

$C_n^{(1)}$ 型 Hecke 代数の exotic な幾何学的実現について

An exotic geometric realization of Hecke algebras of type $C_n^{(1)}$

加藤 周^{*†}

平成 17 年 10 月 25 日

概 要

This is a informal report of the on-going project about the Deligne-Langlands type classification of type **1** representation of Hecke algebras with unequal parameters. We introduce an exotic version of nilpotent cone for symplectic groups. It enables us to realize Hecke algebras with unequal parameters by means of equivariant K -groups.

Adams-Barbash-Vogan の理論 [ABV92] は筆者にとって衝撃であった。それは実簡約群の既約認容表現をラベル付けする Langlands パラメタの集合を Langlands パラメタ空間という親戚に手で (!) 取り替えるだけで Langlands 分解よりも明らかに深い結果が導かれているように見えたからである。

このように手で空間を“うまく”いじることが空間のある種の不変量を変えないという結果は昨今他にもあるように思われるが、上述の理論はある意味でその先を行っていたとも言えるのではないかと思ひ、筆者は他の例を考えて見た。その結果が以下である：

$G = Sp(2n, \mathbb{C})$ とし、 B をその Borel 部分群、 T をその極大トーラスとする。すると、 (G, T) のルート系 R とその B に対応する正部分 R^+ がある。 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ を R^+ の単純ルートの集合とし、 α_n を長いルートとする。 W を R の Weyl 群とする。 $X^*(T)$ を T のウェイトの集合とする。このとき、 $V_1 := \mathbb{C}^{2n}$ を G の自然表現とし、 $V_2 := \wedge^2 V_1$ 、 $\mathbb{V} := V_1 \oplus V_2$ とする。 G -表現 V に対してそのウェイト $\lambda \in X^*(T)$ 部分を $V[\lambda]$ とおく。さて、 $\mathbb{V}^+ := \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} R^+ - \{0\}} \mathbb{V}[\lambda]$ とする。このとき旗多様体の**振れ余接束**を

$$F := G \times^B \mathbb{V}^+ \hookrightarrow G \times^B \mathbb{V} \cong G/B \times \mathbb{V} \quad (1)$$

で定義する。 $\mathbf{G} := G \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ とおく。 F には $\mathbf{G}$ -作用が

$$\mathbf{G} \times F \ni (g, q_1, q_2, hB, X_1 \oplus X_2) \mapsto (ghB, q_1^{-1}gX_1 \oplus q_2^{-2}gX_2) \in F$$

によって入る。(1) において inclusion と第二射影の合成を $\mu : F \rightarrow \mathbb{V}$ とする。このとき、**exotic 冪零錐**を $\mathfrak{N} := \text{Im} \mu$ で定義する。そして、**振れ Steinberg 多様体**を $Z := F \times_{\mathfrak{N}} F$ によって定義する。このとき、 $Z_{123} := Z \times_F Z$ とすると、

$$Z \cong \{(g_1B, g_2B, X_1 \oplus X_2) \in (G/B)^2 \times \mathbb{V}; X_i \in \cap_{j=1}^2 g_j \mathbb{V}^+\}$$

$$Z_{123} \cong \{(g_1B, g_2B, g_3B, X_1 \oplus X_2) \in (G/B)^3 \times \mathbb{V}; X_i \in \cap_{j=1}^3 g_j \mathbb{V}^+\}$$

なので

$$p_{ij} : Z_{123} \ni (g_1B, g_2B, g_3B, X_1 \oplus X_2) \mapsto (g_iB, g_jB, X_1 \oplus X_2) \in Z$$

が定義できる。ここで、これらの射は全て射影的なので、 $[\mathcal{E}], [\mathcal{F}] \in K^{\mathbf{G}}(Z)$ に対して

$$[\mathcal{E}] * [\mathcal{F}] := \sum_{i \geq 0} (-1)^i [\mathbb{R}^i(p_{13})_*(p_{12}^* \mathcal{E} \otimes^L p_{23}^* \mathcal{F})] \in K^{\mathbf{G}}(Z)$$

と定義すると [CG97] の結果より $K^{\mathbf{G}}(Z)$ は結合代数となる。また、その中心は $R(\mathbf{G})$ ($\mathbf{G}$ の表現環) である事が分かる。

^{*}153-8914 目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理学研究科

[†]日本学術研究会特別研究員

Definition 0.1 (Hecke algebra of type $C_n^{(1)}$). $\mathbb{C}[q_1^{\pm 1}, q_2^{\pm 1}]$ 上の結合代数 $\mathbb{H}$ を、 $\{T_i; i = 1, \dots, n\}$ と $\{e^\lambda; \lambda \in X^*(T)\}$ によって生成される代数で次の性質を満たすものとする。

1. $\mathbb{C}[e^\lambda; \lambda \in X^*(T)] \subset \mathbb{H}$ は $\mathbb{C}[X^*(T)]$ と同型。
2. $(T_i + 1)(T_i - q_j^2) = 0$ が成立。ここで j は $i = n$ のときに 1、そうでないときに 2 となる添字。
3. $T_1, \dots, T_n$ は C_n 型の braid relation を満たす。
4. $T_i e^\lambda - e^{s_i \lambda} T_i = (1 - q_j^2) \frac{e^\lambda - e^{s_i \lambda}}{1 - e^{-\alpha_i}}$ が成立する。ここで s_i は α_i に対応する鏡映、 j は 2) と同様、 $\lambda \in X^*(T)$ 。

自然な同型

$$R(\mathbf{G}) \cong \mathbb{Z}[q_1^{\pm 1}, q_2^{\pm 1}][e^\lambda; \lambda \in X^*(T)]^W$$

がある。元 D を

$$D := \prod_{w \in W}^n (1 + q_1 e^{\frac{1}{2} w \alpha_n})$$

とおく。このとき、上の同型を通じて $D \in \mathbb{H}$ かつ $D \in K^{\mathbf{G}}(Z)$ であると思う。

Theorem 0.2. $\mathbb{C}[q_1^{\pm 1}, q_2^{\pm 1}]$ 上の結合代数としての *inclusion*

$$\mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\mathbf{G}}(Z)$$

であって $1/D$ での局所化を取ると同型

$$\mathbb{H}_D \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\mathbf{G}}(Z)_D$$

が導かれるようなものが存在する。

Remark 0.3. 1) 上の構成は一般の表現でも同様に機能するはずである。しかし、一般には $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\mathbf{G}}(Z)$ の類似物は Hecke 環を含まない。局所化を取った時に同型になると言った結果は期待できると思うが、 D の類似物が $1 \pm qe^\alpha$ (α はルート) の格好の因子をもつ (例えば $V[\alpha]$ の重複度が 2 以上である場合など) と加藤信一氏による可約性判定条件にもろに引っかかってしまうので重要な表現をかなり消し去ってしまう。さらに、一般の表現にたいして $\mathfrak{N}$ の類似物の軌道が有限個であるという可能性はまずないので、Deligne-Langlands 型分類となるともはやどうやってやったらいいのか (筆者には) 分からない。(通常はどのみち自明なものしかない訳ではあるが。) 2) 既に $\mathbb{H}_D$ でも重要な表現で消えているものがあるはずである。もしかしたらそういう表現こそが unequal parameter の Hecke 環の表現論においては重要なものかもしれない。この辺の事はどなたかご存じでしたら教えてください。

実は $\mathfrak{N}$ はいわゆる Lie 代数の冪零錐 $\mathcal{N}$ と多くの良い性質を共有することが分かっている。その結果として $\mathbb{H}_D$ の表現論の Deligne-Langlands 型分類が期待されるが、これについては現在研究中である。

参考文献

- [ABV92] Jeffery Adams, Dan Barbasch, and David A. Vogan Jr. The Langlands Classification and Irreducible Characters for Real Reductive Groups, Progress in Mathematics, 104. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. xii+318 pp. ISBN: 0-8176-3634-X
- [CG97] Neil Chriss and Victor Ginzburg, Representation theory and complex geometry. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997. x+495 pp. ISBN 0-8176-3792-3