表現論シンポジウム講演集, 2005
pp.206-207

$A_l^{(1)}$ 型量子 PAINLEVÉ 系 (QUANTUM PAINLEVÉ SYSTEMS OF TYPE $A_l^{(1)}$)

東北大学大学院理学研究科 (MATHEMATICAL INSTITUTE, TOHOKU UNIVERSITY)
名古屋 創 (HAJIME NAGOYA)

Abstract. Quantum Painlevé systems of type $A_{n-1}^{(1)}$ ($n \geq 2$) [2] are the quantizations of the second, fourth and fifth Painlevé equations and their generalizations proposed by M. Noumi and Y. Yamada [3]. Here, by using the Lax operator corresonding to an upper triangular matrix of an affine Lie algebra, we systematically construct the Lax equation, affine Weyl group symmetry and Hamiltonian.

Painlevé 方程式は動く分岐点を持たない 2 階の常微分方程式であり, 20 世紀初頭に Painlevé によって発見された. その後, 1980 年代に岡本和夫は Painlevé 方程式は Bac̆klund 変換として affine Weyl 群作用を持つことを明らかにした. 逆に affine Weyl 群作用を持つ方程式は "良い" 方程式だろうという観点から野海・山田は $A_l^{(1)}$ 型の affine Weyl 群作用を持つ高階の常微分方程式を発見した. 現在, Drinfel'd-Sokolov 階層の相似簡約として任意の affine Weyl 群作用を持つ方程式系が得られることが知られている.

ここでは, affine Lie 環の上三角部分に対応する行列を Lax 作用素にとることによって系統的に affine Weyl 群作用を持つ微分方程式系の正準量子化が構成できることを $A_l^{(1)}$ の場合に対して説明する.

$\mathcal{K}_{m,n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$) を次で定まる $\mathbb{C}$ 上の斜体とする.

(1) 生成元: $f_{i,i+j}, \epsilon_i \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1)$,

(2) 関係式: ϵ_i is central, $\quad [f_{ij}, f_{kl}] = h(\delta_{j \equiv k \pmod n} f_{i,l+j-k} - \delta_{l \equiv i \pmod n} f_{k,l+j-i})$.

行列 F_i $(0 \leq i)$, Λ, L, B を次で定める.

$$F_0 = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}\epsilon_i, \quad F_j = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} f_{i,i+j} \quad (1 \leq j), \quad \Lambda = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} + zE_{n,1}, \tag{3}$$

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \Lambda^i, \tag{4}$$

ただし E_{ij} は (i,j) 成分が 1 で他の成分は 0 である行列とする. L を Lax 作用素と呼ぶ. 例として $m = 3$, $n = 4$ のとき, Lax 作用素は次となる.

$$L = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & f_{12} & f_{13} & 1 \\ z & \epsilon_2 & f_{23} & f_{24} \\ zf_{35} & z & \epsilon_3 & f_{34} \\ zf_{45} & zf_{46} & z & \epsilon_4 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Theorem 0.1. 自然数 s, k に対して $ns > m(k-1)$ を仮定する. このとき, $\mathcal{K}_{m,n}[z, z^{-1}]$ 上に $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$-derivation $\partial_{s,k}$ を次式 (Lax 方程式) で定めることができる.

$$\partial_{s,k}(L) = [L, B_{s,k}] + \kappa z \partial_z (B_{s,k}), \tag{6}$$

ただし, $B_{s,k} = (L^k)_{\geq ns} \cdot z^{-s} = \sum_{i=ns}^{mk} L_i^k \Lambda_i$ $(L^k = \sum_{i=0}^{mk} L_i^k \Lambda_i)$, $\kappa \in \mathbb{C}$.

$ns > m(k-1)$ という条件は Lax 方程式 (6) の両辺の Λ の多項式としての次数を合わせるためにおかれている.

affine Weyl 群作用を構成するために $i = 1, \ldots, n$ に対して次の行列を導入する.

$$r_i = \frac{\alpha_i}{f_{i,i+1}} E_{i+1,i+1} \in M_{n,n}(\mathcal{K}_{m,n}), \tag{7}$$

ただし, $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $\alpha_n = \epsilon_n - \epsilon_1 + \kappa$.

$$G_i = I + r_i \Lambda^{-1} \in M_{n,n}(\mathcal{K}_{m,n}[z, z^{-1}]), \tag{8}$$

ただし $I = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}$ とする.

Proposition 0.2. $\mathcal{K}_{m,n}$ 上の準同型 s_i $(1 \le i \le n)$ を次式で定めることができる.

$$\kappa z \partial_z + s_i(L) = G_i(\kappa z \partial_z + L) G_i^{-1}. \tag{9}$$

Theorem 0.3. (i) s_i $(1 \le i \le n)$ は $A_{n-1}^{(1)}$ 型 affine Weyl 群の表現を構成する.
(ii) s_i $(1 \le i \le n)$ と $\partial_{s,k}$ は可換.

多項式 $g \in \mathcal{K}_{m,n}[z]$ に対して g_i を z^i の係数とする. $s, k \in \mathbb{N}$ に対してハミルトニアン $H_{s,k} \in \mathcal{K}_{m,n}$ を次式で定める.

$$H_{s,k} = \frac{\operatorname{tr}\left(L^{k+1}\right)_s}{k+1}. \tag{10}$$

$r \in \mathbb{N}$ に対して, $\overline{r}$ を m で割ったあまりであって, $0 \le \overline{r} \le m-1$ とする. 集合 $A_{m,n}$ を次で定める.

$$A_{m,n} = \left\{ (s,k) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} ns = mk \\ \text{or} \\ mk > ns > m(k-1), \quad \overline{ns} \ge \overline{n}, \overline{2n}, \ldots, \overline{n(s-1)} \end{array} \right\}. \tag{11}$$

Theorem 0.4. $(s,k), (s',k') \in A_{m,n}$ とする. このとき次が成り立つ.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \dfrac{1}{h}\left[H_{s,k}, L\right] = \left[L, B_{s,k}\right], \\ \text{(ii)} & \left[H_{s,k}, H_{s',k'}\right] = 0. \end{array}$$

古典の場合は任意の $s, k \in \mathbb{N}$ に対してこの定理は成り立つ. 量子の場合は $(s,k) \notin A_{m,n}$ であるときは反例が存在する. またこの定理によって, ハミルトニアンを用いて Lax 方程式の形式解を構成することができる.

$\mathcal{K}_{m,n}(0)$ を生成元が ϵ_i, $f_{ij}(0)$ である $\mathcal{K}_{m,n}$ のコピーとし, $H_{s,k;0} = H_{s,k}(\epsilon_i, f_{ij}(0) + \delta_{i,n}\delta_{j,n+1}\kappa t)$ とおく. $\mathcal{K}_{m,n}(0)((t))$ 上の元 $f_{ij;s,k}(t)$ を次で定める.

$$f_{ij;s,k}(t) = e_R\left(\frac{1}{h}\int H_{s,k;0}dt\right)\left(f_{ij}(0) + \delta_{i,n}\delta_{j,n+1}\kappa t\right)\left(e_R\left(\frac{1}{h}\int H_{s,k;0}dt\right)\right)^{-1}, \tag{12}$$

ただし, e_R は $\mathcal{K}_{m,n}(0)((t))$ に含まれる多項式 g に対して $d/dt(e_R(g)) = e_R(g)d/dt(g)$ を満たすものとする.

Corollary 0.5. $s, k \in \mathbb{N}$ に対して, $ns = mk - 1$ であれば, $f_{ij;s,k}(t)$ は初期値が $f_{ij}(0)$ である Lax 方程式 (6) の解である. すなわち次が成り立つ.

$$[f_{ij;s,k}(t), f_{pq;s,k}(t)] = h(\delta_{j \equiv p \pmod n} f_{il;s,k}(t) - \delta_{q \equiv i \pmod n} f_{pj;s,k}(t)), \tag{13}$$

$$\frac{d(L_{s,k}(t))}{dt} = [L_{s,k}(t), B_{s,k}(t)] + \kappa z \partial_z (B_{s,k}(t)), \tag{14}$$

ただし $L_{s,k}(t) = \sum_{i=0}^{m} F_{i;s,k}(t)\Lambda^i$ $(F_{i;s,k}(t) = \sum_{j=1}^{n} E_{jj} f_{j,j+i;s,k})$, $B_{s,k}(t) = ((L_{s,k}(t))^k)_{\ge ns} \cdot z^{-s}$.

References

[1] Nagoya, H.: Quantum Painlevé Systems of Type of $A_l^{(1)}$, Int. J. Math. **15** (2004), no. 10, 1007–1031

[2] Nagoya, H.: A Generalization of Lax Equations of Quantum Painlevé Systems of Type of $A_l^{(1)}$, preprint

[3] Noumi, M. and Yamada, Y.: Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$, Funkcial. Ekvac. **41** (1998), 483–503