

Ruelle type L -functions for torsion free abelian groups and associated arithmetic functions*

山崎 義徳 (Yoshinori Yamasaki)

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

yamasaki@math.kyushu-u.ac.jp

概要

We introduce Ruelle type L -functions attached to a character for a torsion free abelian group Γ of rank $\nu \geq 2$ defined via an Euler product. It is shown that if the character is trivial, the imaginary axis is a natural boundary of this function when $\nu = 2, 4$ or 8 . We also study an arithmetic function which is naturally arising from the analysis of the L -functions.

種数 g が 2 以上のコンパクト Riemann 面 R は, 複素上半平面 $\mathfrak{H}$ と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ のある (ねじれない双曲的) 離散部分群 Γ を用いて $R = \Gamma \backslash \mathfrak{H}$ と実現される. $\rho: \Gamma \rightarrow U(N)$ を有限次元ユニタリ表現とする. このとき Γ の表現 ρ に付随する Selberg ゼータ関数 $Z_\Gamma(s, \rho)$ が

$$Z_\Gamma(s, \rho) := \prod_{P \in \mathrm{Prim}(\Gamma)} \prod_{n=0}^{\infty} \det(1 - \rho(P)N(P)^{-s-n}) \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

で定義される. ここで $\mathrm{Prim}(\Gamma)$ は Γ の素な (双曲的) 共役類全体であり, $\gamma \in \Gamma$ が素元であるとは $\gamma = \delta^m$ ($\delta \in \Gamma, m \geq 2$) と書けない元のことを言う. また $P \in \mathrm{Prim}(\Gamma)$ に対し, P のノルム $N(P)$ とは, P の固有値の絶対値の小さくない方の平方として定義される (このとき $N(P^m) = N(P)^m$). $Z_\Gamma(s, \rho)$ の緒性質は, 跡公式を用いて調べられる. また, $Z_\Gamma(s, \rho)$ の性質から

$$L_\Gamma(s, \rho) := \frac{Z_\Gamma(s+1, \rho)}{Z_\Gamma(s, \rho)} = \prod_{P \in \mathrm{Prim}(\Gamma)} \det(1 - \rho(P)N(P)^{-s})^{-1} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

で定義される Ruelle 型 L -関数の解析的性質がわかり, さらに, Tauber 型の定理を用いることで “素測地線定理”, つまり与えられた長さ以下の閉測地線の個数の漸近評価 (素数定理の幾何類似) が得られる. この Ruelle 型ゼータ関数の $g = 1$ の場合の類似物, つまり複素トーラスの Ruelle 型ゼータ関数 ($\rho = 1$ の場合) が [KW] において構成された. 本講演では, [KWY] に従い, このトーラスの Ruelle 型ゼータ関数の表現付きの高次元化の構成と, その解析的性質について述べたい.

Γ を階数 $\nu \geq 2$ のねじれない有限生成アーベル群とする. その生成元を $\tau_1, \dots, \tau_\nu$ とすれば, $\Gamma = \mathbb{Z}\tau_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\tau_\nu$ と書ける. Γ の元を $\gamma = \sum_{j=1}^{\nu} n_j \tau_j$ と書くとき, $\mathrm{gcd}(\gamma) := \mathrm{gcd}(n_1, \dots, n_\nu) = 1$ なる元を Γ の素元として定義し, $\mathrm{Prim}(\Gamma)$ で Γ の素元全体を表す. また γ のノルムを $N(\gamma) := e^{\ell(\gamma)}$ ($\ell(\gamma) := \sqrt{n_1^2 + \dots + n_\nu^2}$) で定義する. このとき Γ の任意の元は $\gamma = d\mathbf{p}$ ($d > 0, \mathbf{p} \in \mathrm{Prim}(\Gamma)$) と一意的に書け, $N(\gamma) = N(\mathbf{p})^d$ を満たす. Γ はアーベル群なのでその既約表現は 1 次元である. Γ の指標 $\chi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\chi(\tau_j) := e^{2\pi i \alpha_j}$, $\alpha_j \in [0, 1)$ ($1 \leq j \leq \nu$) と書くことで $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) \in [0, 1)^\nu$ と同一視する. このとき Γ の指標 $\chi = \alpha$ に付随する Ruelle 型 L -関数を

$$L(s, \alpha; \nu) := \prod_{\mathbf{p} \in \mathrm{Prim}(\Gamma)} (1 - \chi(\mathbf{p})N(\mathbf{p})^{-s})^{-1} = \prod_{\mathrm{gcd}(\mathbf{p})=1} (1 - e^{2\pi i \mathbf{p} \cdot \alpha} e^{-s\ell(\mathbf{p})})^{-1}$$

*2005 年度表現論シンポジウム, 2005 年 11 月 15 日 ~ 11 月 18 日 ヤマハリゾートつま恋

で定義する. ここで $p = \sum_{j=1}^{\nu} p_j \tau_j$ に対し $p \cdot \alpha := \sum_{j=1}^{\nu} p_j \alpha_j$ である. この無限積は $\operatorname{Re}(s) > 0$ で絶対収束するので, この範囲で $L(s, \alpha; \nu)$ は正則関数を定めることがわかる.

問題はどのように定義した Ruelle 型 L -関数が全平面に解析接続されるかどうかである. $\operatorname{Re}(s) > 0$ のとき, Möbius の反転公式や Poisson の和公式を用いることで, $L(s, \alpha; \nu)$ の対数微分が次のように計算される;

$$(1) \quad \frac{L'}{L}(s, \alpha; \nu) = 2(2\sqrt{\pi})^{\nu-1} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma(n)}{n^{\nu+1}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{\nu}} \frac{(2\pi|\mathbf{m}/n + \alpha|)^2 - \nu s^2}{\left\{s^2 + (2\pi|\mathbf{m}/n + \alpha|)^2\right\}^{\frac{\nu+3}{2}}}.$$

ここで $\gamma(n) := \prod_{p|n} (1-p)$ である. 表示 (1) から, ν が特別な場合に次のことがわかる.

定理 ([KWY]). $\nu = 2, 4, 8$ のとき, $L(s, 0; \nu)$ は虚軸 $\operatorname{Re}(s) = 0$ を自然境界に持つ (つまり, 全平面に解析接続されない). $\square$

もっと一般に, 我々は次のことを予想している.

予想. $L(s, \alpha; \nu)$ は虚軸 $\operatorname{Re}(s) = 0$ を自然境界に持つであろう.

Ruelle 型 L -関数 $L(s, \alpha; \nu)$ は, 以下に紹介する数論的関数 $r_{\nu}(n, A, \alpha)$ と密接な関係を持つ. $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq \nu}$ を半整数正値対称行列, すなわち $a_{ii} \in \mathbb{Z}$ ($1 \leq i \leq \nu$), $a_{ij} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ($i \neq j$) なる正定値対称行列とし, 対応する整数係数二次形式を $A[\mathbf{x}] := {}^t \mathbf{x} A \mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\nu}$) と書く. 非負整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\alpha \in [0, 1]^{\nu}$ に対し, 関数 $r_{\nu}(n, A, \alpha)$ は次で定義される;

$$r_{\nu}(n, A, \alpha) := \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{\nu} \\ A[\mathbf{m}] = n}} e^{2\pi i \mathbf{m} \cdot \alpha}.$$

$\alpha = 0$ のとき, この値を $r_{\nu}(n, A)$ と書くと $r_{\nu}(n, A)$ は楕円面 $A[\mathbf{m}] = n$ 上の格子点の個数を与える. この個数を明示的に求めることや, 極限 $n \rightarrow \infty$ に関する $r_{\nu}(n, A)$ の漸近評価を与えることは古典的な問題である. 特に A が単位行列 E_{ν} の場合, $\nu = 2, 4, 8$ のときに限り $r_{\nu}(n, E_{\nu})$ は n に関して乗法的であることが知られており, 上の定理はこの条件の下で示される. 講演では, $\alpha \neq 0$ のときの関連した話も行いたい.

参考文献

- [KW] N. Kurokawa and M. Wakayama.: Ruelle type zeta functions for tori and some arithmetics, *Internat. J. Math.*, **15** (2004), 691–715.
- [KWY] N. Kurokawa, M. Wakayama and Y. Yamasaki.: Ruelle type L -functions versus determinants of Laplacians for torsion free abelian groups, preprint, 2005.