

固有な作用の一様連続性について

京都大学数理解析研究所 COE 研究員 吉野太郎

Abstract

非コンパクト群の作用のうち「固有な作用」は良い振る舞いをする事が知られている。不連続群論や Clifford-Klein 形の研究においては、与えられた作用が固有であるか否かを判定することは重要な問題である。しかし、定義自体は簡単であるにもかかわらず、固有性の判定は一般には難しい。従って、適当な設定下で作用の固有性がより弱い条件 (例えば (CI) 条件や弱固有性) に帰着できることが言えれば有益だろう。

そのような判定条件を探すために、この講演では、作用の固有性と弱固有性との「差」について考えたい。そして、その「差」は一様連続性という条件により記述できることを見る。ベキ零リー群の作用について (CI) 条件が固有性を導くだろうという Lipsman の予想に反例が見つかった一方で、(CI) 条件が弱固有性を導くことが示されたのは、この「差」が表に現れた典型例と言える。

1 背景

位相群 G の位相空間 X への作用が固有 (定義 8) であるとき、その商空間 $G \backslash X$ は「きれいな」空間となることが知られている。例えば:

事実 1. (1) 位相群 G の Hausdorff 空間 X への連続な作用が固有ならば、商空間 $G \backslash X$ も Hausdorff となる。

(2) リー群 G の多様体 M への可微分な作用が固有ならば、商空間 $G \backslash M$ も自然に多様体の構造を持つ。

また、固有な作用は固有不連続な作用の自然な一般化である。その為、与えられた作用の固有性を判定することや、与えられた空間に固有に作用する群を見付けることは、Clifford-Klein 形や不連続群の研究において重要な問題である。

作用の固有性の判定に関しては、作用が等長的である場合とそうでない場合とにおいて大きく事情が異なる。実際、等長作用の場合には、固定点自由かつ軌道が閉集合となれば自動的に固有となるのに対し、等長的でない場合には、この限りでない。そして、等長的でない作用について、その固有性を判定することは一般には難しい問題である。

従って、もし何らかの設定下で作用の固有性をより弱い条件に帰着することができれば判定条件として役立つだろう。例えば、[Kb89] において示された次の定理は、作用の固有性を (CI) 条件 (定義 8) に帰着するものであり、その後の不連続群論の発展の出発点となった。

定理 2. G を簡約リー群とし、 L, H をその簡約部分群とする。このとき、 L の G/H への作用が固有であることと、その作用が (CI) 条件を満たすことは同値である。

一方、Lipsman は同様の事が G がベキ零リー群である場合にも言えるだろうと考え、次のような予想を立てた。

予想 3. G を連結かつ単連結なベキ零リー群とし、 L, H をその閉部分群とする。このとき、 L の G/H への作用が固有であることと、その作用が (CI) 条件を満たすことは同値であろう。

しかし、この予想には反例があり ([Y05])、 G がベキ零の場合には、(CI) 条件は固有性より真に弱い条件となってしまう。

Baklouti-Khlif は、[BK06] において**弱固有** (定義 8) という概念を導入し、次のように、「固有」を「弱固有」と置き換えれば Lipsman 予想が成り立つ事を示した。

定理 4. G を連結かつ単連結なベキ零リー群とし、 L, H をその閉部分群とする。このとき、 L の G/H への作用が弱固有であることと、その作用が (CI) 条件を満たすことは同値である。

2 主結果

この講演では、[BK06] により導入された「弱固有」という条件はどんな条件なのか、そして固有と弱固有との「差」は何なのか、について考えたい。主結果は次の二つである。

定理 A. 可分な局所コンパクト群 G が局所コンパクト空間 X に連続に作用しているとき、次は同値である。

- (i) G の作用は弱固有である。
- (ii) G の作用は (CI) 条件を満たし、すべての軌道が閉集合である。

定理 B. 局所コンパクト群 G がパラコンパクトな局所コンパクト空間 X に連続に作用しているとし、商空間 $G \backslash X$ もパラコンパクトであるとする。このとき、次は同値である。

- (i) G の作用は固有である。
- (ii) G の作用は弱固有で、 G の作用が一様連続となるように X に一様構造を入れることができる。

定理 A は、「軌道が閉なら固有」という等長かつ固定点自由な作用において成り立った命題が、「固有」を「弱固有」に置き換える事で、等長でない場合でも成り立つ事を言っている。実際、固定点自由な作用は常に (CI) 条件を満たすので、定理 A の系として次が分かる。

系 5. 可分な局所コンパクト群 G が局所コンパクト空間 X に連続かつ固定点自由に作用しているならば、作用が弱固有となる必要十分条件は全ての軌道が閉集合となることである。

定理 B は、等長とは限らない一般の作用において、固有と弱固有の「差」は一様連続性であると言っている。そして、これまで挙げたいくつかの結果や予想は、固有と弱固有の「差」という視点からは、次のように解釈し直すことができる。

(a) 等長な作用は常に一様連続であるから、その差は無い。(b) 定理 2 の設定下では、弱固有な作用は自動的に一様連続になり、その差が表に現れない。(c) 予想 3 の設定下では、弱固有かつ一様連続でない作用が存在し、差が表に現れる。そして、それゆえに予想は成立しない。

3 準備

以下では定理 A と定理 B に証明を与える。これ以降、常に次のような設定を考えることにする。

設定 6. 局所コンパクト群 G が局所コンパクト空間 X へ連続に作用しているとする。

このとき自然に定まる商写像を

$$\pi : X \rightarrow G \backslash X$$

とする。 $x \in X$ に対して G の x を通る軌道を $G \cdot x := \{gx \in X : g \in G\}$ 、 x を固定する G の固定部分群を $G_x := \{g \in G : gx = x\}$ と記すことにする。そして、自然に定まる連続な全射を

$$T_x : G \rightarrow G \cdot x, \quad g \mapsto gx$$

と書き、さらに T_x から自然に定まる連続な全単射を

$$\tilde{T}_x : G/G_x \rightarrow G \cdot x$$

と書くことにする。

G の作用の固有性、弱固有性そして (CI) 条件を定義するために、 X の部分集合 U, V に対し、 G の部分集合を次のように定める。

$$G_{U \rightarrow V} := \{g \in G : gU \cap V \neq \emptyset\}$$

ここで、特に U が一点 x のみからなる場合、 $G_{\{x\} \rightarrow V}$ の代わりに $G_{x \rightarrow V}$ と書くことにする。このとき、次の性質は定義よりすぐに分かる。

性質 7. 部分集合 $U, V \subset X$ に対し、

- (1) $(G_{U \rightarrow V})^{-1} = G_{V \rightarrow U}$.
- (2) $G_{g_1 U \rightarrow g_2 V} = g_2 (G_{U \rightarrow V}) g_1^{-1}$.

この記号を用いて、作用の固有性、弱固有性、(CI) 条件を定義しよう。

定義 8. 設定 6 のもとで、次のように定義する。

- (1) 作用が固有 $\stackrel{\text{def}}{\iff} X$ の任意の 2 点 x, y に対し、それらの近傍 U, V を $G_{U \rightarrow V}$ が相対コンパクトになるようにとれる。
- (2) 作用が弱固有 $\stackrel{\text{def}}{\iff} X$ の任意の 2 点 x, y に対し、 y の近傍 V を $G_{x \rightarrow V}$ が相対コンパクトになるようにとれる。
- (3) 作用が (CI) 条件を満たす $\stackrel{\text{def}}{\iff} X$ の任意の点 x に対し、固定部分群 G_x はコンパクトとなる。

注 9. これら三条件の間には次のような関係がある:

$$\text{固有} \Rightarrow \text{弱固有} \Rightarrow \text{(CI) 条件.}$$

一般の設定下では、これらの条件は左隣の条件より真に弱い、(定理 2 のように) 特別な場合にはこれらが同値になり得ることが知られている。

4 定理 A の証明

この節では定理 A を証明する。定理 A は次の事実と命題から導かれるので、命題 11 に証明を与えよう。

事実 10. 可分な局所コンパクト群 G が局所コンパクト空間 X に連続に作用しているとする。点 $x \in X$ に対して、軌道 $G \cdot x$ が閉集合なら自然な写像 $G/G_x \rightarrow G \cdot x$ は同相写像である。

命題 11. 設定 6 の下で、次は同値である。

- (i) 作用は弱固有である。
- (ii) 作用は (CI) 条件を満たし、軌道は閉集合であり、写像 $G/G_x \rightarrow G \cdot x$ は同相写像となる。

Proof. (i) \Rightarrow (ii). (CI) 条件を満たすことは、注 9 より分かる。 $\tilde{T}_x : G/G_x \rightarrow G \cdot x$ は連続な全単射なので、 \tilde{T}_x が閉写像であることを言えば、 $G \cdot x$ が閉集合となり、かつ \tilde{T}_x が同相写像であることが言える。いま、作用の弱固有性より、 $T_x : G \rightarrow G \cdot x$ は固有写像であり、従って閉写像である。よって、 \tilde{T}_x も閉写像である。以上より (ii) が示された。

(ii) \Rightarrow (i). $x, y \in X$ を任意にとり、次のように場合分けする。

(Case 1) $G \cdot x \neq G \cdot y$ のとき。

$V := X - (G \cdot x)$ とおけば、 V は y の開近傍で、 $G_{x \rightarrow V} = \emptyset$ となる。

(Case 2) $G \cdot x = G \cdot y$ のとき。

$g \in G$ を $gx = y$ となるように選び、相対コンパクトな g の開近傍 $U \subset G$ を一つとる。 \tilde{T}_x は同相写像なので、 $U \cdot x$ は $G \cdot x$ の開集合である。即ち、 g の開近傍 $V \subset X$ を $U \cdot x = G \cdot x \cap V$ となるようにとる事ができる。このとき、 $G_{x \rightarrow V} = UG_x$ となり、右辺は相対コンパクトである。

従って、いずれの場合にも $G_{x \rightarrow V}$ が相対コンパクトになるように y の開近傍 V を選ぶことができ、 G の作用は弱固有であることが分かる。 ■

5 一様構造

一様連続性や完備性などは、距離空間では考えられるが、一般の位相空間では考えられない概念である。一様空間とは、これらの概念を距離空間より一般の位相空間で考えられるように導入された概念である。

そこで、空間の一様構造を定義したうえで、作用の一様連続性を定義しよう。

定義 12. 集合 X の直積 $X \times X$ の部分集合の空でない族 \mathcal{U} が (1)-(5) の条件を満たすとき、 \mathcal{U} を X の一様構造といい、一様構造を持った集合を一様空間という。

- (1) $U \in \mathcal{U}, U \subset V$ ならば $V \in \mathcal{U}$.
- (2) $U, V \in \mathcal{U}$ ならば $U \cap V \in \mathcal{U}$.
- (3) $U \in \mathcal{U}$ ならば $\Delta \subset U$.
- (4) $U \in \mathcal{U}$ ならば $U^{-1} \in \mathcal{U}$.
- (5) $U \in \mathcal{U}$ ならば $V \in \mathcal{U}$ が存在して $V \circ V \subset U$ とできる。

ただし、 $U, V \subset X \times X$ としたとき、 $\Delta, U^{-1}, U \circ V$ は次のように定義する。

$$\Delta := \text{diag}(X).$$

$$U^{-1} := \{(y, x) \in X \times X : (x, y) \in U\}.$$

$$U \circ V := \{(x, y) \in X \times X : z \in X \text{ が存在して、 } (x, z) \in U, (z, y) \in V\}.$$

また、 $x \in X$ と $U \subset X \times X$ に対して、

$$U(x) := \{y \in X : (x, y) \in U\}$$

と定める。この記号を用いると、

$$U \circ V = \{(x, y) \in X \times X : U(x) \cap V^{-1}(y) \neq \emptyset\}$$

と書くこともできる。

一様空間 (X, \mathcal{U}) の元 $x \in X$ に対して、 $\{U(x) : U \in \mathcal{U}\}$ は x の近傍系の公理を満たし、これにより X には位相が定まる。

定義 13. 上記の位相を X の**一様位相**という。また特に X が元々位相空間であり、その位相が一様位相と一致するならば、一様構造 \mathcal{U} は位相空間 X と**互換**であるという。

定義 14. 位相群 G が一様空間 (X, \mathcal{U}) に作用しているとする。作用が**一様連続**であるとは、作用が連続であり、次を満たすことをいう。任意の $U \in \mathcal{U}$ に対し、 $V \in \mathcal{U}$ が存在して、任意の $x, y \in X$ と任意の $g \in G$ に対して、

$$(x, y) \in V \Rightarrow (gx, gy) \in U.$$

6 十分性の証明

この節と次の節とで定理 B の証明を与える。まず、この節では十分性を示そう。すなわち、次の命題を示す。

命題 15. 設定 6 の下で G の作用が一様連続かつ弱固有ならば、その作用は固有である。

Proof. X の一様構造を \mathcal{U} とし、 $x, y \in X$ を任意にとる。作用の弱固有性より y の近傍 V を $G_{x \rightarrow V}$ が相対コンパクトとなるようにとれる。一様位相と X の位相の互換性から $U_1 \in \mathcal{U}$ を

$$U_1(y) \subset V$$

となるようにとれる。一様位相の公理から、 $U_2 \in \mathcal{U}$ を

$$U_2 \circ U_2 \subset U_1$$

となるようにとれる。一様位相の公理から $U_2^{-1} \in \mathcal{U}$ であり、作用の一様連続性から $U_3 \in \mathcal{U}$ を

$$(a, b) \in U_3 \Rightarrow (ga, gb) \in U_2^{-1}$$

が任意の $a, b \in X$ と任意の $g \in G$ に対し成り立つようにとれる。一様位相と X の位相の互換性から

$$V_x := U_3(x), \quad V_y := U_2(y)$$

はそれぞれ x, y の近傍となる。そこで、次の Claim を示せば $G_{V_x \rightarrow V_y}$ は相対コンパクトとなり、作用が固有であることが言える。

Claim: $G_{V_x \rightarrow V_y} \subset G_{x \rightarrow y}$.

あとは、この Claim を示せばよい。そのためにまず次の Subclaim を示そう。

Subclaim: $gU_3(x) \subset U_2^{-1}(gx)$.

この Subclaim は次から分かる: $z \in X$ に対して、

$$\begin{aligned} z \in gU_3(x) &\Leftrightarrow g^{-1}z \in U_3(x) \\ &\Leftrightarrow (x, g^{-1}z) \in U_3 \\ &\Rightarrow (gx, z) \in U_2^{-1} \\ &\Leftrightarrow z \in U_2^{-1}(gx). \end{aligned}$$

これを用いると Claim は次から分かる。

$$\begin{aligned} g \in G_{V_x \rightarrow V_y} &\Leftrightarrow gU_3(x) \cap U_2(y) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow U_2^{-1}(gx) \cap U_2(y) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow (y, gx) \in U_1 \\ &\Leftrightarrow gx \in U_1(y) \\ &\Rightarrow gx \in V_1 \\ &\Leftrightarrow g \in G_{x \rightarrow V_1}. \end{aligned}$$

これより Claim が分かり、従って命題 15 が証明できた。 ■

7 必要性の証明

この節では定理 B の必要性、すなわち次の命題を示す。

命題 16. 設定 6 の下で、さらに X と商空間 $G \backslash X$ がパラコンパクトであると仮定する。このとき、 G の作用が固有ならば、その作用が一様連続となるような一様構造を X に定める事ができる。

まず、証明の方針について簡単に触れたい。実は、単に G の作用が一様連続となるような X の一様構造を考えるだけならば、その存在は容易に示せる。これは、商空間 $G \backslash X$ の適当な一様構造を商写像 π で引き戻せばよい。しかし、この一様構造から定まる X の位相は元の位相より弱くなってしまい、一般に互換では無い。

逆に、 G の作用の一様連続性を要請しなければ、 X の位相と互換な一様構造の存在自体もまた容易に言える。いま、 X の位相と互換な一様構造を \mathcal{U} とする。ここで、近縁 $U \in \mathcal{U}$ を G 方向に「平均化」する、即ち

$$U'(x) := \bigcap_{g \in G} U(gx)$$

とおき、このような U' から得られる一様構造を \mathcal{U}' とすると、 G の作用は \mathcal{U}' の元で一様連続となるが、 \mathcal{U}' から定まる位相は X の元の位相より強くなってしまふ。

このディレンマから逃れるために、 U の「平均化」を G 全体で行うのではなく、 G のコンパクト部分集合でのみ行う事が証明の基本方針となる。コンパクト集合内のみでの平均化は、位相を強くし過ぎることはない。より正確には、次の補題が位相空間の一般論から分かる。

補題 17. X, Y を位相空間とし、 K を X のコンパクト集合、 W を $X \times Y$ の開集合とする。このとき

$$\bigcap_{x \in K} W(x)$$

は Y の開集合である。但し、 $W(x) := \{y \in Y : (x, y) \in W\}$ とする。

Proof. 省略 ■

従って、任意の $x \in X$ に対して、 G のコンパクト部分集合 K_x をうまく対応させ、

$$U'(x) := \bigcap_{g \in K_x} U(gx)$$

とうまく「平均化」することができれば良い。

以下の事実と補題によって存在が保証される $R \subset X$ と $U \subset X \times X$ によって、 $K_x := \overline{G_{x \rightarrow U(R)}}$ とおくと、補題 21 よりこれはコンパクトとなる。命題 16 の証明はコンパクト集合 K_x 上での平均を考えることに本質的には等しい。これらの補題の証明は省略し、最後に命題 16 を証明しよう。

事実 18 ([Ks65]). 命題 16 と同じ仮定の下で、 G の作用が固有ならば次の性質を満たす部分集合 $R \subset X$ が存在する。

- (a) $GR = X$.
- (b) 任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して、 $G_{K \rightarrow R}$ は相対コンパクト。

補題 19. 命題 16 と同じ仮定の下で、 X に位相と互換な一様構造をうまく定めると、以下の性質を満たす近縁 U が存在する

- (a) 任意のコンパクト集合 $S \subset X$ に対して $U(S)$ は相対コンパクト。
- (b) 任意のコンパクト集合 $T \subset G \setminus X$ に対して $\pi(U(\pi^{-1}(T)))$ は相対コンパクト。

補題 20. U, V を補題 19 の性質を持つ近縁とすると $U \circ V$ もまた同じ性質を満たす。

補題 21. 命題 16 の設定の下、 G の作用が固有であると仮定する。 R を事実 18 のようにとり、 U を補題 19 にある条件を満たす近縁とする。このとき、勝手なコンパクト集合 $K \subset X$ に対して $G_{K \rightarrow U(R)}$ は相対コンパクトである。

命題 16 の証明. R を事実 18 の集合とし、 U_1, U_2 を $X \times X$ の部分集合とする。このとき、 $X \times X$ の部分集合 R_{U_1, U_2} を次のように定義する。

$$R_{U_1, U_2} := \{(x, y) \in X \times X : (gx, gy) \in U_1 \text{ if } gx \in \overline{U_2(R)} \text{ or } gy \in \overline{U_2(R)}\}$$

U を補題 19 の条件を満たす X の一様構造とする。このとき、 X の一様構造を次のように定める。

$$U_R := \{U \subset X \times X : U_1, U_2 \in U \text{ が存在し、} U_2 \text{ は補題 19 の条件を満たし } R_{U_1, U_2} \subset U \text{ とできる}\}$$

ここで、次を確かめれば、命題 16 が言える。

- (I) U_R は一様構造の公理を満たす。
- (II) U_R に関して G の作用は一様連続となる。

(III) \mathcal{U}_R は X の位相と互換である。

以下、これらを順に確かめる。

(I) (1),(2),(3),(4) は明らか。(5) を示す。 $U \in \mathcal{U}_R$ に対して、 $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ を $R_{U_1, U_2} \subset U$ となるように選ぶ。また、 $V_1 \in \mathcal{U}$ を $V_1 \circ V_1 \subset U_1$ であって、補題 19 の条件を満たすようにとり、 $V_2 := V_1 \circ U_2$ とおく。このとき、 V_2 補題 19 の仮定を満たすので、 $V := R_{V_1, V_2} \in \mathcal{U}_R$ とおき、 $V \circ V \subset U$ であることを示せば良い。 $(x, y) \in V \circ V$ とすると、 $z \in X$ が存在して、

$$\begin{aligned} (gx, gz) &\in V_1 \text{ if } gx \in \overline{V_2(R)} \text{ or } gz \in \overline{V_2(R)}, \\ (gz, gy) &\in V_1 \text{ if } gz \in \overline{V_2(R)} \text{ or } gy \in \overline{V_2(R)}. \end{aligned}$$

とできる。一方、 $(x, y) \in U$ を示すには、

$$(gx, gy) \in U_1 \text{ if } gx \in \overline{U_2(R)} \text{ or } gy \in \overline{U_2(R)}$$

を言えばよいが、これは、次のように分かる：今、 $g \in G$ が $gx \in \overline{U_2(R)}$ を満たすとする、 $V_2 = V_1 \circ U_2$ より特に $gx \in \overline{V_2(R)}$ が得られる。従って、 $(gx, gz) \in V_1$ が分かる。よって、 $gz \in V_1(gx) \subset \overline{V_1 \circ U_2(R)} = \overline{V_2(R)}$ となり、 $(gz, gy) \in V_1$ が分かる。これより $gy \in V_1 \circ V_1(gx)$ となり、 $(x, y) \in U$ が言えた。

(II) 勝手な $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ に対し、 R_{U_1, U_2} は定義より G -不変である。従って、 G の作用は \mathcal{U}_R に関して一様連続である。

(III) \mathcal{U}_R の定義から $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_R$ であり、特に \mathcal{U}_R の定める位相は X の位相よりも強い。従って、逆に X の位相が \mathcal{U}_R の定める位相より強いことを言えば十分である。そのためには $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ に対し $U := R_{U_1, U_2}$ とおき、 $x \in X$ に対し、 $U(x)$ が x の近傍であること言えばよい。但し、ここで U は G -不変であり $X = GR$ であるから $x \in R$ のときに示せば十分である。また \mathcal{U} は X の位相と互換であり、従って特に U_1 の内点も \mathcal{U} に属するため、 U_1 を開集合と仮定しても一般性を失わない。このとき、定義から

$$U(x) = \{y \in X : (gx, gy) \in U_1 \text{ if } gx \in \overline{U_2(R)} \text{ or } gy \in \overline{U_2(R)}\}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} U(x) &= P_1 \cap P_2 \\ P_1 &:= \{y \in X : (gx, gy) \in U_1 \text{ if } gx \in \overline{U_2(R)}\} \\ P_2 &:= \{y \in X : (gx, gy) \in U_1 \text{ if } gy \in \overline{U_2(R)}\} \end{aligned}$$

とかける。まず P_1 が開集合であることをいう。いま、

$$\begin{aligned} f_1 : G \times X &\rightarrow X \times X, & (g, y) &\mapsto (gx, gy) \\ Q_1 &:= f_1^{-1}(U_1) \end{aligned}$$

とおけば、 Q_1 は X の開集合である。補題 21 より $G_{x \rightarrow \overline{U_2(R)}}$ はコンパクトであり、従って補題 17 より

$$P_1 = \bigcap_{g \in G_{x \rightarrow \overline{U_2(R)}}} Q_1(g)$$

は X の開集合であることが分かる。一方、

$$f_2 : G \times X \rightarrow X, \quad (g, y) \mapsto gy$$

$$Q_2 := f_2^{-1}(\overline{U_2(R)^c})$$

とおけば、

$$P_2 = \bigcap_{g \in G} (Q_1 \cup Q_2)(g).$$

となる。ここで、 $T := G_{\overline{U_1(x)} \rightarrow \overline{U_2(R)}}$ とおいたとき、次の Claim が言えれば、 $U(x)$ が開集合であると言える。

Claim. $g \in G \setminus T \Rightarrow P_1 \subset Q_2(g)$.

実際、Claim が正しいとすれば、

$$U(x) = P_1 \cap P_2$$

$$= P_1 \cap \left(\bigcap_{g \in T} (Q_1 \cup Q_2)(g) \right)$$

となる。補題 21 より T はコンパクトであり、従って補題 17 より右辺は開集合であることが分かる。

最後に Claim を示す。対偶をとれば結局、

$$y \in P_1, gy \in \overline{U_2(R)} \Rightarrow g \in T$$

を言えば良い。いま、仮定より $x \in R$ かつ $(x, y) \in U$ としていたので、とくに $(x, y) \in U_1$ が分かる。従って、

$$gy \in \overline{U_2(R)} \Rightarrow gU_1(x) \cap \overline{U_2(R)} \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow g \in G_{U_1(x) \rightarrow \overline{U_2(R)}} \subset T$$

より Claim が言えた。以上から、 U_R が X の位相と互換であることが言えた。従って命題 16 が証明できた。■

以上より定理 B が示された。

References

- [BK06] A. BAKLOUTI AND F. KHLIF, *Weak proper actions on solvable homogeneous spaces* (preprint).
- [Kb89] T. KOBAYASHI, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), 249–263.
- [Ks65] J. L. KOSZUL, *Lectures on groups of transformations*. Notes by R. R. Simha and R. Sridharan. Tata Inst. of Fund. Research. Bombay 1965.
- [P73] R. S. PALAIS, *On the existence of slices for actions of noncompact Lie groups*, Ann. of Math. **73** (1961), 295–323.
- [Y05] T. YOSHINO, *A counterexample to Lipsman's conjecture*, Internat. J. Math. **16** (2005), no.5, 561–566.