表現論シンポジウム講演集, 2005
pp.216–217

Rankin-Cohen-Ibukiyama type differential operators from representation theoretic view point

Katsuma BAN*
University of Tokyo

abstract

We outline the representation theoretic framework of Rankin-Cohen-Ibukiyama type differential operators in the case of the double covering of the unitary group $U(p,q)$. In the metaplectic case, this gives a reformulation of an Ibukiyama's result [1].

Siegel 上半空間上の正則保型形式の正則微分は一般には保型性を持たないが，いくつかの保型形式の正則微分たちを組み合わせることで新しい保型形式を作ることができる．典型的なものは Rankin-Cohen 型微分作用素がある．複素上半平面上 $\mathfrak{H}$ 上のウェイト k および l の保型形式 f, g に対し

$$\sum_{s+t=n}(-1)^s\frac{1}{(k)_s(l)_t}\frac{d^sf}{dz^s}\frac{d^tg}{dz^t}\quad \text{ここで } z \text{ は } \mathfrak{H} \text{ の変数，} (k)_s \text{ と } (l)_t \text{ は Pochhammer symbol}$$

はウェイト $k+l+2n$ の保型形式を与える．伊吹山 [1] は Siegel 上半空間上の正則保型形式の場合に新しい保型形式を与える上のような微分作用素を与え（“Case II” の場合），Rankin-Cohen 型微分作用素と言った．伊吹山の論文は柏原-Vergne [2] の metaplectic 群の場合を用いており，他の reductive dual group の場合についても同様の結果が成り立つだろうと述べている．講演者は伊吹山の結果をより**表現論的な枠組み**から捉え直し，その枠組みでユニタリ群の場合に伊吹山の結果に相当する主張が得られることを示した．また，講演者自身は伊吹山の論文に比べ些か議論の見通しがよくなっているものと思っている次第である．

ここではユニタリ群の場合の議論を簡単に説明する．対象とする群は $U(p,q)$ の二重被覆群 G である．$n=p+q$ とし $Mp(n,\mathbf{R})$ を行列サイズ $2n$ の metaplectic 群とする．G の $Mp(n,\mathbf{R})$ への “自然な” 埋め込みを固定する．$Mp(n,\mathbf{R})$ の Weil 表現の G への制限を $(L, L^2(\mathbf{R}^n))$ とおき，その k 階テンソルを $(L_k, L^2(M_{n,k}(\mathbf{R})))$ とする．L_k には $U(k)$ が右正則表現として作用し，この作用は G の作用と可換である．$G\times U(k)$ の joint action で L_k を分解すると，

$$L^2(M_{n,k}(\mathbf{R}))\simeq\bigoplus_{\lambda\in\widehat{U(k)}}L^2(M_{n,k}(\mathbf{R});V_{\lambda^*})\boxtimes V_\lambda \tag{$*$}$$

となる．ここで V_λ は $U(k)$ の最高ウェイト λ の既約表現で，$L^2(M_{n,k}(\mathbf{R});V_{\lambda^*})$ は $M_{n,k}(\mathbf{R})$ 上の V_{λ^*} 値函数 f であって，任意の $c\in U(k)$ に対して $f(xc)=\lambda^*(c)^{-1}f(x)$ を満たすもののなす空間である．この空間には G が作用し，（0 でなければ）最高ウェイト $\tau(\lambda)-\frac{k}{2}\mathbf{1}_{p,q}=(\tau_1-\frac{k}{2}\mathbf{1}_p;\tau_2+\frac{k}{2}\mathbf{1}_q)$ のユニタリ最高ウェイト表現になる[1]．$\tau(\lambda)$ は λ に対して具体的に与えられ，この対応は柏原-Vergne [2] によって与えられている．

$s=1,\ldots,d$ に対して $k_s\geqslant n$ とし，$L^2(M_{n,k_s}(\mathbf{R});V_{-\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_{p,q}})$ を考える．これらは最高ウェイト $-\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_{p,q}$ の正則離散系列表現であり，d 個のウェイト $\frac{k_s}{2}$ の正則保型形式を考えることに対応する．これらの d 個の表現のテンソル積の分解は，$k=k_1+\cdots+k_d$ とすると，

$$\bigoplus_{\lambda\in\widehat{U(k)}}L^2(M_{n,k}(\mathbf{R});V_{\lambda^*})\boxtimes V_\lambda^{U(k_1)\times\cdots\times U(k_d)} \tag{$**$}$$

で与えられる．ここで $U(k_1)\times\cdots\times U(k_d)$ は対角的な埋め込みで $U(k)$ の部分群と同一視している．これは L_{k_s} のテンソル積を L_k と同一視したあと，両辺の $U(k_1)\times\cdots\times U(k_d)$ 不変部分を取れば分かる．$(**)$ に現れる G の表現はすべて正則離散系列になる．この分解より，ウェイト k_s の正則保型形式たちから作られうる正則保型形式のウェイトを見て取ることが出来る．

*ban@ms.u-tokyo.ac.jp

[1]最高 K-type が $\tau_1\boxtimes\tau_2$ で与えられるものを，最高ウェイト $(\tau_1;\tau_2)$ のユニタリ最高ウェイト表現と言うことにする．

目的は保型形式に対する微分作用素を求めることにあったので，$(**)$ に現れる離散系列表現の最高 K-type のベクトルを，元の離散系列表現の最高 K-type のベクトルを用いて記述することを考える．そのためには，Fock 模型を考える．$Mp(n,\mathbf{R})$ の Weil 表現の Harish-Chandra 加群は $\mathbf{C}[a_i;1\leqslant i\leqslant n]$ で与えられる[2]．これを制限して G の表現 L の Harish-Chandra 加群も $\mathbf{C}[a_i;1\leqslant i\leqslant n]$ で与えられ，L_k の Harish-Chandara 加群は $\mathbf{C}[a_{ij};1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant k]$（$F_k$ とおく）で与えられる．ここへの $\mathfrak{g}=\mathfrak{u}(p,q)$ の作用は

$$\begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\sum_{\xi=1}^{k}\left(a_{j\xi}\frac{\partial}{\partial a_{i\xi}}+\frac{1}{2}\delta_{ij}\right) \qquad \begin{pmatrix} 0 & e_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 4\sum_{\xi=1}^{k}\frac{\partial^2}{\partial a_{i\xi}\partial a_{p+j,\xi}}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} & 0 \end{pmatrix} = -\sum_{\xi=1}^{k} a_{p+i,\xi}a_{j\xi} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{ij} \end{pmatrix} = \sum_{\xi=1}^{k}\left(a_{p+j,\xi}\frac{\partial}{\partial a_{p+i,\xi}}+\frac{k}{2}\delta_{ij}\right)$$

で与えられる．よって $\mathfrak{p}_+$ の作用で消えるような F_k の元全体は $U(k)$ 調和多項式のなす空間 $\mathscr{H}_k$ となる．

調和多項式 $\mathscr{H}_k$ には F_k に由来する $U(p)\times U(q)$ および $U(k)$ の作用がある．この joint action に関する $\mathscr{H}_k$ の既約分解は $\bigoplus_{\lambda\in\widehat{U(k)}} U_{\tau(\lambda)-\frac{k}{2}\mathbf{1}_{p,q}}\boxtimes V_\lambda$ で与えられる．λ に対応する既約因子を $\mathscr{H}_k(\lambda)$ とおく．$U_{\tau(\lambda)}$ は $U(p)\times U(q)$ の最高ウェイト $\tau(\lambda)-\frac{k}{2}\mathbf{1}_{p,q}$ の既約表現、V_λ は $U(k)$ の最高ウェイト λ の既約表現である．F_k は $\mathscr{H}_k\cdot F_k^{U(k)}$ と分解し，従って

$$F_k\simeq\bigoplus_{\lambda\in\widehat{U(k)}}(U_{\tau(\lambda)}\cdot F_k^{U(k)})\boxtimes V_\lambda$$

と分解する．これは $(*)$ の分解の無限小バージョンにあたる．

テンソル積の分解に戻る．$L^2(M_{n,k_s}(\mathbf{R});V_{-\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_{p,q}})$ の Harish-Chandra 加群は F_{k_s} の中で $U_{-\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_{p,q}}=\mathbf{C}$ を極大 K-type にもつ．これらの Harish-Chandra 加群のテンソル積は

$$\bigoplus_{\lambda\in\widehat{U(k)}}(U_{\tau(\lambda)}\cdot F_k^{U(k)})\boxtimes V_\lambda^{U(k_1)\times\cdots\times U(k_d)}$$

と分解される（$(**)$ の無限小バージョン）．各等型因子の最大 K-type のベクトル全体は

$$U_{\tau(\lambda)}\boxtimes V_\lambda^{U(k_1)\times\cdots\times U(k_d)}\simeq\mathscr{H}_k(\lambda)^{U(k_1)\times\cdots\times U(k_d)}$$

に他ならない．従って極大 K-type の元は $U(k)$ 調和多項式の空間の $U(k_1)\times\cdots\times U(k_d)$ 不変部分の元として与えられる．この空間の元を f とすると，Fock 模型においては $1\otimes\cdots\otimes 1\mapsto f$ が極大 K-type の元の対応を与えている．これを群レベルで記述すると次のようになる．$h\in\mathscr{H}_k(\lambda)^{U(k_1)\times\cdots\times U(k_d)}$ は $a_{ij}^{(s)}=a_{i,k_1+\cdots+k_{s-1}+j}$ の函数であるが，不変性より $z_{ij}^{(s)}=\sum_{\xi=1}^{k_s}a_{i\xi}^{(s)}a_{j\xi}^{(s)}$ の函数と思える．こう見たものを $\Phi_h(z_{ij}^{(1)},\ldots,z_{ij}^{(d)})$ と書く．

主定理は以下の通りである：

> $s=1,\ldots,d$ に対し f_s を最高ウェイト $-\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_{p,q}$ の正則離散系列表現の最高 K-type のベクトルとする．$h\in\mathscr{H}_k(\lambda)^{U(k_1)\times\cdots\times U(k_d)}$ に対して $\Phi_h(-\pi_{ij}^-,\ldots,-\pi_{ij}^-)(f_1\otimes\cdots\otimes f_d)$（ここで $\pi_{ij}^-\in\mathfrak{p}_-=M_{p,q}(\mathbf{C})$）は最高ウェイト $\tau(\lambda)-\frac{k}{2}\mathbf{1}_{p,q}$ の離散系列表現の最高 K-type のベクトルを与える．逆に，これらのベクトルはこのようにして得られるものに限る．

ここに現れる $\Phi_h(-\pi_{ij}^-,\ldots,-\pi_{ij}^-)$（あるいはこの作用を保型形式の対称領域の変数に関する微分として書き直したもの）が Rankin-Cohen-Ibukiyama 型の微分作用素にあたるものである．これは Φ_h の構成法を与えているが，具体的に Φ_h を書き下すことはまた別の問題である．

[1] T. Ibukiyama, On Differential Operators on Automorphic Forms and Invariant Pluli-harmonic Polynomials, *Comm. Math. Univ. St. Pauli.*, **48** (1999), 103–118.

[2] M. Kashiwara and M. Vergne, On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials, *Invent. Math.*, **44** (1978), 1–47.

[2] $\mathrm{Lie}(Mp(n,\mathbf{R}))$ の作用は省略する．