

Microlocalization of universal enveloping algebra for $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ and boundary value maps

Noriyuki ABE*
University of Tokyo

abstract

The aim of this article is to define boundary value maps for all parameters λ . We deal with the case of $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$.

柏原-大島 [1] により, 特性根が整数差を持たないような確定特異点を持つ微分方程式系に対し**境界値写像**が定義され, Helgason 予想の解決などに用いられた. 大島 [2] は特性根に関する仮定のない一般的な場合に定義を行ったが, 座標変換に関する性質がわからないため大域的に定義されたものではない. 今回は, $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ に対し境界値写像を大域的に定義することを目指す.

$G = SL(2, \mathbb{R})$ とし, その岩澤分解を $G = KAN$ とする. G, K, A, N の Lie 環の複素化をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$ とおく. $\mathfrak{g}$ の基底として, H, E_+, E_- をとる. 但し, $[H, E_{\pm}] = \pm E_{\pm}$, $[E_+, E_-] = H$, $\mathfrak{k} = \mathbb{C}(E_+ - E_-)$ である. $U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環とし, $C = H^2 - H + 2E_+E_- \in U(\mathfrak{g})$ とおく.

$U(\mathfrak{g})$ 加群 U に対し, $\hat{J}(U) = \varprojlim (U/E_+^n U)$, $J(U) = \hat{J}(U)_{H\text{-finite}}$ と定義する. $J(U)$ は Casselman により定義された **Jacquet module** である. 以下, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, $\lambda \neq 0$ なる $\lambda \in \mathbb{C}$ を固定する. U_λ を, u_λ を生成元とし次の式を関係式とする $U(\mathfrak{g})$ 加群とする.

$$Cu_\lambda = (\lambda^2 - 1/4)u_\lambda, \quad \mathfrak{k}u_\lambda = 0.$$

この時, $J(U_\lambda)$ は次のようにして境界値写像と結びつく. $\mathcal{A}(G/K; \lambda) = \operatorname{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(U_\lambda, \mathcal{B}(G))$ とおく. 但し, $\mathcal{B}(G)$ は G 上の佐藤超関数全体のなす空間であり, 右からの作用により $U(\mathfrak{g})$ 加群と見なす.

定理 1 境界値写像 β が $\mathcal{A}(G/K; \lambda)$ から $\operatorname{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(J(U_\lambda), \mathcal{B}(G))$ への写像として定義できる.

以下, 定理 1 の意味を説明する. そのために, Jacquet module の生成元と関係式及び境界値写像の満たす微分方程式を計算する. その計算を行うには, 次の環を導入するのがよい. $\mathcal{O}_0$ を複素平面上の正則関数のなす層の 0 における stalk とする.

定義 2 $\mathfrak{h}$ を複素 Lie 環とし, E を $\operatorname{ad}(E)$ が nilpotent な $\mathfrak{h}$ の元とする. この時, $U(\mathfrak{h})$ の拡大環 $\mathcal{E}(\mathfrak{h}, E)$ を

$$\mathcal{E}(\mathfrak{h}, E) = \left\{ \sum u_i f_i(E) \mid u_i \in U(\mathfrak{h}), f_i \in \mathcal{O}_0 \right\}$$

と定義する¹. 但し, 積は $f_i(E)$ を Taylor 展開し形式的に定義することとする. この環 $\mathcal{E}(\mathfrak{h}, E)$ を $\mathfrak{h}$ の**超局所化**と呼ぶことにする².

$\mathfrak{l} = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E_+$ とおく. 次が成り立つ.

定理 3 U を $U(\mathfrak{l})$ 加群とし, $u \in U$, $P = \sum_{i=0}^n f_i(E_+)H^i \in U(\mathfrak{l})$ が $Pu = 0$, $f_n(0) \neq 0$ を満たすとする. この時, ある $A = {}^t(A_1, A_2, \dots, A_r) \in \mathcal{E}(\mathfrak{l}, E_+)^r$, $B = (B_1, B_2, \dots, B_r) \in \mathcal{E}(\mathfrak{l}, E_+)^r$ が存在し, $v = Au \in \mathcal{E}(\mathfrak{l}, E_+) \otimes_{U(\mathfrak{l})} U$ とおくと $u = Bv$, $Hv = Tv$ が成り立つ. 但し, $T = (T_{ij}) \in M(r, U(\mathbb{C}E_+))$ であり, 次が成り立つ.

1. $T_{ii} \in \mathbb{C}$ であり, $\operatorname{Re}(T_{11}) \geq \operatorname{Re}(T_{22}) \geq \dots \geq \operatorname{Re}(T_{rr})$ が成り立つ. また, T_{ii} は z の多項式 $\sum f_i(0)z^i$ の零点である.
2. $i > j$ または $T_{ii} - T_{jj} \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば $T_{ij} = 0$.

*abenori@ms.u-tokyo.ac.jp

¹formal には $U(\mathfrak{h}) \otimes_{U(\mathbb{C}E_+)} \mathcal{O}_0$ に積構造を入れればよい.

²Springer や van den Essen により一般の非可換環に対し超局所化が定義されているが, それとは別物である.

3. $T_{ii} - T_{jj} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば, $T_{ij} = \text{const} \times E_+^{T_{ii}-T_{jj}}$.

定理 3 において存在の保証される v_i が, ある時は境界値を与え, ある時は Jacquet module の生成元を与えるのである. 具体的な場合に進む前に, 関係式を求める原理を示す. 次の性質が成り立つ.

定理 4 $\mathfrak{h}$ を部分代数として $\mathfrak{l}$ を含むような Lie 代数とし, $\text{ad}(E_+)$ は nilpotent, $\text{ad}(H)$ は semisimple であるとする. 定理 3 の状況において, 更に $Q \in U(\mathfrak{h})$ が存在し, $Qu = 0$ が成り立つとする. Q を $Q = \sum Q^{(k)}$ ($[H, Q^{(k)}] = kQ^{(k)}$) と分解する. また, $B_i = \sum B_i^{(k)} E_+^k$ と Taylor 展開する. この時, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し, $\sum_{k+k'+T_{ii}=\lambda} Q^{(k)} B_i^{(k')} E_+^{k'} v_i = 0$ が成り立つ.

これらの定理を, まずは U_λ に用いることにより, その Jacquet module の構造が明らかになる.

定理 5 $\mathcal{E}(\mathfrak{g}, E_+) \otimes_{U(\mathfrak{g})} U_\lambda \subset \widehat{J}(U_\lambda)$ であり, 更に次のような元 $\mathcal{E}(\mathfrak{g}, E_+) \otimes_{U(\mathfrak{g})} U_\lambda$ の元 v_1, v_2 が存在する.

$$\begin{aligned} H v_2 &= (-\lambda + 1/2) v_2, & H v_1 &= (\lambda + 1/2) v_1 + T E_+^{2\lambda} v_2, \\ E_- v_2 &= 0, & E_- v_1 &= c E_+^{2\lambda-1} v_2, \\ U(\mathfrak{g}) v_1 + U(\mathfrak{g}) v_2 &= J(U_\lambda). \end{aligned}$$

ここで, T と c は定数であり, λ が整数でなければ 0 である. これらの定数は実際に計算できる.

定理 3 や定理 4 を境界値写像の計算に適用するには, 少し準備がいる. 積多様体 $\widehat{X} = G \times \mathbb{R}_{>0}$ を用意し, 写像 $\pi: \widehat{X} \rightarrow G/K$ を $\pi(g, t) = g \exp((\log t)H)K$ と定義する. π により, $\mathcal{A}(G/K; \lambda)$ の元 f は $\widehat{X}$ 上の関数と見なせる. $\mathcal{C}$ を microfunction の層とする. $\Lambda_0 = \{(x, t, \xi, \tau) \in G \times \mathbb{R} \times T^*(G)_x \times T^*(\mathbb{R})_t \mid \tau \neq 0, \xi = 0\}$ とおき, $\mathcal{C}(\Lambda_0) = \varinjlim_{\Lambda_0 \subset U} \mathcal{C}(U)$ において考える. $\text{sp}: \mathcal{B}(G) \rightarrow \mathcal{C}(\Lambda_0)$ をスペクトル写像とする. $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ を $\text{Re}(\pm\lambda + l + 1) > 0$ ととり, $\tilde{u} = \text{sp}(f t^l)$ とおく. Λ_0 のある近傍で定義された擬微分作用素 $H', E'_\pm$ を次のように定義する.

$$H' = t \frac{\partial}{\partial t}, \quad E'_+ = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} E_+, \quad E'_- = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) E_-.$$

この時, $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}H' \oplus \mathbb{C}E'_+ \oplus \mathbb{C}E'_-$ は Lie 環をなし, $\mathcal{E}(\tilde{\mathfrak{g}}, E_+)$ の元は Λ_0 の近傍で定義された擬微分作用素となる. また, $\mathbb{C}H' \oplus \mathbb{C}E'_+$ は $\mathfrak{l}$ と同型な $\tilde{\mathfrak{g}}$ の部分代数となる. ここで, $\tilde{u}$ は次の微分方程式を満たす.

$$(H'(H' + 1)E'_+ - E'_-) \tilde{u} = 0, \quad (H^2 - H + 2E'_+ E'_-) \tilde{u} = (\lambda^2 - 1/4) \tilde{u}, \quad (H - H' + l) \tilde{u} = 0.$$

これから $((H' - \lambda - l + 1)(H' + \lambda - l + 1) + 2H'(H' - 1)E'_+{}^2) \tilde{u} = 0$ を得る. ここに定理 3 を適用することにより, ある擬微分作用素 $A = (A_1, A_2) \in \mathcal{E}(\tilde{\mathfrak{g}}, E'_+)$ が存在し, $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = A \tilde{u}$ は $H' \tilde{v}_1 = (\lambda + l + 1) \tilde{v}_1 + \tilde{T}' E_+^{2\lambda} \tilde{v}_2$, $H' \tilde{v}_2 = (-\lambda + l + 1) \tilde{v}_2$ なる微分方程式を満たす. 但し $\tilde{T}'$ は定数である. これから, G 上の佐藤超関数 φ_1, φ_2 及び定数 $\tilde{T}$ で, 次を満たすものが存在することがわかる.

$$\tilde{v}_1 = \text{sp}(\varphi_1 t_+^{\lambda+} + \tilde{T}(E_+^{2\lambda} \varphi_2) t_+^{\lambda+} \log t), \quad \tilde{v}_2 = \text{sp}(\varphi_2 t_+^{\lambda-})$$

この時, 境界値 $\beta_{\pm\lambda}(f)$ を $\beta_\lambda(f) = \varphi_1$, $\beta_{-\lambda}(f) = \varphi_2$ で定義することができる. 更に, 定理 4 から $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ の関係式を得, そこから $\beta_{\pm\lambda}(f)$ の間の関係式を得ることができる. この関係式は Jacquet module の生成元の関係式と一致する. つまり, 次が成り立つ.

定理 6 $v_1, v_2 \in J(U_\lambda)$ を定理 5 で得られた $J(U_\lambda)$ の生成元とする. P_1, P_2 を $U(\mathfrak{g})$ の元とし, $P_1 v_1 + P_2 v_2 = 0$ を満たすとする. この時, $P_1 \beta_\lambda(f) + P_2 \beta_{-\lambda}(f) = 0$ が成り立つ. 従って, $f \in \mathcal{A}(G/K; \lambda)$ に対し $\beta(f) \in \text{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(J(U_\lambda), \mathcal{B}(G))$ を $\beta(f)(v_1) = \beta_\lambda(f)$, $\beta(f)(v_2) = \beta_{-\lambda}(f)$ により定めることができる.

参考文献

- [1] Masaki Kashiwara and Toshio Oshima. Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems. *Ann. Math. (2)*, Vol. 106, No. 1, pp. 145–200, 1977.
- [2] Toshio Oshima. Boundary value problems for systems of linear partial differential equations with regular singularities. In *Group representations and systems of differential equations (Tokyo, 1982)*, Vol. 4 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pp. 391–432. North-Holland, Amsterdam, 1984.