + l + 2} \Gamma(-\nu) \Gamma(\frac{k-l+3}{2}) \Gamma(\frac{\nu-l+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{-\nu-l+2}{2}) \Gamma(\frac{-\nu+k+1}{2}) \Gamma(\frac{\nu-l+2}{2})}, \\
c_2(\nu) &= \frac{4^{\mu_- + l} \Gamma(\nu) \Gamma(C) \Gamma(\mu_- - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\mu_+) \Gamma(C - \mu_-) \Gamma(\mu_-)} \\
&= \frac{2^{-\nu + l + 2} \Gamma(\nu) \Gamma(\frac{k-l+3}{2}) \Gamma(\frac{-\nu-l+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\nu-l+2}{2}) \Gamma(\frac{\nu+k+1}{2}) \Gamma(\frac{-\nu-l+2}{2})} = c_1(-\nu), \\
c_3(\nu) &= \frac{4^{\mu_+ + l} \Gamma(-\nu) \Gamma(C) \Gamma(\frac{1}{2} - \mu_+)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\mu_-) \Gamma(C - \mu_+) \Gamma(1 - \mu_+)} \\
&= \frac{2^{\nu + l + 2} \Gamma(-\nu) \Gamma(\frac{k-l+3}{2}) \Gamma(\frac{-\nu+l-1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{-\nu-l+2}{2}) \Gamma(\frac{-\nu+k+1}{2}) \Gamma(\frac{-\nu+l}{2})}, \\
c_4(\nu) &= \frac{4^{\mu_- + l} \Gamma(\nu) \Gamma(C) \Gamma(\frac{1}{2} - \mu_-)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\mu_+) \Gamma(C - \mu_-) \Gamma(1 - \mu_-)} \\
&= \frac{2^{-\nu + l + 2} \Gamma(\nu) \Gamma(\frac{k-l+3}{2}) \Gamma(\frac{\nu+l-1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\nu-l+2}{2}) \Gamma(\frac{\nu+k+1}{2}) \Gamma(\frac{\nu+l}{2})} = c_3(-\nu)
\end{aligned}$$

が定義される.

6 Explicit formula of $\psi_{\alpha,\beta}$

前セクションまででは $\psi_{\alpha,\beta}$ の leading term しか分かっていなかった. このセクションでは $\psi_{\alpha,\beta}$ の級数展開を高次の項まで求める.

$\psi_{\alpha,\beta}$ の $y_1 = y_2 = 0$ の近傍での級数展開の係数が満たす漸化式は微分方程式 (4.1), (4.2) から導けるがそれは複雑で容易には解けそうにない. そこで新しい変数として

$$u_1 = \frac{\text{sh}^2 x_2}{\text{sh}^2 x_1}, \quad u_2 = -\frac{1}{\text{sh}^2 x_2}$$

を導入する⁴.

命題 3.2 の微分作用素を (u_1, u_2) で書き直すと ψ は次の P, Q の kernel の元であることが分かる.

$$\begin{aligned}
P &= 4(2 - u_2 - u_1 u_2) \vartheta_1^2 + 4(1 - u_2) \vartheta_2^2 - 8(1 - u_2) \vartheta_1 \vartheta_2 \\
&\quad + \frac{4}{u_1 - 1} \left\{ 1 + u_1 - \frac{l-k}{2} u_2 + (l-k-2) u_1 u_2 - \frac{l-k}{2} u_1^2 u_2 \right\} \vartheta_1 \\
&\quad - \frac{4}{u_1 - 1} \left\{ l - 1 - (l-2) u_1 - \frac{l-k}{2} u_2 + \frac{l-k-2}{2} u_1 u_2 \right\} \vartheta_2 + (l-2)^2 - \nu^2, \\
Q &= \vartheta_1^2 - \vartheta_1 \vartheta_2 + \frac{1}{2} \frac{u_1 + 1}{u_1 - 1} \vartheta_1 - \frac{1}{2} \frac{1}{u_1 - 1} \vartheta_2.
\end{aligned}$$

ここで $\vartheta_i = u_i \partial / \partial u_i$ ($i = 1, 2$) である.

$(y_1, y_2) \rightarrow (0, 0)$ において $u_1 \sim y_1, u_2 \sim -4y_2$ であることに注意すると P, Q の kernel の leading exponent は式 (4.3) で与えられることが分かる. そこで leading exponent (α, β) を持つ P, Q の kernel を $\Psi_{\alpha,\beta}(u_1, u_2)$ とすると $\psi_{\alpha,\beta}(y_1, y_2) = (-4)^{-\beta} \Psi_{\alpha,\beta}(u_1, u_2)$ であり, $\Psi_{\alpha,\beta}(u_1, u_2)$ は

$$\Psi_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = u_1^\alpha u_2^\beta \sum_{m,n \geq 0} a_{m,n} u_1^m u_2^n, \quad \text{ただし, } a_{0,0} = 1$$

⁴multiplier は u_1, u_2 によって $\delta^{-1} = u_1^{l/2} u_2^l (1 - u_1 u_2)^{-(k+l)/2} (1 - u_2)^{-(k+l)/2}$ と表される.

とおける. $Q\Psi_{\alpha,\beta} = 0$ から $a_{m,n}$ の 2 項間漸化式が得られ, 以下ようになる.

補題 6.1. $\{a_{m,n}\}$ は以下の漸化式を満たす.

$$\begin{cases} (\alpha + m - 1)(\alpha - \beta + m - n - \frac{1}{2})a_{m-1,n} \\ \quad + (-\alpha + \beta - m + n)(\alpha + m - \frac{1}{2})a_{m,n} = 0 \quad (m \neq 0) \\ (-\alpha + \beta + n)(\alpha - \frac{1}{2})a_{0,n} = 0 \end{cases}$$

補題の漸化式を解くと

$$a_{m,n} = \begin{cases} \frac{(-\mu_{\pm}-n+1)_m (\frac{1}{2})_m}{(-\mu_{\pm}-n+\frac{3}{2})_m m!} a_{0,n} & \text{if } \alpha = \frac{1}{2}, \\ \frac{(\frac{1}{2})_{m-n} (\mu_{\pm}+n)_{m-n}}{(m-n)! (\mu_{\pm}+n+\frac{1}{2})_{m-n}} a_{n,n} & \text{if } \alpha = \mu_{\pm}, m \geq n, \\ 0 & \text{if } \alpha = \mu_{\pm}, m < n \end{cases}$$

が得られる.

$\alpha = 1/2$ の場合, $\phi_m(u_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} u_2^n$ とおき, $\alpha = \mu_{\pm}$ の場合, $\varphi_j(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+j,n} t^n$ とおくと $P\Psi_{\alpha,\beta} = 0$ から ϕ_0, φ_0 が満たす微分方程式 (Gauss の超幾何方程式) が得られる. よって数列の初項が決定し, 一般項が

$$\begin{cases} a_{0,n} = \frac{(\mu_{\pm}-\frac{1}{2})_n (\mu_{\pm}-\frac{1}{2}+\frac{l-k}{2})_n}{(2\mu_{\pm}+l-1)_n n!} & \text{if } \alpha = \frac{1}{2} \\ a_{n,n} = \frac{(\mu_{\pm})_n (\mu_{\pm}-1+\frac{l-k}{2})_n}{(2\mu_{\pm}+l-1)_n n!} & \text{if } \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

となることが分かった.

これにより $\Psi_{\alpha,\beta}$ が次の級数表示を持つことが示される.

定理 6.2.

$$\begin{aligned} & \Psi_{\frac{1}{2}, \mu_{\pm}}(u_1, u_2) \\ &= u_1^{\frac{1}{2}} u_2^{\mu_{\pm}} \sum_{m,n \geq 0} \frac{(-\mu_{\pm}-n+1)_m (\frac{1}{2})_m}{(-\mu_{\pm}-n+\frac{3}{2})_m m!} \cdot \frac{(\mu_{\pm}-\frac{1}{2})_n (\mu_{\pm}-\frac{1}{2}+\frac{l-k}{2})_n}{(2\mu_{\pm}+l-1)_n n!} u_1^m u_2^n \\ &= u_1^{\frac{1}{2}} u_2^{\mu_{\pm}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_{\pm}-\frac{1}{2})_n (\mu_{\pm}-\frac{1}{2}+\frac{l-k}{2})_n}{(2\mu_{\pm}+l-1)_n n!} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\mu_{\pm}-n+1; -\mu_{\pm}-n+\frac{3}{2}; u_1\right) u_2^n \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} & \Psi_{\mu_{\pm}, \mu_{\pm}}(u_1, u_2) \\ &= u_1^{\mu_{\pm}} u_2^{\mu_{\pm}} \sum_{n,j \geq 0} \frac{(\frac{1}{2})_j (\mu_{\pm}+n)_j}{j! (\mu_{\pm}+n+\frac{1}{2})_j} \cdot \frac{(\mu_{\pm})_n (\mu_{\pm}-1+\frac{l-k}{2})_n}{(2\mu_{\pm}+l-1)_n n!} u_1^{n+j} u_2^n \\ &= u_1^{\mu_{\pm}} u_2^{\mu_{\pm}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_{\pm})_n (\mu_{\pm}-1+\frac{l-k}{2})_n}{(2\mu_{\pm}+l-1)_n n!} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \mu_{\pm}+n; \mu_{\pm}+n+\frac{1}{2}; u_1\right) u_1^n u_2^n. \end{aligned} \quad (6.2)$$

References

- [1] Casselman, W., Milicic, D., Asymptotic behavior of matrix coefficients of admissible representations, Duke Math. J. 49 (1982), no.4, 869-930
- [2] Harish-Chandra, Spherical functions on a semi-simple Lie group I, Amer. J. Math., 80 (1958), 241-310
- [3] Hirano, M, Ishii, T., Oda, T., Confluence Siegel-Whittaker functions to Whittaker functions on $Sp(2, \mathbb{R})$, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 141,15(2006), 15-31

- [4] Hirano, M., Oda, T., Secondary Whittaker functions for P_J -principal series representations of $Sp(3, \mathbb{R})$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 81(2005), no. 6, 105-109
- [5] Iida, M., Spherical functions of the principal series representations of $Sp(2, \mathbb{R})$ as hypergeometric functions of C_2 -type, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 32(1996), 689-727
- [6] Iida, M., Errata: Spherical functions of the principal series representations of $Sp(2, \mathbb{R})$ as hypergeometric functions of C_2 -type (Publ. RIMS, Kyoto Univ., 32(1996), 689-727), Publ. RIMS, Kyoto Univ., 43(2007), no. 2, 521-524
- [7] Koseki, H., Oda, T., Matrix coefficients of representations of $SU(2, 2)$: the case of P_J -principal series, Internat. J. Math. 15(2004), no. 10, 1033-1064
- [8] Levedev, N. N., Special functions and their applications, translated by Richard A. Silverman, Dover Publ. Inc., 1972
- [9] Oshima, T., Asymptotic behavior of spherical functions on semisimple symmetric spaces, Adv. Stud. Pure Math., 14, Academic Press, Boston, 561-601, 1988
- [10] Oshima, T., A calculation of c -functions for semisimple symmetric spaces, Lie Groups and Symmetric Spaces, in the memory of F. I. Karpelevich, edited by Gindikin, AMS Translation Series, 210(2003), 315-339
- [11] Takayama, N., Propagation of singularities of solutions of the Euler-Darboux equations and a global structure of holomorphic solutions II, Funkcial. Ekvac., 36(1993), 187-234.
- [12] Wallach, N. R., Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups, Lie group representations I(College park, Md. 1982/1983), 287-369, Lecture Notes in Math. 1024, Springer, Berlin, 1983