

PRINCIPAL AFFINE W -ALGEBRAS: AN OVERVIEW

TOMOYUKI ARAKAWA
荒川 知幸 (奈良女子大学理学部)

1. はじめに

Borcherds [Bor86] によって導入された頂点代数 (vertex algebra) は、共形場理論に現れる対称性を公理化したものと考えることができるが、これまでの多くの研究により物理学や数学の様々な側面と関わりを持つことが明らかにされてきた。このような頂点代数の中で最も興味深いもののうちの1つが W 代数である。 W 代数は Virasoro 代数や「ほぼ全ての」スーパーコンフォーマル代数を特殊な場合として含む ([KRW03]), 極めて大きな頂点代数の族であり、またさまざまな側面を持つ¹。 W 代数は共形場理論の分類の研究の中で Zamolodchikov [Zam85] によって最初に導入された。Feigin-Frenkel [FF90], Kac-Roan-Wakimoto [KRW03] 等の仕事により、現在では W 代数は複素簡約リー環 $\mathfrak{g}$ とその冪零軌道に付随して BRST コホモロジーを用いて定義される。

ただし、これが「 W 代数」の唯一の定義ではなく、状況に応じて様々な「 W 代数」が存在するが、それらは全て BRST コホモロジーを用いて定義される W 代数の商であると考えられている。頂点代数の理論において、BRST コホモロジーの手法以外には、 W 代数は典型的にはいわゆるコセット構成法で現れる。例えばパラフェルミオン (あるいは Z -algebra) など W 代数の特別な場合と考えることができる²。したがって、ほとんどすべての頂点代数はなんらかの W 代数を部分代数として含んでおり、その意味で W 代数は最も基本的な頂点代数といえるだろう。

W 代数の有限次元版 (Zhu 代数) は有限 W 代数 ([dBT93]) と呼ばれるが、これは一般化された (Lie 環 $\mathfrak{g}$ の) Gelfand-Graev 表現の End 環である ([DSK06])。したがって、 W 代数の理論は Kostant-Lynch 理論 [Kos78, Lyn79] のアフィン版とみなすことができる。近年、Premet [Pre02] により、有限 W 代数 (の正標数版) が Lie 環のモジュラー表現論の中に自然に現れること、また標数 0 では有限 W 代数は Slodowy の横断片の自然な量子化であることが発見された ([GG02] も参照のこと)。さらに、Brundan-Kleshchev [BK06, BK05] により、 A 型の有限 W 代数と A 型の Yangian との (物理学者によって観察されていた) 関係が有木型の理論として確立された。

このように、有限次元の場合で既に W 代数は豊かな構造を持つ。そのアフィン版であるアフィン W 代数はなおさら興味深い。

しかし、理解が進んできたとはいえ、(アフィン) W 代数は依然ミステリアスな存在である。このような W 代数の全ての側面について述べるのは不可能であり、またそもそも筆者にその技量がない。そこで以下では、最も基本的な主冪零軌道の場合に絞り、その表現論的側面の概説を試みる。

以下、体は $\mathbb{C}$ とする

¹ W 代数に関する 90 年代中ごろまでの文献に関しては文献集 [BS95] がある。

²ただし、証明があるわけではない。

2. 冪零錘のジェットスキームと BEILINSON-DRINFELD の定理

W 代数の「 W 」には複数の意味がある. そのひとつは「Weyl 群不変式」である. $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の単純 Lie 環, G を随伴群, W を Weyl 群, $\mathfrak{h}$ を Cartan 部分代数とする. $S(\mathfrak{h})^W$ を $S(\mathfrak{h})$ の W 不変な多項式のなす部分環とする. 環 $S(\mathfrak{h})$ を「カイラライズ」³ すると Heisenberg (頂点) 代数 (free boson) が得られる. Fateev-Lukyanov [FL88] は $S(\mathfrak{h})^W$ を「カイラライズ」し, Heisenberg 頂点代数の部分代数として W 代数を定義した. この W 代数の定義は具体的である⁴が, この方法で具体的に生成元を書けるのは, (いまのところ) A, D 型の場合のみである. この構成法 (自由場表示) に関する文献は既にたくさん存在する⁵ので, ここでは省略する.

Chevalley の制限定理により同型

$$(1) \quad \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$$

が存在する. したがって, $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ の代わりに $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ を考えても良い.

$\mathfrak{g}$ の exponent を $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_\ell$ ($\ell = \text{rank } \mathfrak{g}$) とすると, $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ は次数 $d_i + 1$ の同時多項式 P_i ($i = 1, 2, \dots, \ell$) で生成される $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の部分環である. あるいは, $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ の augmentation ideal $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]_+^G$ を $\mathfrak{g}$ の冪零錘 $\mathfrak{N}$ の定義イデアルであると見ても良い:

$$(2) \quad \mathfrak{N} = \text{Spec } \mathbb{C}[\mathfrak{g}] / \mathbb{C}[\mathfrak{g}]_+^G = \text{Spec}(\mathbb{C}[\mathfrak{g}] / \langle P_1, \dots, P_\ell \rangle).$$

カイラリゼーションを考察するために, $G_\infty, \mathfrak{g}_\infty, \mathfrak{N}_\infty$ をそれぞれ $G, \mathfrak{g}, \mathfrak{N}$ のジェットスキーム (弧空間) ⁶ とする.

$$(6) \quad G_\infty = G[[t]],$$

$$(7) \quad \mathfrak{g}_\infty = \mathfrak{g}[[t]] = \varprojlim_n \mathfrak{g}_n, \quad \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}[t]/(t^{n+1})$$

である. $\{x_i\}$ を $\mathfrak{g}^*$ の基底とすると

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty] = \mathbb{C}[x_{i,(n)}; n \leq -1]$$

である ($x_i = x_{i,(-1)}$ と同一視している). $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty]$ は次で定義される線形微分作用素 T により微分環の構造を持つ.

$$(8) \quad Tx_{i,(-n)} = nx_{i,(-n-1)}.$$

この同一視の下

$$(9) \quad \mathfrak{N}_\infty = \text{Spec}(\mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty] / \langle T^n P_i; i = 1, \dots, \ell, n \geq 0 \rangle)$$

となる. $\mathbb{C}[\mathfrak{N}_\infty]$ も微分環である. $P_i \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ より $T^n P_i \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty]^{G_\infty}$ である.

³§3.5 参照.

⁴といっても関係式が書き下せるわけではない.

⁵といっても数学的に書かれたものはほとんど無いのだが.

⁶ $\mathbb{C}$ 上の有限型スキーム X のジェットスキーム X_∞ は, X の m -ジェットスキーム X_m の射影極限として定義される.

$$(3) \quad X_\infty = \varprojlim_m X_m.$$

各 X_m は次で特徴付けされるスキームである.

$$(4) \quad \text{Hom}(\text{Spec } R, X_m) \cong \text{Hom}(\text{Spec } R[z]/(z^{m+1}), X) \quad \forall R.$$

特に X がアフィンの時, X_∞ の点は準同型

$$(5) \quad \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[[z]], \quad a \mapsto \sum_{n \leq -1} a_{(n)} z^{-n-1}.$$

に対応する.

定理 2.1 (Beilinson-Drinfeld[BD]). 次が成立する:

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty]^{G_\infty} = \mathbb{C}[T^n P_i; i = 1, \dots, \ell, n \geq 0].$$

したがって,

$$\mathfrak{N}_\infty = \text{Spec } \mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty] / (\mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty]_+^{G_\infty}).$$

$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ を普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の中心とする. このとき, $U(\mathfrak{g})$, $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ はそれぞれ $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$, $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ の量子化とみなすことができる. これと同様な, $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty]$, $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty]^{G_\infty}$ の「良い量子化」は存在するだろうか?

ポイントは, $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty] \cong S(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1})$ ではあるが, $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty]$ の量子化を (退屈な) 普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1})$ とはみなさず, $\mathfrak{g}$ に付随する普遍アフィン頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ (k はパラメーター⁷) と見る点である⁸.

あとで詳しく述べるが, 一般に頂点代数 V には $U(\mathfrak{g})$ と同様に standard filtration が存在し, $\text{gr } V$ は可換な頂点代数となる. 特に $\text{gr } V$ には可換な微分環 (differential algebra) の構造が入る.

普遍アフィン頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ は,

$$(10) \quad \text{gr } V^k(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty] \quad \forall k$$

を満たす. あとで見るように, $\mathfrak{g}$ (の主冪零軌道) に付随するアフィン W 代数 $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ は,

$$(11) \quad \text{gr } \mathscr{W}^k(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty]^{G_\infty} \quad \forall k$$

を満たす頂点代数である⁹. ここで, $k \in \mathbb{C}$ は上記同様のパラメーター.

臨界レベル (すなわち $k = -h^\vee$, $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数) の時は, $\mathscr{W}^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ は $V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ の頂点代数としての中心と一致し [FF92, Fre07], したがって理論は有限次元の場合と平行である.

臨界レベルでない時は, $V^k(\mathfrak{g})$ の中心は自明となってしまう. したがって, このときは $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ は $V^k(\mathfrak{g})$ の中心としては定義されない. その代わりに, $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ は $V^k(\mathfrak{g})$ の “Whittaker ベクトル” の空間として定義されることになる. しかし, このとき $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ は可換ではなく, コンフォーマルな頂点代数 (つまり頂点作用素代数) になる.

これが「 W 」の二つめの意味¹⁰, 「アルファベット順で V の次」に対応している. 頂点作用素代数は $V = \text{Virasoro}$ 代数を部分 (頂点) 代数として含み, したがって Virasoro 代数の一般化と考えられるからである. 実際, 最も簡単な, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ に付随する W 代数は, Virasoro (頂点) 代数に一致¹¹する¹².

しかし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ 以外のときには, 交換関係 (OPE) に非線型な項が入るため, 最早 $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ を Lie 環と考えることはできない. これが W 代数の最も特徴的な点である. W 代数の交換関係は余りにも複雑¹³であり, その具体形はほとんどの場合知られていない.

アフィン Lie 環や Virasoro 代数, 格子に付随する共形場理論にとって, 頂点代数の理論は必ずしも必要ないが, W 代数の場合は避けて通れないである.

⁷ $\mathfrak{g}$ に付随するアフィン Lie 環 $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ のレベルに対応する.

⁸ $V^k(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ に付随する普遍アフィン頂点代数 $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ から自然に定義されるものである (§ 3.3 参照).

⁹ $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty]^{G_\infty}$ には非自明な頂点ポアソン代数の構造が入るが, その非可換変型が unique がどうかは知られていない.

¹⁰三つめの意味は「Wakimoto」である.

¹¹ただし, 臨界レベルの時は例外.

¹²したがって勿論, W 代数の表現論は Virasoro 代数の表現論を含む.

¹³かろうじて計算可能な $\mathscr{W}^k(\mathfrak{sl}_3)$ に関して, 一冊の本 [BMP96] が存在する.

3. VERTEX ALGEBRA BASICS

以下に頂点代数に関する基本事項を述べる. 主な参考文献は [Kac98, MN99, FBZ04] である.

3.1. 形式的冪級数とデルタ函数. V をベクトル空間としたとき,

$$V[[z, z^{-1}]] = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^n; v_n \in V \right\}$$

とする. $V[[z, z^{-1}]] \supset V \otimes \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$ である. また,

$$V[[z, w, z^{-1}, w^{-1}]] = \left\{ \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} v_{m, n} z^m w^n; v_{m, n} \in V, m, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$V((z)) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^n \in V[[z, z^{-1}]]; v_n = 0 \quad (n \ll 0) \right\}$$

などとおく. $V((z))$ は体 $\mathbb{C}((z))$ 上のベクトル空間である.

以下, $a(z) \in (\text{End } V)[[z, z^{-1}]]$ について

$$(12) \quad a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$$

と展開すると約束する. $a(z)$ は, 任意の $v \in V$ について

$$a(z)v \in V((z)), \quad \text{すなわち} \quad a_{(n)}v = 0 \quad n \gg 0$$

を満たすとき, (quantum) field と呼ばれる.

二つの field $a(z), b(z)$ があったとき, 一般に積 $a(z)b(z)$ は well-defined でない. しかし, $a(z)b(w)$ は $(\text{End } V)[[z, w, z^{-1}, w^{-1}]]$ の元として well-defined であり, 任意の $v \in V$ について

$$(13) \quad a(z)b(w)v \in V((z))((w)), \quad b(w)a(z)v \in V((w))((z))$$

を満たす.

そこで, $\mathbb{C}[z, w, z^{-1}, w^{-1}, \frac{1}{z-w}]$ を (形式冪級数ではなく) $\mathbb{C}[z, w, z^{-1}, w^{-1}]$ の $z-w$ での局所化とする. 次の二つの環の準同型が存在する.

$$(14) \quad t_{z,w} : \mathbb{C}[z, w, z^{-1}, w^{-1}, \frac{1}{z-w}] \hookrightarrow \mathbb{C}((z))((w)), \quad \frac{f}{z-w} \mapsto f \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z} \left(\frac{w}{z}\right)^n,$$

$$(15) \quad t_{w,z} : \mathbb{C}[z, w, z^{-1}, w^{-1}, \frac{1}{z-w}] \hookrightarrow \mathbb{C}((z))((w)), \quad \frac{f}{z-w} \mapsto f \sum_{n \geq 0} \frac{1}{w} \left(\frac{z}{w}\right)^n.$$

$\tau_{z,w}$ は「 $|z| > |w|$ における展開」, $\tau_{w,z}$ は「 $|w| > |z|$ における展開」なので, 差を考えることにより, 「デルタ函数」が登場する.

$$(16) \quad \begin{aligned} \delta(z-w) &:= \tau_{z,w}\left(\frac{1}{z-w}\right) - \tau_{w,z}\left(\frac{1}{z-w}\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z} \left(\frac{w}{z}\right)^n \in \mathbb{C}[[z, w, z^{-1}, w^{-1}]]. \end{aligned}$$

任意の $f(z) \in (\text{End } V)[[z, z^{-1}]]$ について積 $f(z)\delta(z-w), f(w)\delta(z-w)$ は well-defined になることが確かめられる.

補題 3.1. すべての $f(z) \in (\text{End } V)[[z, z^{-1}]]$ について $f(z)\delta(z-w) = f(w)\delta(z-w)$.

証明. $f \in \mathbb{C}[z, w, z^{-1}, w^{-1}]$ なら $\tau_{z,w}(f) = \tau_{w,z}(f)$ である. したがって

$$\begin{aligned} (z^n - w^n)\delta(z - w) &= (z^n - w^n)\left(\tau_{z,w}\left(\frac{1}{z - w}\right) - \tau_{w,z}\left(\frac{1}{z - w}\right)\right) \\ &= \tau_{z,w}\left(\frac{z^n - w^n}{z - w}\right) - \tau_{w,z}\left(\frac{z^n - w^n}{z - w}\right) = 0 \end{aligned}$$

が任意の $n \in \mathbb{Z}$ について成立する. □

3.2. OPE. 以下, $\text{Res}_z f$ を f の z^{-1} の係数, $\partial_w^{[j]} = \frac{\partial^j}{j! \partial w^j}$ とする.

補題 3.2. (i) $(z - w)^N \partial_w^{[j]} \delta(z - w) = 0$ ($N \geq j + 1$).

(ii) $\text{Res}_z (z - w)^N \delta_w^{[j]} \delta(z - w) = \delta_{N,j}$.

定義 3.3. V 上の二つの field $a(z), b(z)$ が互いに local であるとは, 十分大きな N に対して $(z - w)^N [a(z), b(w)] = 0$ が成立することである.

定理 3.4. V 上の二つの field $a(z), b(z)$ に対する次の三つの条件は同値である.

- (i) $a(z), b(z)$ は互いに local である.
- (ii) V 上の有限個の field $c_0(z), c_1(z), \dots, c_{N-1}(z)$ が存在し, 次を満たす.

$$[a(z), b(w)] = \sum_{j=0}^{N-1} c_j(w) \partial_w^{[j]} \delta(z - w).$$

- (iii) V 上の有限個の field $c_0(z), c_1(z), \dots, c_{N-1}(z)$ が存在し, 次を満たす.

$$\begin{aligned} a(z)b(w) &:= a(z)b(w) : + \sum_{j=0}^{N-1} c_j(w) \tau_{z,w} \left(\frac{1}{(z - w)^{j+1}} \right), \\ b(w)a(z) &:= a(z)b(w) : + \sum_{j=0}^{N-1} c_j(w) \tau_{w,z} \left(\frac{1}{(z - w)^{j+1}} \right). \end{aligned}$$

ここで,

$$: a(z)b(w) := a(z)_- b(w) + b(w)a(z)_+,$$

$$a(z)_- = \sum_{n < 0} a_{(n)} z^{-n-1}, \quad a(z)_+ = \sum_{n \geq 0} a_{(n)} z^{-n-1}.$$

慣習により, 定理 3.4 (ii) (あるいは (iii)) の条件が満たされるとき,

$$(17) \quad a(z)b(w) \sim \sum_{j=0}^{N-1} \frac{c_j(w)}{(z - w)^{j+1}}$$

と書き, $a(z)$ と $b(w)$ の OPE(operator product expansion) と呼ぶ. 補題 3.2 (ii) より

$$(18) \quad c_j(w) = \text{Res}_z (z - w)^j [a(z), b(w)]$$

であることに注意する.

整数 n について

$$(19) \quad a(w)_{(n)} b(w) = \text{Res}_z (z - w)^n [a(z), b(w)]$$

とおき, これを $a(w)$ と $b(w)$ の n 積と言う. 次は通常 Dong の補題と呼ばれる.

補題 3.5 (Li[Li96]). $a(z), b(z), c(z)$ が互いに local なら, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ について $a(z)_{(n)} b(z)$ と $c(z)$ も互いに local である.

上の記号を持ちいると OPE は

$$(20) \quad a(z)b(w) \sim \sum_{j \geq 0} \frac{a(w)_{(j)}b(w)}{(z-w)^{j+1}}$$

と書くことができる.

3.3. 頂点代数.

定義 3.6. 頂点代数とは, ベクトル空間 V であって次のデータが与えられているものを言う.

- 真空 $1 \in V$,
- 推移作用素 $T \in \text{End } V$,
- V 上の field の族 $\{a^\alpha(z); \alpha \in A\}$ (生成場).

これらは以下の条件を満たす.

- (i) 任意の $\alpha, \beta \in A$ について $a^\alpha(z), a^\beta(z)$ は互いに local である.
- (ii) ベクトル $a_{(n_1)}^{\alpha_1} \dots a_{(n_r)}^{\alpha_r} 1$ ($\alpha_i \in A, n_i \in \mathbb{Z}$) は V を張る.
- (iii) 任意の $\alpha \in A$ について, $a_{(n)}^\alpha 1 = 0$ ($n \geq 0$). したがって $a^\alpha(z)1 \in V[[z]]$.
- (iv) $T1 = 0$.
- (v) 任意の $\alpha \in A$ について, $[T, a^\alpha(z)] = \partial_z a^\alpha(z)$.

定理 3.7 (state-field correspondence). V を頂点代数とすると, 以下の条件を満たす線型写像

$$Y(?, z) : V \rightarrow (\text{End } V)[[z, z^{-1}]], \quad a \mapsto Y(a, z) = a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$$

が唯一存在する (これを state-field correspondence と言う).

- (i) 生成場 $a^\alpha(z)$ に対し $Y(a_{(-1)}^\alpha 1, z) = a^\alpha(z)$.
- (ii) 任意の $a \in V$ に対し $Y(a, z)$ は V 上の field.
- (iii) 任意の $a, b \in V$ に対し $Y(a, z)$ と $Y(b, z)$ は互いに local.
- (iv) 任意の $a \in V$ に対し, $[T, Y(a, z)] = \partial_z Y(a, z)$.
- (v) 任意の $a \in V$ に対し. $Y(a, z)1 \in V[[z]]$ かつ $\lim_{z \rightarrow 0} Y(a, z)1 = a$.

頂点代数の理論では, state-field correspondence によりしばしば V の元 a と対応する field $a(z) = Y(a, z)$ を同一視する.

V を頂点代数とすると次が成立する.

$$(21) \quad Y(a, z)Y(b, w) \sim \sum_{j \geq 0} \frac{Y(a_{(j)}b, w)}{(z-w)^{j+1}},$$

$$(22) \quad Y(a_{(n)}b, w) = \text{Res}_z (z-w)^n [Y(a, z), Y(b, w)].$$

これらが頂点代数の基本関係式である. フーリエ係数で書くと次の様になる.

$$(23) \quad [a_{(m)}, b_{(n)}] = \sum_{j \geq 0} \binom{m}{j} (a_{(j)}b)_{(m+n-j)},$$

$$(24) \quad (a_{(m)}b)_{(n)} = \sum_{j \geq 0} \binom{m}{j} (-1)^j (a_{(m-j)}b_{(n+j)} - (-1)^m b_{(m+n-j)}a_{(j)}).$$

(23) の右辺は常に有限和だが, (24) の右辺は m が負のとき無限和となる.

例 3.8. $(\mid)$ を $\mathfrak{g}$ 上の不変内積とする. $(\mathfrak{g}, (\mid))$ に付随するアフィン Lie 環を $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ とかく.

$$(25) \quad \mathfrak{g}_{\text{aff}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D.$$

交換関係は次で与えられる.

$$\begin{aligned} [x(m), y(n)] &= [x, y](m+n) + m(x|y)\delta_{m+n,0}K \quad (x, y \in \mathfrak{g}), \\ [D, x(m)] &= mx(m), \\ [K, \mathfrak{g}_{\text{aff}}] &= 0. \end{aligned}$$

ただし, $x(m) = x \otimes t^m$. $\mathbb{C} \ni k$ について

$$(26) \quad V^k(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}_{\text{aff}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D)} \mathbb{C}_k$$

とおく. $\mathbb{C}_k$ は $\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}D$ が自明に, K が k で作用する一次元表現である. $V^k(\mathfrak{g})$ 上の field $x(z)$ ($x \in \mathfrak{g}$) を,

$$(27) \quad x(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)z^{-n-1}$$

で定義する¹⁴. このとき, $x(z), y(z)$ ($x, y \in \mathfrak{g}$) は互いに local であり, 次の OPE を持つ.

$$(28) \quad x(z)y(w) \sim \frac{[x, y](w)}{z-w} + \frac{k(x|y)}{(z-w)^2}.$$

$V^k(\mathfrak{g})$ は $1 = 1 \otimes 1$ を真空, $\{x(z); x \in \mathfrak{g}\}$ を生成場とする頂点代数の構造を持つ. $V^k(\mathfrak{g})$ を $(\mathfrak{g}, (\mid))$ に付随するレベル k の普遍アフィン頂点代数と呼ぶ.

3.4. 頂点代数の表現. ベクトル空間 M が頂点代数 V の表現であるとは, 線型写像

$$(29) \quad Y_M(?, z) : V \rightarrow (\text{End } M)[[z, z^{-1}]], \quad a \mapsto Y_M(a, z)$$

が存在し, 次を満たすことをいう.

$$(30) \quad Y_M(a, z) \text{ は } M \text{ 上の field である}$$

$$(31) \quad Y_M(a, z)Y_M(b, w) \sim \sum_{j \geq 0} \frac{Y_M(a_{(j)}b, w)}{(z-w)^{j+1}},$$

$$(32) \quad Y_M(a_{(n)}b, w) = \text{Res}_z (z-w)^n [Y_M(a, z), Y_M(b, w)].$$

特に V 自身は V 加群である. N を V の真の部分加群とすると V/N は頂点代数の構造を持つ. 単純頂点代数とは 0 以外の真の部分加群を持たない頂点代数のことである.

3.5. カレント代数と Zhu 代数. 以下, 頂点代数 V はハミルトニアン H によって次数付けされているとする¹⁵:

$$V = \bigoplus_{\Delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V_{-\Delta}, \quad V_{-\Delta} = \{v \in V : Hv = \Delta v\}.$$

ここでハミルトニアンとは, 次の交換関係を満たす V 上の半単純作用素である.

$$(33) \quad [H, Y(a, z)] = Y(Ha, z) + zY(Ha, z) \quad \forall a \in V.$$

¹⁴したがって (ややこしいが) $x_{(n)} = x(n)$ である.

¹⁵VOA(頂点作用素代数) 学派は通常「最低ウエイト加群」を考えるのだが, 筆者はどうしても混乱してしまうので「最高ウエイト加群」を考えることにする.

H の固有ベクトル a の固有値 Δ_a はコンフォーマルウエイトと呼ばれる。このとき、

$$(34) \quad [H, a_{(n)}] = -(n - \Delta_a + 1)a_{(n)}$$

が成立する。

例 3.9. $V^k(\mathfrak{g})$ 上の field $S(z)$ を次で定義する。

$$(35) \quad S(z) = \sum_a : J_a(z) J_a(z) : .$$

ここで, $\{J_a\}$ は $\mathfrak{g}$ の直交基底. State-field correspondence より $S(z) = Y(S_{(-1)}\mathbf{1}, z)$ である. $k \neq -h^\vee$ の時,

$$(36) \quad L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2} = \frac{1}{2(k + h^\vee)} S(z)$$

とおくと, $L(z)$ は OPE

$$L(z)L(w) \sim \frac{1}{z-w} \partial_w L(w) + \frac{1}{(z-w)^2} L(w) + \frac{\frac{k \dim \mathfrak{g}}{k+h^\vee}}{2(z-w)^4}$$

を満たす. これから, $\{L(n); n \in \mathbb{Z}\}$ は中心電荷 $\frac{k \dim \mathfrak{g}}{k+h^\vee}$ の Virasoro 代数の交換関係を満たすことがわかる (管原構成法). この時, $L(0)$ は $V^k(\mathfrak{g})$ のハミルトニアンとなる.

$$(37) \quad [L(0), xt^n] = -nxt^n, \quad L(0)\mathbf{1} = 0$$

であるので, $L(0) = -D$ である. ($L(0)$ が定義されない) $k = -h^\vee$ においても $-D$ は $V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ のハミルトニアンとなる.

今,

$$(38) \quad \text{Lie } V = V[t, t^{-1}] / \text{Im}(T \otimes 1 + 1 \otimes d/dt)$$

とおくと, $\text{Lie } V$ は次で Lie 環の構造が入る ([Bor86]).

$$(39) \quad [at^m, bt^n] = \sum_{j \geq 0} \binom{m}{j} (a_{(j)}b) t^{m+n-j}.$$

ただし, $a \otimes t^m + \text{Im}(T \otimes 1 + 1 \otimes d/dt)$ を at^m と書いた.

$[H, at^m] = (n - \Delta_a + 1)at^m$ と定めることにより, V の次数付けは $\text{Lie } V$ の次数付けに自然に拡張される: $\text{Lie } V = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} (\text{Lie } V)_d$. ここで, $(\text{Lie } V)_d = \{x \in \text{Lie } V; Hx = -dx\}$ とした. (23) から V 加群は自然に $\text{Lie } V$ 加群である. しかし, (24) より, $\text{Lie } V$ 加群は V 加群とは限らない.

$U(\text{Lie } V) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} U(\text{Lie } V)_d$ とし, 無限和を許すために完備化を行う.

$$\tilde{U}(\text{Lie } V) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \tilde{U}(\text{Lie } V)_d,$$

$$\tilde{U}(\text{Lie } V)_d = \varprojlim_N U(\text{Lie } V)_d / \sum_{r > N} U(\text{Lie } V)_{d-r} U(\text{Lie } V)_r.$$

(この種の完備化を以下 [MNT05] に従い standard degreewise filtration と呼ぶ.)

関係式 (24) および $1t^n - \delta_{n,-1}$ で生成される $\tilde{U}(\text{Lie } V)$ の graded ideal を I とする. $\tilde{U}(\text{Lie } V)$ を I の閉包で割った商代数を $\mathfrak{U}(V)$ とおき, V のカレント代数¹⁶ と呼ぶ. $\mathfrak{U}(V)$ は自然に次数付けされている: $\mathfrak{U}(V) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathfrak{U}(V)_d$.

¹⁶(本質的に) 同じものを [FZ92] では V の普遍包絡環と呼んでいる.

$\mathfrak{U}(V)_0$ は $\mathfrak{U}(V)$ の部分代数であるが, $\mathfrak{U}(V)_0$ の商代数 $\text{Zh}(V)$ を

$$(40) \quad \text{Zh}(V) = \mathfrak{U}(V)_0 / \overline{\sum_{p>0} \mathfrak{U}(V)_{-p} \mathfrak{U}(V)_p}$$

で定義し, V の Zhu 代数と呼ぶ¹⁷.

一般に単位元を持つ $\mathbb{C}$ 代数 A に対し, $\text{Zh}(V) = A$ となる頂点代数 V を A のカイラリゼーションと呼ぶ (勿論, このような V は一般には unique ではない).

例 3.10. 次が成立する.

$$(41) \quad \mathfrak{U}(V^k(\mathfrak{g})) = \tilde{U}_k(\mathfrak{g}_{\text{aff}}),$$

$$(42) \quad \text{Zh}(V^k(\mathfrak{g})) = U(\mathfrak{g}).$$

ここで, $\tilde{U}_k(\mathfrak{g}_{\text{aff}})$ は $U_k(\mathfrak{g}_{\text{aff}}) = U(\mathfrak{g}_{\text{aff}})/\langle K - k1 \rangle$ の standard degreewise completion. ($\tilde{U}_k(\mathfrak{g}_{\text{aff}})$ の次数付けは $\text{ad } D$ によって入れる.) 特に $V^k(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g})$ のカイラリゼーションである.

$V\text{-Mod}$ を次を満たす加群 $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{C}} M_d$ からなる graded V 加群の圏の充満部分圏とする.

$\mathbb{C}$ の有限部分集合 $d_1, \dots, d_r$ が存在し, $d \notin \bigcup_i d_i - \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば $M_d = 0$.

$V\text{-Mod}$ の対象は V の positive energy representation (あるいは admissible representation) と呼ばれる.

次は $\text{Zh}(V)$ の定義からほぼ明らかであろう.

定理 3.11 (Zhu[Zhu96]). $V\text{-Mod}$ の単純対象の同型類と $\text{Zh}(V)$ の単純加群の同型類は一対一に対応する.

$V^k(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ 加群としての単純商を $V_k(\mathfrak{g})$ と書くと, これは単純頂点代数である. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の時, $\text{Zh}(V_k(\mathfrak{g})) = U(\mathfrak{g})/\langle e_{\theta}^{k+1} \rangle$ であることが知られている.

Open Problem 1. 一般の k に対して¹⁸, $\text{Zh}(V_k(\mathfrak{g}))$ を決定せよ¹⁹.

3.6. 頂点代数の standard filtration. $C_2(V)$ を $a_{(-2)}b$ ($a, b \in V$) で張られる V の部分空間とする. このとき $V/C_2(V)$ には次でポアソン代数の構造が入ることが知られている ([Zhu96]).

$$(43) \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a_{(-1)}b},$$

$$(44) \quad \{\bar{a}, \bar{b}\} = \overline{a_{(0)}b}$$

$V/C_2(V)$ が可換環として有限生成のとき, V は有限生成であるという²⁰. このとき, V は有限個の field によって生成される.

以下では V は有限生成と仮定する.

例 3.12. $C_2(V^k(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-2} \cdot V^k(\mathfrak{g})$ である. よって $V^k(\mathfrak{g})/C_2(V^k(\mathfrak{g})) \cong S(\mathfrak{g} \otimes t^{-1}) \cong S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$. これはポアソン代数としての同型である.

次が成立する.

補題 3.13. V を頂点代数とすると次は同値.

¹⁷Zhu[Zhu96] の original な定義はこれとは異なるが, 同値になることが知られている ([FZ92, NT05])

¹⁸特に $k \in \mathbb{Q}_{>0} \setminus \mathbb{Z}_{>0}$ のときが重要である

¹⁹ $\mathfrak{sl}_2$ の場合は決定されている (と思う).

²⁰人によって「有限生成」の定義が違うので注意.

- (i) V は可換 (OPE が全て 0).
- (ii) 全ての $a \in V$ に対し, $a_{(n)} = 0$ ($n \geq 0$).

補題 3.13 より V が可換なら

$$(45) \quad Y(a, z) = \sum_{n \geq -1} a_{(n)} z^{-n-1} \in (\text{End } V)[[z]]$$

である. このとき, V には次で可換環の構造が入る.

$$(46) \quad a \cdot b = a_{(-1)} b.$$

この積は微分作用 T と整合的であるので, 可換な頂点代数は微分環とみなすことができる.

命題 3.14 ([Li04]). 頂点代数 V について

$$(47) \quad F_p V = \text{span}\{a_{(-n_1)}^1 \cdots a_{(-n_r)}^r \mathbf{1}; n_i \geq 1, \Delta_{a^1} + \cdots + \Delta_{a^r} \leq p\}.$$

と定めると, $\{F_p V\}$ は V の quasi-commutative な filtration を定める. すなわち $\text{gr } V$ は可換な頂点代数になる.

定義より, standard filtration は V の次数付けと compatible であり,

$$(48) \quad V_\Delta = F_\Delta V_\Delta \supset F_{\Delta-1} V_\Delta \supset \cdots \supset F_{-1} V_\Delta = 0$$

が成立する.

命題 3.15. $\bigoplus_{\Delta \geq 0} F_\Delta V_\Delta / F_{\Delta-1} V_\Delta$ は $\text{gr } V$ の部分環であり $V/C_2(V)$ に同型である. この同一視の下, $\text{gr } V$ は微分環として $V/C_2(V)$ で生成される.

上の命題から全射

$$(49) \quad \mathbb{C}[(\text{Spec } V/C_2(V))_\infty] \rightarrow \text{gr } V$$

が存在することがわかる.

例 3.16. 同一視 $V^k(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1})$ の下, $V^k(\mathfrak{g})$ の standard filtration と $U(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1})$ の standard filtration は一致する. したがって

$$(50) \quad \text{gr } V^k(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty]$$

である. 特にこの場合 (49) は同型である.

4. FEIGIN-FRENKEL 理論

この章の基本文献は [FBZ04, Fre07] である.

4.1. BRST 還元法による $\mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}})$ の Whittaker 模型. e を $\mathfrak{g}$ の主冪零元とし, $\mathfrak{sl}_2$ トリプル $\{e, h, f\}$ をとる. $\mathfrak{g}_j = \{x \in \mathfrak{g}; [h, x] = 2jx\}$ とし, $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{j>0} \mathfrak{g}_j$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{j<0} \bar{\mathfrak{g}}_j$ とおくと, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ は $\mathfrak{g}$ の三角分解である. $\mathfrak{b}_\pm = \mathfrak{n}_\pm \oplus \mathfrak{h}$ とおく.

N を $\mathfrak{n}_+$ に対応する冪単群とする.

定理 4.1 (Kostant [Kos78]). 随伴作用は次のアフィン代数多様体の同型を与える.

$$N \times (f + \mathfrak{g}^e) \xrightarrow{\sim} f + \mathfrak{b}_+.$$

今,

$$(51) \quad \mu : \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{n}_+^* = \mathfrak{n}_-$$

を制限写像とすると, μ は N の作用に関するモーメント写像に一致する. $\chi = (f|?) \in \mathfrak{n}_+^*$ とおくと χ は $\mathfrak{n}_+$ の指標を定める. したがって χ は一点からなる N の軌道になる. $\mu^{-1}(\chi) = f + \mathfrak{b}_+$ であるので, Hamiltonian reduction により $f + \mathfrak{g}^e = (f + \mathfrak{b}_+)/N$ に reduced Poisson variety の構造が入ることがわかる ([GG02] 参照).

一方, 次が成立する.

命題 4.2. 制限写像 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \rightarrow \mathbb{C}[f + \mathfrak{g}^e] = \mathbb{C}[f + \mathfrak{b}_+]^N$ はポアソン代数の間の同型を与える.

同一視 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G = \mathbb{C}[f + \mathfrak{g}^e]$ の下, $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ の量子化を量子 BRST 還元法 [KS87] を用いて行う.

$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の量子化を $U(\mathfrak{g})$ とみなす. Cl を次の生成元と関係式で生成されるスーパー代数とする.

$$(\text{奇の}) \text{ 生成元} : \psi_\alpha \quad (\alpha \in \Delta),$$

$$\text{関係式} : [\psi_\alpha, \psi_\beta] = \delta_{\alpha+\beta, 0}.$$

ここで Δ は $\mathfrak{g}$ のルートの集合である. Δ_+ を正ルートの集合, Δ_- を負のルートの集合とすると, ψ_α ($\alpha \in \bar{\Delta}_\pm$) で生成される Cl の部分代数は $\Lambda(\mathfrak{n}_\pm)$ に同型であり, ベクトル空間として $Cl = \Lambda(\mathfrak{n}_-) \otimes \Lambda(\mathfrak{n}_+)$ である.

$U(\mathfrak{g})$ を purely even なスーパー代数と見て, $U(\mathfrak{g}) \otimes Cl$ を自然にスーパー代数と見る. (以下元のテンソル積の記号は省略する.)

$U(\mathfrak{g}) \otimes Cl$ の odd の元 Q を以下で定める.

$$(52) \quad Q = \sum_{\alpha \in \Delta_+} (x_\alpha + \chi(x_\alpha)) \psi_{-\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \Delta_+} c_{\alpha, \beta}^\gamma \psi_{-\alpha} \psi_{-\beta} \psi_\gamma$$

ここで, x_α は α に対応するルートベクトル, $c_{\alpha, \beta}^\gamma$ は構造定数である. 直接計算により

$$(53) \quad Q^2 = 0$$

が確かめられる. Q は odd なので, (スーパーの意味で)

$$(54) \quad (\text{ad } Q)^2 = 0$$

が成立する. したがって,

$$\deg u = 0 \ (u \in U(\mathfrak{g})), \deg \psi_\alpha = 1 \ (\alpha \in \Delta_-), \deg \psi_\alpha = -1 \ (\alpha \in \Delta_+)$$

により $U(\mathfrak{g}) \otimes Cl$ に次数付けを定めると, $(U(\mathfrak{g}) \otimes Cl, \text{ad } Q)$ は複体となる. コホモロジー

$$(55) \quad H^\bullet(U(\mathfrak{g}) \otimes Cl, \text{ad } Q) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^i(U(\mathfrak{g}) \otimes Cl, \text{ad } Q)$$

は次数付けされたスーパー代数となる.

定理 4.3 ([Kos78, KS87]).

(i) $H^{i \neq 0}(U(\mathfrak{g}) \otimes Cl, \text{ad } Q) = 0$.

(ii) 自然な写像 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow H^0(U(\mathfrak{g}) \otimes Cl, \text{ad } Q)$ は同形写像である.

4.2. W 代数の定義: Whittaker 模型のカイラリゼーション. $k \in \mathbb{C}$ をパラメーターとして, 前述の通り $V^k(\mathfrak{g})$ を $U(\mathfrak{g})$ のカイラリゼーションと見る.

次の OPE を持つ odd field ψ_α ($\alpha \in \Delta$) で生成される (スーパー) 頂点代数を $\bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ と書く.

$$(56) \quad \psi_\alpha(z)\psi_\beta(w) \sim \frac{\delta_{\alpha+\beta,0}}{z-w}.$$

今

$$(57) \quad \psi_\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_\alpha(n) z^{-n-1} \quad (\alpha \in \Delta_+),$$

$$(58) \quad \psi_\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_\alpha(n) z^{-n} \quad (\alpha \in \Delta_-)$$

と展開したとき

$$(59) \quad [\psi_\alpha(m), \psi_\alpha(n)] = \delta_{\alpha+\beta,0} \delta_{m+n,0}$$

を満たす. odd の生成元 $\psi_\alpha(n)$ ($\alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z}$) と関係式 (59) で定義されるスーパー代数を Cl_{aff} と書く. $\bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ は Cl_{aff} の既約表現である. $\bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ には $[H, \psi_\alpha(n)] = -n\psi_\alpha(n)$, $H\mathbf{1} = 0$ でハミルトニアンが定まる. また, H による次数付けとは別に, $\deg \mathbf{1} = 0$, $\deg \psi_\alpha(n) = 1$ ($\alpha \in \Delta_-$), $\deg \psi_\alpha(n) = -1$ ($\alpha \in \Delta_+$) により次の次数付けが定まる:

$$\bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+i}.$$

命題 4.4. $\mathcal{U}(\bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}) = \widetilde{Cl}_{\text{aff}}$, $\text{Zh}(\bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}) = Cl$ が成立する. ただし, $\widetilde{Cl}_{\text{aff}}$ は Cl_{aff} の standard degreewise completion である.

$V^k(\mathfrak{g}), \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ が頂点代数なので, そのテンソル積 $V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ も自然に頂点代数となる.

命題 4.5. $\mathcal{U}(V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}) = \widetilde{U_k(\mathfrak{g}_{\text{aff}})} \otimes Cl_{\text{aff}}$, $\text{Zh}(V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}) = U(\mathfrak{g}) \otimes Cl$. ただし, $\widetilde{U_k(\mathfrak{g}_{\text{aff}})} \otimes Cl_{\text{aff}}$ は $U_k(\mathfrak{g}_{\text{aff}}) \otimes Cl_{\text{aff}}$ の standard degreewise completion.

$V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ 上の field $Q(z)$ を,

$$(60) \quad Q(z) = \sum_{\alpha \in \Delta} (x_\alpha(z) + \chi(x_\alpha)) \psi_{-\alpha}(z) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} c_{\alpha, \beta}^\gamma \psi_{-\alpha}(z) \psi_{-\beta}(z) \psi_\gamma(z)$$

で定める. State-field correspondence により, $Q(z) = Y(Q_{(-1)}\mathbf{1}, z)$ である.

次が計算により確かめられる.

$$(61) \quad Q(z)Q(w) \sim 0.$$

$Q(z)$ は odd field なので, (61) は次と同値である.

$$(62) \quad [Q_{(m)}, Q_{(n)}] = 0 \quad \text{for all } m, n \in \mathbb{Z}.$$

特に

$$Q_{(0)}^2 = 0, \quad Q_{(0)} \cdot V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+i} \subset V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+i+1}.$$

ゆえに $(V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)})$ は複体となる. 更に

$$(63) \quad [Q_{(0)}, Y(a, z)] = Y(Q_{(0)}a, v)$$

が成立することから, $H^\bullet(V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)})$ は頂点代数の構造を持つことがわかる. そこで,

$$(64) \quad \mathscr{W}^k(\mathfrak{g}) := H^0(V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)})$$

と定義すると, これは $H^\bullet(V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)})$ の (purely even な) 部分頂点代数となる. $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ (の主零軌道) に付随するレベル k の (普遍) アフィン W 代数と呼ぶ.

4.3. Classical Hamiltonian reduction との関係. 紙面の節約のため一旦 $C^\bullet = V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ とおく. $C^\bullet/C_2(C^\bullet)$ は $(C^\bullet, Q_{(0)})$ の商複体であり, $Q_{(0)}$ の $C^\bullet/C_2(C^\bullet)$ への作用は $Q_{(-1)}1$ によるポアソnbracket に一致する. 一方,

$$(65) \quad C^\bullet/C_2(C^\bullet) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \otimes \Lambda(\mathfrak{n}_+^*) \otimes \Lambda(\mathfrak{n}_+)$$

であるが, この同一視のもと $C^\bullet/C_2(C^\bullet) \rightarrow H^0(C^\bullet/C_2(C^\bullet), Q_{(0)})$ は (BRST コホモロジーを用いて記述された) (51) による Hamiltonian reduction に他ならない. つまり次が成立する.

定理 4.6 ([Kos78, KS87]). (i) $H^{i \neq 0}(C^\bullet/C_2(C^\bullet), Q_{(0)}) = 0$,
(ii) 自然な写像 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G \rightarrow H^0(C^\bullet/C_2(C^\bullet), Q_{(0)})$ は同形写像である.

順序が逆になったが, 定理 4.6 を量子化したのが定理 4.3 である.

4.4. Feigin-Frenkel, Frenkel-Ben-Zvi の消滅定理. $Q_{(0)}$ を $U_k(\widehat{\mathfrak{g}_{\text{aff}}}) \otimes \mathcal{C}l_{\text{aff}}$ の元として具体的に書くと次のようになる.

$$Q_{(0)} = \sum_{\substack{\alpha \in \Delta_+ \\ n \in \mathbb{Z}}} x_\alpha(-n) \psi_\alpha(n) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \in \Delta_+ \\ k, l \in \mathbb{Z}}} c_{\alpha, \beta}^\gamma \psi_{-\alpha}(-k) \psi_{-\beta}(-l) \psi_\gamma(k+l) \\ + \sum_{\alpha \in \Delta} \chi(x_\alpha) \psi_{-\alpha}(1)$$

この形からわかるように, $Q_{(0)}$ は $V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ 上の対角的なハミルトニアンと整合的ではない. そこで H_{new} を

$$\begin{aligned} [H_{\text{new}}, x_\alpha(n)] &= (n - \text{ht } \alpha) x_\alpha(n), & [H_{\text{new}}, x_{-\alpha}(n)] &= (n + \text{ht } \alpha) x_{-\alpha}(n) \quad (\alpha \in \Delta_+), \\ [H_{\text{new}}, J(n)] &= nJ(n) \quad (J \in \mathfrak{h}), \\ [H_{\text{new}}, \psi_\alpha(n)] &= (n - \text{ht } \alpha) \psi_\alpha(n), & [H_{\text{new}}, \psi_{-\alpha}(n)] &= (n + \text{ht } \alpha) \psi_{-\alpha}(n) \quad (\alpha \in \Delta_+), \\ H_{\text{new}} \mathbf{1} &= 0 \end{aligned}$$

で定めると, H_{new} は $Q_{(0)}$ と可換な $V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ のハミルトニアンとなる. したがって, H_{new} は $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ のハミルトニアンを定める.

注意 4.7. この新しいハミルトニアンによる $V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ の固有値は上にも下にも有界ではない:

定理 4.8 (Feigin-Frenkel[FF90], Frenkel-Ben-Zvi [FBZ04]). 任意の $k \in \mathbb{C}$ について以下が成立する.

- (i) $H^{i \neq 0}(V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)}) = 0$.
- (ii) $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})/C_2(\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})) \cong H^{i \neq 0}(V^k(\mathfrak{g})/C_2(V^k(\mathfrak{g})), Q_{(0)}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$.
- (iii) $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})_{-\Delta} = 0$ ($\Delta < 0$). さらに,

$$\text{gr } \mathscr{W}^k(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty]^{G_\infty}.$$

$W_i \equiv P_i \pmod{C_2(\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}))}$ なる $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ の同次ベクトル W_i を選ぶと、定理 4.8 より

$$\mathrm{gr} \mathscr{W}^k(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}[T^j \bar{W}_j; j = 1, 2, \dots, \ell, j \geq 0]$$

である。したがって $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ は ℓ 個の元 $W_1(z), W_2(z), \dots, W_\ell(z)$ で生成される。各 W_i はコンフォーマルウエイト $d_i + 1$ を持つ。

例 4.9. コンフォーマルウエイト 2 の元 W_1 は具体的に書くことができる:

$$W_1(z) = S(z) + 2(k + h^\vee) \left(\sum_{\alpha \in \Delta_+} : \partial_z \psi_{-\alpha}(z) \psi_\alpha(z) : + \partial_z \widehat{\rho}^\vee(z) \right),$$

$$\widehat{\rho}^\vee(z) = \rho^\vee(z) + \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathrm{ht} \alpha : \psi_\alpha(z) \psi_{-\alpha}(z) :.$$

このとき、

$$W_{(-1)} \mathbf{1} \equiv S_{(-1)} \mathbf{1} \pmod{C_2(V^k(\mathfrak{g}))}$$

を確かめられる。

$k \neq -h^\vee$ の時、

$$L(z) = \frac{1}{2(k + h^\vee)} W_1(z)$$

は中心電荷

$$c(k) = \ell - 12(\kappa |\rho^\vee|^2 - 2\langle \rho, \rho^\vee \rangle + |\rho|^2 / \kappa), \quad \kappa = k + h^\vee$$

の Virasoro 代数を生成し、 $L(0) = H$, $L(-1) = T$ となる。従ってこのとき $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ はコンフォーマルである。

特に $W^k(\mathfrak{sl}_2)$ は中心電荷 $c(k)^{21}$ の Virasoro 頂点代数²²に一致する。

4.5. 臨界レベルにおける W 代数。頂点代数 V に付いてその中心 $\mathcal{Z}(V)$ を $\mathcal{Z}(V) = \{a \in V : [a_{(m)}, b_{(n)}] = 0 \text{ for all } m, n \in \mathbb{Z}, b \in V\}$ で定める。 $\mathcal{Z}(V)$ は V の可換な部分頂点代数になる。

定理 4.10 (Feigin-Frenkel [FF92]).

- (i) $k \neq -h^\vee$ である時 $\mathcal{Z}(V^k(\mathfrak{g})) = \mathbb{C} \mathbf{1}$.
- (ii) 自然な写像 $\mathcal{Z}(V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})) \rightarrow \mathscr{W}^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ は頂点代数の同型を与える。

4.6. W 代数の Langlands 双対性。次は Feigin-Frenkel [FF92] によって k が generic の時に示された。

定理 4.11. 任意の $k \neq -h^\vee$ について次が成立する。

$$\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}) \cong \mathscr{W}^{Lk}({}^L\mathfrak{g}).$$

ただし、 ${}^L\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ の Langlands 双対、 $r^\vee(k + h^\vee)({}^Lk + {}^Lh^\vee) = 1$.

定理 4.11 において $k \rightarrow \infty$ と極限をとることにより、Feigin-Frenkel は Drinfeld によって予想されていた次の事実を示した。

$$(66) \quad \mathbb{C}[\mathrm{Op}_G(D)] (= W^\infty(\mathfrak{g})) \cong \mathcal{Z}(V^{-h^\vee}({}^L\mathfrak{g})).$$

ここで、 $\mathrm{Op}_G(D)$ は Disk D 上の oper [BD05] である ([FBZ04] 参照)。

²¹ $\mathfrak{sl}_2$ の時は $k + 2 = p/q$ とおくと $c(k) = 1 - 6(p - q)^2/pq$.

²²定義してませんが...

5. BRST 還元関手と W 代数の表現論

5.1. “+”-還元法. M を $V^k(\mathfrak{g})$ 加群とする. すると $M \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ は自然に $V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ 加群になる. したがって, コホモロジー

$$(67) \quad H^\bullet(M \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)})$$

は自然に $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ 加群になる. 一方, 定義により,

$$(68) \quad H^\bullet(M \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)}) = H^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{n}_+[t, t^{-1}], M \otimes \mathbb{C}_{\chi_{\text{aff}}})$$

である. ここで, 右辺は Feigin [Fei84] の semi-infinite コホモロジーで, χ_{aff} は

$$\chi_{\text{aff}}(x(n)) = \delta_{n,-1} \chi(x)$$

で定義される $\mathfrak{n}_+[t, t^{-1}]$ の指標である.

以上より, 対応

$$(69) \quad M \mapsto H^{\frac{\infty}{2}+0}(L\bar{\mathfrak{n}}_+, M \otimes \mathbb{C}_{\chi_{\text{aff}}})$$

は $V^k(\mathfrak{g})$ 加群の圏から $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ 加群の圏への関手を与える. これを “+”-還元関手という.

5.2. “+”-還元法の臨界レベルにおける $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ の表現論への応用. $\mathfrak{h}_{\text{aff}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$ を $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ の Cartan 部分代数とする. また, $\mathcal{O}_k$ を $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ のレベル k の BGG 圏とする. レベル k のウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{aff}}^*$ に対し, $M(\lambda)$, $L(\lambda)$ をそれぞれ最高ウェイト λ の $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ の Verma 加群, 既約加群とする.

(41) より, $\mathcal{O}_k$ の任意の対象は自然に $V^k(\mathfrak{g})$ 加群になる.

$\mathcal{O}_k^{\text{KL}}$ を全ての D 固有空間 M_d が有限次元となるような加群 M からなる, $\mathcal{O}_k$ の充満部分圏とする. $\bar{\lambda}$ を $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{aff}}^*$ の $\mathfrak{h}$ への制限とすると, $L(\lambda) \in \mathcal{O}_k$ が $\mathcal{O}_k^{\text{KL}}$ に属するための必要十分条件は,

$$\bar{\lambda} \in P_+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*; \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall \alpha \in \Delta_+\}$$

である.

“+”-還元関手は $k + h^\vee \notin \mathbb{Q}_{>0}$ の時の $\mathcal{O}_k^{\text{KL}}$ と最も相性が良い.

定理 5.1 (A., to appear). $k + h^\vee \notin \mathbb{Q}_{>0}$ とすると, 任意の $M \in \mathcal{O}_k^{\text{KL}}$ に対して,

$$H^{\frac{\infty}{2}+i}(\mathfrak{n}_+[t, t^{-1}], M \otimes \mathbb{C}_{\chi_+}) = 0 \quad \forall i \neq 0.$$

故に $\mathcal{O}_k^{\text{KL}} \rightarrow \mathscr{W}^k(\mathfrak{g})\text{-Mod}$, $M \mapsto H^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathfrak{n}_+[t, t^{-1}], M \otimes \mathbb{C}_{\chi_+})$ は完全関手である.

臨界レベルにおいては大きな中心の存在のため, $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ の表現論は「劇的に」変わる. 一方, 定理 4.10 より, その中心は W 代数に他ならないのであった.

定理 5.2 (A., to appear). $\mathcal{O}_{-h^\vee}^{\text{KL}}$ の任意の単純対象 $L(\lambda)$ について,

$$\dim H^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathfrak{n}_+[t, t^{-1}], L(\lambda) \otimes \mathbb{C}_{\chi_{\text{aff}}}) = 1.$$

定理 5.1, 5.2 から次を (簡単に) 示すことができる.

定理 5.3 ([Ara07a]). $\mathcal{O}_{-h^\vee}^{\text{KL}}$ の任意の単純対象 $L(\lambda)$ について, その指標 $\text{ch } L(\lambda)$ は次で与えられる.

$$\text{ch } L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w \circ \lambda}}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \delta}) \prod_{\alpha \in \Delta_{\text{aff},+}^{\text{re}}} (1 - e^{-\alpha})}.$$

ただし, $\Delta_{\text{aff},+}^{\text{re}}$ は $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ の正の実ルートの集合.

5.3. “+”還元法は $k + h^\vee \in \mathbb{Q}_{>0}$ のアフィン Lie 環の表現とあまり相性が良くない (ただし, $\mathfrak{sl}_2$ の場合は例外, [Ara05] 参照). そこで Frenkel-Kac-Wakimoto [FKW92] に従い, 以下に述べる “−”還元関手を用いる.

5.4. $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ のカレント代数と Zhu 代数. $U_k(\widetilde{\mathfrak{g}_{\text{aff}}}) \otimes Cl_{\text{aff}}$ の元 Q_{aff} を次で定める.

$$Q_{\text{aff}} = \sum_{\substack{\alpha \in \Delta_- \\ n \in \mathbb{Z}}} x_\alpha(-n) \psi_\alpha(n) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \in \Delta_- \\ k, l \in \mathbb{Z}}} c_{\alpha, \beta}^\gamma \psi_{-\alpha}(-k) \psi_{-\beta}(-l) \psi_\gamma(k+l) \\ + \sum_{\alpha \in \Delta_-} \chi(x_\alpha) \psi_{-\alpha}(0).$$

($Q_{\text{aff}} = w_0 t_{-\rho^\vee}(Q_{(0)})$) である. ここで, w_0 は W の最長元, $t_{-\rho^\vee}$ は $-\rho^\vee$ に対応する extended Weyl 群の元). すると,

$$(70) \quad Q_{\text{aff}}^2 = 0, \quad \text{従って} \quad (\text{ad } Q_{\text{aff}})^2 = 0$$

が成立する. また Q_{aff} は $U_k(\widetilde{\mathfrak{g}_{\text{aff}}}) \otimes Cl_{\text{aff}}$ の (本来の) 次数付けと整合的である²³.

定理 5.4 ([Ara07b]). 任意の $k \in \mathbb{C}$ に付いて以下が成立する.

- (i) $\mathcal{U}(\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})) \cong H^0(U_k(\widetilde{\mathfrak{g}_{\text{aff}}}) \otimes Cl_{\text{aff}}, \text{ad } Q_{\text{aff}})$
- (ii) $\text{Zh}(\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})) \cong H^0(U(\mathfrak{g}) \otimes Cl, \text{ad } Q) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}).$

定理 5.4 (ii) より $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ は $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ のカイラリゼーションである. よって, 定理 3.11 より, $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ の既約な positive energy representation の同型と $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ の中心指標とは一対一に対応している. 中心指標 γ に対応する $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ の既約表現を $\mathbf{L}(\gamma)$ と書く. $k = -h^\vee$ の時は $\mathbf{L}(\gamma)$ は常に一次元であるが, それ以外のほとんどの場合, $\mathbf{L}(\gamma)$ は無限次元表現である.

5.5. “−”還元関手. $M \in \mathcal{O}_{\text{aff}}^k$ とすると $M \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2} + \bullet}$ は自然に $U_k(\widetilde{\mathfrak{g}_{\text{aff}}}) \otimes Cl_{\text{aff}}$ 加群になり,

$$(71) \quad Q_{\text{aff}} \cdot (M \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2} + i}) \subset M \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2} + i - 1}, \quad Q_{\text{aff}}^2 = 0$$

が成立する. したがって, 定理 5.4 (i) より,

$$(72) \quad H_\bullet(M \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2} + \bullet}, Q_{\text{aff}})$$

は $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ 加群の構造を持つ. 一方, 定義により,

$$(73) \quad H_\bullet(M \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2} + \bullet}, Q_{\text{aff}}) = H_{\frac{\infty}{2} + \bullet}(\mathfrak{n}_-[t, t^{-1}], M \otimes \mathbb{C}_{\chi_{\text{aff}}^-})$$

である²⁴. ここで, χ_{aff}^- は

$$\chi_{\text{aff}}^-(x_{-\alpha}(n)) = \delta_{n,0} \chi(x_\alpha)$$

で定義される $\mathfrak{n}_-[t, t^{-1}]$ の指標である. 従って対応 $M \mapsto H_{\frac{\infty}{2} + \bullet}(\mathfrak{n}_-[t, t^{-1}], M \otimes \mathbb{C}_{\chi_{\text{aff}}^-})$ は $\mathcal{O}_{\text{aff}}^k$ から $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ -Mod への関手を与える. これを “−”還元関手と呼ぶ. “+”還元関手と異なり, “−”還元関手は次数付け作用素 D と整合的である.

²³というより, そうなるように $Q_{(0)}$ を変換した.

²⁴semi-infinite cohomology と semi-infinite homology の違いは単に grading の向きだけである.

5.6. $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ の既約表現の指標. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ について, $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ を $\mathfrak{g}$ の Verma 加群とし, $\gamma_{\bar{\lambda}} : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$ を $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ での evaluation とする.

定理 5.5 ([Ara07b]). 任意の $k \in \mathbb{C}$ について次が成立する.

(i) $\mathcal{O}_{\text{aff}}^k$ の全ての対象 M について,

$$H_{\frac{\infty}{2}+i}(\mathfrak{n}_-[t, t^{-1}], M \otimes \mathbb{C}_{\chi_{\text{aff}}^-}) = 0 \quad (i \neq 0).$$

(ii) レベル k のウエイト $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{aff}}^*$ について

$$H_{\frac{\infty}{2}+i}(\mathfrak{n}_-[t, t^{-1}], M \otimes \mathbb{C}_{\chi_{\text{aff}}^-}) = \begin{cases} \mathbf{L}(\gamma_{\bar{\lambda}}) & \bar{\lambda} \text{ が anti-dominant の時}^{25} \\ 0 & \text{それ以外の時.} \end{cases}$$

注意 5.6. $\bar{\lambda}$ が $\mathfrak{g}$ のウエイトとして anti-dominant であることは, λ が $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ のウエイトとして generic であることを (全く!) 意味しない (§5.7 参照).

γ を $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ の任意の中心指標とすると, $\gamma = \gamma_{\bar{\lambda}}$ なる anti-dominant な $\bar{\lambda} \in \mathfrak{h}^*$ が存在する. $\lambda = \bar{\lambda} + k\Lambda_0$ とすれば, 定理 5.5 (iii) より $\mathbf{L}(\gamma_{\bar{\lambda}}) = H_{\frac{\infty}{2}+0}(\mathfrak{n}_-[t, t^{-1}], L(\lambda) \otimes \mathbb{C}_{\chi_{\text{aff}}^-})$ である. 故に $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ の任意の既約最高ウエイト表現は “—” 還元関手の像として得られる.

$L(\lambda)$ の指標は

$$(74) \quad \text{ch } L(\lambda) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} [L(\lambda) : M(\mu)] \text{ch } M(\mu), \quad [L(\lambda) : M(\mu)] \in \mathbb{Z}$$

と表されるが, Euler-Poincare の原理を用いると, 定理 5.5 (i) より

$$(75) \quad \text{ch } \mathbf{L}(\gamma_{\bar{\lambda}}) = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} (1 - q^i)^{\ell}} \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} [L(\lambda) : M(\mu)] q^{\langle \mu, D \rangle}$$

が成立することがわかる. ただし $\text{ch } \mathbf{L}(\gamma) = \text{tr}_{\mathbf{L}(\gamma)} q^{H_{\text{new}}}$.

$k \neq -h^\vee$ の時, 係数 $[L(\lambda) : M(\mu)]$ は柏原・谷崎により完全に (Kazhdan-Lusztig 多項式を用いて) 決定されている ([KT00]). したがって (75) は $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ の全ての最高ウエイト既約表現の指標公式を与える.

注意 5.7. 臨界レベルのときは, (75) を用いて林 [Hay88] によって証明されたアフィン Lie 環に対する Kac-Kazhdan 予想 [KK79] の簡易な別証明を与えることができる ([Ara06]).

5.7. Frenkel-Kac-Wakimoto の予想について. 以下, レベルは臨界レベルではないと仮定する.

アフィン Lie 環 $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ の表現の中で, 最も性質のものは可積分表現といって良いだろう. しかし, 定理 5.5 によれば, “—” 還元関手は可積分表現を零に送る.

可積分表現の次に性質の良い表現は Kac-Wakimoto 許容表現である. Kac-Wakimoto 許容表現はその指標が $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変性を持つという著しい性質を持ち, またこの性質によって特徴付けされると予想されている ([KW89]).

定義 5.8. $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{aff}}^*$ は次を満たすとき, 主許容ウエイトであると呼ばれる.

(i) λ は regular dominant である. すなわち, $\langle \lambda + \rho_{\text{aff}}, \alpha^\vee \rangle \notin 0, -1, -2, \dots$, $(\forall \alpha \in \Delta_{\text{aff},+}^{\text{re}})$.

(ii) λ の integral root system $\Delta(\lambda)$ は $\mathfrak{g}$ の root system に同型である:

$$\Delta(\lambda) = \{\alpha \in \Delta_{\text{aff}}^{\text{re}}; \langle \lambda + \rho_{\text{aff}}, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\} \cong \Delta_{\text{aff}}^{\text{re}}.$$

勿論, 支配的整ウエイトは主許容ウエイトである.

Kac-Wakimoto [KW89] により, レベル k の主許容ウエイトが存在するための必要十分条件は

$$(76) \quad k + h^\vee = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}_{>0}, \quad p, q \geq 1, \quad (p, q) = 1, \quad p \geq h^\vee, \quad (q, r^\vee) = 1$$

であることが知られている. また $\bar{\lambda}$ が anti-dominant になるような主許容ウエイトが存在するための必要十分条件は, (76) に条件

$$(77) \quad q \geq h = \mathfrak{g} \text{ の Coxeter 数}$$

が加えられることで与えられる.

λ が主許容ウエイトであれば,

$$(78) \quad \text{ch } L(\lambda) = \sum_{w \in W(\lambda)} (-1)^{\ell(w)} \frac{e^{w \circ \lambda}}{\prod_{\alpha \in \Delta_{\text{aff}}} (1 - e^{-\alpha})^{\dim(\mathfrak{g}_{\text{aff}})_\alpha}}$$

であり, λ の integral Weyl group $W(\lambda) = \langle s_\alpha; \alpha \in \Delta(\lambda) \rangle$ は $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ のワイル群 W_{aff} に同型である. このことから, 主許容表現の指標の $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変性が示される.

(75,78) より, $\bar{\lambda}$ が anti-dominant な主許容ウエイト λ に対し,

$$(79) \quad \text{ch } L(\gamma_{\bar{\lambda}}) = \frac{\sum_{w \in W(\lambda)} (-1)^{\ell(w)} q^{\langle w \circ \lambda, D \rangle}}{\prod_{i \geq 1} (1 - q^i)^\ell}$$

が成立し, 指標は $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変性を持つ.

Frenkel-Kac-Wakimoto [FKW92] は, 主許容ウエイト λ に対してコホモロジーの消滅 $H_{\frac{\infty}{2}+i}(\bar{\mathfrak{n}}_-[t, t^{-1}], L(\lambda) \otimes \mathbb{C}_{\chi_{\text{aff}}^-}) = 0$ ($i \neq 0$) と $H_{\frac{\infty}{2}+0}(\bar{\mathfrak{n}}_-[t, t^{-1}], L(\lambda) \otimes \mathbb{C}_{\chi_{\text{aff}}^-})$ の既約性を予想し, $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変な $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ の既約表現の存在を予想したのであった.

注意 5.9. $\mathfrak{sl}_2$ の場合はこれらは (一般にはユニタリーとは限らない) Virasoro 代数の極小系列表現である.

5.8. 他の冪零軌道に付随する W 代数について. はじめに述べたように, W 代数は $\mathfrak{g}$ とその冪零軌道 $\mathbb{O}$ に付随して定義される. 上記 $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g})$ は $\mathbb{O}$ が主冪零軌道の場合の W 代数である. $\mathbb{O}$ を一般とし, $e \in \mathbb{O}$, $\{e, h, f\}$ を $\mathfrak{sl}_2$ トリプルとすると, 対応する $\mathscr{W}$ 代数 $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, \mathbb{O})$ は

$$(80) \quad \text{gr } \mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, \mathbb{O}) \cong \mathbb{C}[(f + \mathfrak{g}^e)_\infty]$$

を満たす.

表現論は $\mathbb{O}$ が極小冪零軌道の場合が最も簡単である ([Ara05] 参照). このときは $\mathfrak{g}$ がスーパーでも全く問題がない²⁶.

軌道が Richardson の時は, 松本 [Mat90] の結果を用いることができ, このことから議論は主冪零軌道の場合とほぼ平行でありであることがわかる. ただし, 結果は有限 W 代数の表現論に依存する. 有限 W 代数の表現論が「完全に」わかっているのは A 型の場合のみ ([BK05]) なので, アフィン W 代数に関する結果もこの場合が最も良い. このときは臨界レベル以外の (ハミルトニアン全ての固有空間が有限次元であるような) 全ての既約最高ウエイト表現の指標を決定することができる.

Richardson でないときが一番難しく, 現時点では (少なくとも筆者には) よくわからない. ただし, 有限 W 代数の表現論が急速に進歩している ([Pre06, Los07]) ので, 今後の進展に関しては筆者は楽観的である.

²⁶[Ara05] の結果のスーパー Lie 環の表現論への応用については [GK07] がある.

REFERENCES

- [Ara05] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of superconformal algebras and the Kac-Roan-Wakimoto conjecture. *Duke Math. J.*, 130(3):435–478, 2005.
- [Ara06] Tomoyuki Arakawa. A new proof of the Kac-Kazhdan conjecture. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 27091, 5, 2006.
- [Ara07a] Tomoyuki Arakawa. Characters of representations of affine Kac-Moody Lie algebras at the critical level. *preprint*, 2007. arXiv:0706.1817v2[math.AQ].
- [Ara07b] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of W -algebras. *Invent. Math.*, 169(2):219–320, 2007.
- [BD] A. Beilinson and V. Drinfeld. Quantization of Hitchin’s integral system and hecke eigen-sheaves. *preprint*.
- [BD05] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld. *Ops.* *preprint*, 2005. arXiv:math/0501398v1 [math.AG].
- [BK05] Jonathan Brundan and Alexander Kleshchev. Representations of shifted Yangians and finite W -algebras. *preprint*, 2005. math.RT/0508003, to appear in Mem. Amer. Math. Soc.
- [BK06] Jonathan Brundan and Alexander Kleshchev. Shifted Yangians and finite W -algebras. *Adv. Math.*, 200(1):136–195, 2006.
- [BMP96] Peter Bouwknegt, Jim McCarthy, and Krzysztof Pilch. *The W_3 algebra*, volume 42 of *Lecture Notes in Physics. New Series m: Monographs*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Modules, semi-infinite cohomology and BV algebras.
- [Bor86] Richard E. Borcherds. Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 83(10):3068–3071, 1986.
- [BS95] P. Bouwknegt and K. Schoutens, editors. *W -symmetry*, volume 22 of *Advanced Series in Mathematical Physics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1995.
- [dBT93] Jan de Boer and Tjark Tjin. Quantization and representation theory of finite W algebras. *Comm. Math. Phys.*, 158(3):485–516, 1993.
- [DSK06] Alberto De Sole and Victor G. Kac. Finite vs affine W -algebras. *Japan. J. Math.*, 1(1):137–261, 2006.
- [FBZ04] Edward Frenkel and David Ben-Zvi. *Vertex algebras and algebraic curves*, volume 88 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2004.
- [Fei84] B. L. Feigin. Semi-infinite homology of Lie, Kac-Moody and Virasoro algebras. *Uspekhi Mat. Nauk*, 39(2(236)):195–196, 1984.
- [FF90] Boris Feigin and Edward Frenkel. Quantization of the Drinfel’d-Sokolov reduction. *Phys. Lett. B*, 246(1-2):75–81, 1990.
- [FF92] Boris Feigin and Edward Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel’fand-Dikiĭ algebras. In *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, volume 16 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 197–215. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.
- [FKW92] Edward Frenkel, Victor Kac, and Minoru Wakimoto. Characters and fusion rules for W -algebras via quantized Drinfel’d-Sokolov reduction. *Comm. Math. Phys.*, 147(2):295–328, 1992.
- [FL88] V. A. Fateev and S. L. Lykhanov. The models of two-dimensional conformal quantum field theory with $Z_{\bar{n}}$ symmetry. *Internat. J. Modern Phys. A*, 3(2):507–520, 1988.
- [Fre07] Edward Frenkel. *Langlands correspondence for loop groups*, volume 103 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [FZ92] Igor B. Frenkel and Yongchang Zhu. Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras. *Duke Math. J.*, 66(1):123–168, 1992.
- [GG02] Wee Liang Gan and Victor Ginzburg. Quantization of Slodowy slices. *Int. Math. Res. Not.*, (5):243–255, 2002.
- [GK07] Maria Gorelik and Victor Kac. On simplicity of vacuum modules. *Adv. Math.*, 211(2):621–677, 2007.
- [Hay88] Takahiro Hayashi. Sugawara operators and Kac-Kazhdan conjecture. *Invent. Math.*, 94(1):13–52, 1988.
- [Kac98] Victor Kac. *Vertex algebras for beginners*, volume 10 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 1998.

- [KK79] V. G. Kac and D. A. Kazhdan. Structure of representations with highest weight of infinite-dimensional Lie algebras. *Adv. in Math.*, 34(1):97–108, 1979.
- [Kos78] Bertram Kostant. On Whittaker vectors and representation theory. *Invent. Math.*, 48(2):101–184, 1978.
- [KRW03] Victor Kac, Shi-Shyr Roan, and Minoru Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.
- [KS87] Bertram Kostant and Shlomo Sternberg. Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite-dimensional Clifford algebras. *Ann. Physics*, 176(1):49–113, 1987.
- [KT00] Masaki Kashiwara and Toshiyuki Tanisaki. Characters of irreducible modules with non-critical highest weights over affine Lie algebras. In *Representations and quantizations (Shanghai, 1998)*, pages 275–296. China High. Educ. Press, Beijing, 2000.
- [KW89] V. G. Kac and M. Wakimoto. Classification of modular invariant representations of affine algebras. In *Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)*, volume 7 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 138–177. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.
- [Li96] Hai-Sheng Li. Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules. *J. Pure Appl. Algebra*, 109(2):143–195, 1996.
- [Li04] Haisheng Li. Vertex algebras and vertex Poisson algebras. *Commun. Contemp. Math.*, 6(1):61–110, 2004.
- [Los07] Ivan V. Losev. Quantized symplectic actions and W-algebras. *preprint*, 2007. arXiv:0707.3108v2[math.RT].
- [Lyn79] T. E. Lynch. *Generalized Whittaker vectors and representation theory*. PhD thesis, M.I.T., 1979.
- [Mat90] Hisayosi Matumoto. Whittaker modules associated with highest weight modules. *Duke Math. J.*, 60(1):59–113, 1990.
- [MN99] Atsushi Matsuo and Kiyokazu Nagatomo. *Axioms for a vertex algebra and the locality of quantum fields*, volume 4 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1999.
- [MNT05] Atsushi Matsuo, Kiyokazu Nagatomo, and Akihiro Tsuchiya. Quasi-finite algebras graded by Hamiltonian and vertex operator algebras. math.QA/0505071, 2005.
- [NT05] Kiyokazu Nagatomo and Akihiro Tsuchiya. Conformal field theories associated to regular chiral vertex operator algebras. I. Theories over the projective line. *Duke Math. J.*, 128(3):393–471, 2005.
- [Pre02] Alexander Premet. Special transverse slices and their enveloping algebras. *Adv. Math.*, 170(1):1–55, 2002. With an appendix by Serge Skryabin.
- [Pre06] Alexander Premet. Primitive ideals, non-restricted representations and finite W-algebras. *preprint*, 2006. arXiv:math/0612465v2[math.RT].
- [Zam85] A. B. Zamolodchikov. Infinite extra symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory. *Teoret. Mat. Fiz.*, 65(3):347–359, 1985.
- [Zhu96] Yongchang Zhu. Modular invariance of characters of vertex operator algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1):237–302, 1996.