表現論シンポジウム講演集, 2005
pp.214–215

$G_{\mathbb{C}}$ の multiplicity-free 空間における G_U の visible な作用について

(Visible actions of G_U on multiplicity-free spaces of $G_{\mathbb{C}}$)

笹木 集夢（ATSUMU SASAKI）
早稲田大学大学院理工学研究科 D2

H を Lie 群，D を連結な複素多様体とする．Kobayashi は [2] や [3] で Multiplicity-free Theorem の重要な仮定の１つと関連して次を定義した.

定義 1. H が D に正則に作用しているとする．次の (V.1) と (V.2) を満たす totally real な部分多様体 $S \subset D$ と H-不変な開集合 $D' \subset D$ が存在するとき，この作用を **visible である**という．
(V.1)　S は D' 内のすべての H-軌道と交差する.
(V.2)　任意の $x \in S$ に対して，$J_x(T_xS) \subset T_x(H \cdot x)$ が成り立つ.

例 1. 次に挙げる例はすべて visible な作用である.
(1)　$SL(n,\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^n$ への作用
(2)　$\mathbb{T}^n$ の $\mathbb{C}^n$ への作用
(3)　H の D への正則な作用が推移的であるとき

定義 1 における条件 (V.2) を調べることは一般には容易ではない．そこで，Kobayashi はさらに [3] で次を定義し，定理 3 によって visible な作用かどうかを判定する道具を与えた.

定義 2. H の D への正則な作用に対して (V.1) を満たす S と D' が存在するとする．このとき，次の (S.1) と (S.2) を満たす D' の反正則微分同相 σ が存在するとき，この作用は **strongly visible である**という.
(S.1)　$\sigma|_S = \mathrm{id}_S$
(S.2)　σ は D' 内の各 H-軌道を保つ．つまり，$\sigma(H \cdot z) = H \cdot z$ $(\forall z \in D')$

定理 3 ([3])**.** H の D への正則な作用が strongly visible ならば，その作用は visible である.

さて totally real な部分多様体 S の取り方であるが，例 1 を見ると (1)では $S \cong \mathbb{R}$ に対して (2) では $S = \mathbb{R}^n$ となり，S のとり方に大きな違いが見られる．そこで次の問題が提起される.

問題. S は具体的にどのようにとることができるか．どれだけ S の次元を小さくとることができるか．また，どの程度まで S を簡単に表すことができるか．一般的に S の取り方の構造はどうなっているのか.

例えば３つ組の Lie 群 $L \subset G \supset H$ に対して，「$G = LAH \iff$ 両側剰余類 $L\backslash G/H$ の代表元の集合が A である $\iff L \times H$ の G への作用に関して，A が G 内の各軌道と交差している」という関係がある (cf. [3], [4], [5] など)．その点でも A の決定は重要な問題であり，visible な作用の研究は有用ある.

この問題を研究するために，Kac の multiplicity-free 空間の分類 [1] にある各群を対象に，具体的に S を求めることから始めた．V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，簡約 Lie 群 H が V に作用しているとする．このとき，$\mathbb{C}[V]$ 上に H の表現が自然に定義される．この表現が multiplicity-free であるとき，V を H の multiplicity-free 空間という．Kac [1] は $H = G_{\mathbb{C}}$ で V への作用が既約な場合に分類した．

そこで，[1] の list にある群を $G_{\mathbb{C}}$ とし，S をより具体的に見るため compact な実形 $G_U \subset G_{\mathbb{C}}$ の V への作用を考える．このとき，

$$
\begin{aligned}
(G_{\mathbb{C}}, V) = {} & (SL(n+1,\mathbb{C}), \mathbb{C}^{n+1}),\ (Sp(n,\mathbb{C}), \mathbb{C}^n),\ (SO(n+1,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*, \mathbb{C}^{n+1}),\\
& (GL(n,\mathbb{C}), S^2(\mathbb{C}^n)),\ (SL(2n+1,\mathbb{C}), \textstyle\bigwedge^2(\mathbb{C}^{2n+1})),\ (GL(2n,\mathbb{C}), \textstyle\bigwedge^2(\mathbb{C}^{2n})),\\
& (SL(m,\mathbb{C}) \times SL(n,\mathbb{C}), M(m,n;\mathbb{C})),\ (GL(n,\mathbb{C}) \times SL(n,\mathbb{C}), M(n,\mathbb{C})),\\
& (Spin(7,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*, \mathfrak{C}_{\mathbb{C}}),\ (Spin(9,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*, \mathfrak{J}'_{\mathbb{C}}),\ (Spin(10,\mathbb{C}), \mathfrak{J}'_{\mathbb{C}}),\\
& (G_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*, \mathfrak{C}'_{\mathbb{C}}),\ (E_6(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*, \mathfrak{J}_{\mathbb{C}})
\end{aligned}
$$

の各場合については G_U の V への作用が (strongly) visible であることがわかり，S を具体的に与えることができた．ただし上の list の中で，$m \neq n$，$\mathfrak{C}_{\mathbb{C}}$ を複素 Cayley 代数，$\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}$ を複素例外 Jordan 代数とし，

$$
\mathfrak{C}'_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathfrak{C}_{\mathbb{C}} : \overline{z} = -z\}, \quad \mathfrak{J}'_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_3 & \overline{z_2} \\ \overline{z_3} & 0 & 0 \\ z_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} : z_1, z_2 \in \mathfrak{C}_{\mathbb{C}} \right\}
$$

今回はこの中の１つを例に挙げて，G_U の V への作用が visible になること，またどのようなものが S としてとれるかを紹介したいと思う．

なお，上の $(G_{\mathbb{C}}, V)$ は [1] の list の一部であり，それ以外については現在計算中である．

参考文献

[1] V. G. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, *J. Algebra,* **64** (1980), 190-213

[2] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta. Appl. Math.,* **81** (2004), 129-146

[3] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.,* **41** (2005), no.3, 497-549

[4] T. Kobayashi, Visible actions on complex symmetric spaces, preprint

[5] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)) \backslash U(n) / (U(p) \times U(q))$, preprint