表現論シンポジウム講演集, 2005
pp.204-205

Hecke 環の組み合わせ論的＆幾何的表現論
Combinatorial and Geometrical Representation Theory of Hecke algebras

榎本直也 (Naoya Enomoto)

京都大学数理解析研究所 博士課程 1 年
Research Institute for Mathematical Sciences
e-mail:henon@kurims.kyoto-u.ac.jp

主として Hecke 環の表現論について組み合わせ論と幾何の両面から研究しています．本稿では， Hecke 環のいくつかのクラスとその表現論の鍵となる概念や手法などについて述べ，最後に今までに得た結果を紹介します．

1 Hecke 環のクラス

Hecke 環は，対称群や一般の Weyl 群の q-analogue とみなすことの出来る代数です．現在その拡張も含め様々なクラスの Hecke 環が知られています．例えば次のようなものが挙げられます．

- Iwahori-Hecke 環， cyclotomic Hecke 環 (Ariki-Koike algebra)
- affine Hecke 環， degenerate affine Hecke 環
- DAHA， degenerate DAHA， rational DAHA

2 Hecke 環の表現論

2.1 組み合わせ論 対称群の semi-normal 表現の q-analogue （Young, Hoefesmit, Wenzl, Ram, Suzuki）． Young 図形や skew Young 図形およびその periodic 版などを利用する．但し， AHA や DAHA では， calibrated （Y-semisimple）な表現のみ．

2.2 幾何的表現論 既約表現の幾何的パラメトライズ（Ginzburg, Kazhdan-Lusztig, Vasserot）．旗多様体の幾何や Borel-Moore ホモロジー，同変 K- 群を利用する．

2.3 LLT-Ariki 型定理 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$ のある可積分表現において，大域基底を結晶基底で展開した係数 (を $q=1$ に特殊化したもの) が Hecke 環の分解定数を与える（Lascoux-Leclerc-Thibon, Ariki, Varagnolo-Vasserot）．

2.4 categorification　対称群や Iwahori-Hecke 環の block の導来同値と Weyl 群軌道の対応 (Rouquier).

2.5 category $\mathcal{O}$　DAHA, deg DAHA, rational DAHA の category $\mathcal{O}$ と affine q-Schur algebra，q-Schur algebra の表現の圏との関係（Varagnolo-Vasserot, Suzuki, Rouquier）.

3　今までに得た結果

Hecke 環の表現論の研究において，A 型の場合に成り立つ結果を他の古典型の場合に拡張したり，A 型の場合により具体的に計算できる結果を探すということはすぐに思いつく問題意識です．以下に紹介する 2 つの結果もこの問題意識に基づいて得られた結果です。

3.1 unequal parameter を持つ B_2 型 affine Hecke 環の既約表現の分類.

元々，cyclotomic Hecke 環が A 型 affine Hecke 環の商になっているという事実を B 型に拡張できないかということを考えて，B 型 affine Hecke 環の表現を調べていました．その結果，B_2 型 affine Hecke 環の有限次元既約表現の分類に関する A. Ram の結果に誤りがあることがわかったため，それを修正しました．B_2 型のように long root と short root があるルート系に付随する Hecke 環においては，$(T_i - q_i)(T_i + q_i^{-1}) = 0$ というように長さの違うルートごとに 2 つのパラメータを設定することができます．これを unequal parameter を持つ Hecke 環と呼んでいます．論文では，unequal parameter を持つ場合も含めて，B_2 型 affine Hecke 環の有限次元既約表現を分類しました (math-RT/0505252).

3.2 DAHA に関する笠谷予想と crystallized decomposition numbers.

GL_n 型 DAHA の 2 つのパラメータ t, q を $t^{k+1}q^{r-1} = 1$ と特殊化した場合，多項式表現は一般には既約にはなりません．笠谷昌弘氏（京大理）は (multi) wheel condition とよばれる条件を利用して多項式表現の中に部分表現の増大列を構成し，これが組成列であろうと予想しました．前述の category $\mathcal{O}$ の関係を使うと，この予想は q-Schur algebra の通常既約表現 $S_{(n)}$ の，q が 1 の冪根の場合における組成因子（分解係数）を調べることに帰着されます．これは Varagnolo-Vasserot による q-Schur algebra に対する LLT-Ariki 型定理によって，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$ の Fock 空間の大域基底を結晶基底で展開した展開係数を $q = 1$ に特殊化したものに一致することが知られています．筆者は，(upper) 大域基底の結晶基底による展開を直接計算することで $d_{(n),\mu}(q)$ の値を完全に決定しました．これにより，rational DAHA と deg DAHA の多項式表現に現れる組成因子が完全に決定でき，DAHA の多項式表現についても，$k+1$ と $r-1$ が互いに素な場合には笠谷氏の予想が正しいことが証明できました.