表現論シンポジウム講演集, 2005
pp.202–203

# SCHUR 多項式の一般化とその PIERI の公式
# A GENERALIZATION OF SCHUR POLYNOMIAL AND ITS PIERI'S FORMULA

沼田 泰英 (北海道大学大学院理学研究科)
NUMATA, YASUHIDE (HOKKAIDO UNIV.)

Abstract. We introduce a generalization of Schur polynomials. We show its Pieri's formula.

$K$ を標数 0 の体とする. 整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して, $V_i$ を有限次元 $K$-線型空間とする. $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i$ を $V$ とおく. また, 各 $V_i$ の基底を $Y_i$ とおき $\bigcup_i Y_i$ を $Y$ とする. 非負整数 $j \in \mathbb{N}$ と整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して $U_j$ は $U_j(V_i) \subset V_{i+j}$ を満す $V$ 上の $K$-線型写像, $D_j$ は $D_j(V_i) \subset V_{i-j}$ を満す $V$ 上の $K$-線型写像とする. この様な $U_j$, $D_j$ たちが, ある $\{a_m \in K\}_{m\in\mathbb{N}}$ に対して,

$$D(t')U(t) = a(tt')U(t)D(t'), \tag{1}$$

(ただし, $D(s)$, $U(s)$, $a(s)$ は, それぞれ, 母関数 $\sum_i D_i s^i$, $\sum_i U_i s^i$, $\sum_i a_i s^i$ とする.) を満しているとする. このとき, $U(t_n)\cdots U(t_1)$, $D(t_1)\cdots D(t_n)$ は generalized Schur operaotors と呼ばれている.

$i$ 箱のヤング図形からなる集合を $\mathbb{Y}_i$ とおき, $\mathbb{Y}_i$ を基底とするような線型空間を $V_i(= K\mathbb{Y}_i)$ とする. この時, $\lambda \in \mathbb{Y}$, $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$U_i\lambda = \sum_{\substack{\mu;\ \lambda \text{ に各列高々1 箱,} \\ \text{全部で } i \text{ 箱加えると } \mu \text{ になる.}}} \mu,$$

$$D_i\lambda = \sum_{\substack{\mu;\ \mu \text{ に各列高々1 箱,} \\ \text{全部で } i \text{ 箱加えると } \lambda \text{ になる.}}} \mu$$

と定義すると, $\{a_i = 1\}_{i\in\mathbb{N}}$ とする generalized Schur operators の例になっている.

このヤング図形の例においては, 例えば, $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{N}$ に対し, $D\mu_1 \cdots D\mu_n\lambda$ の $\kappa$ の係数は, 形が $\lambda/\kappa$ でありウェイトが $\mu$ であるような skew semi-standard Young tableaux の数を表しており, $D(t_1)\cdots D(t_n)\lambda$ の $\kappa$ の係数は, $\lambda/\kappa$ に対応する skew Schur polynomial になっている. Young tableaux においては, 同じ形の semi-standard Young tableaux のペアとある行列の間の一対一対応, つまり Robinson-Schensted-Knuth 対応が知られているが generalized Schur operators においても, ある条

件の下では, Robinson-Schensted-Knuth 対応に相当する対応を構成できることは Fomin によって示されている.

さて, ここで, $D(t')U(t) = a(tt')U(t)D(t')$ を満たす generalized Schur operators $D(t_1)\cdots D(t_n)$, $U(t_n)\cdots U(t_1)$ から定義される 2 つの多項式を導入する.

$\lambda \in V$, $\mu \in Y$ に対し, $s^{\{D_m\}}_{\lambda,\mu}(t_1,\ldots,t_n)$ を $D(t_1)\cdots D(t_n)\lambda$ における $\mu$ の係数, 即ち,

$$s^{\{D_m\}}_{\lambda,\mu}(t_1,\ldots,t_n) = \langle D(t_1)\cdots D(t_n)\lambda, \mu\rangle$$

と定義し, シューア多項式の一般化だと思う.

多項式 $h^{\{a_m\}}_i(t_1,\ldots,t_n)$ を

$$h^{\{a_m\}}_k(t_1,\ldots,t_n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} h^{\{a_m\}}_j(t_1,\ldots,t_{n-1}) \cdot h^{\{a_m\}}_{k-j}(t_n) & n > 1, \\ a_k t_1^k & n = 1 \end{cases}$$

と帰納的に定義する. このとき, $h^{\{a_m\}}_i(t_1,\ldots,t_n)$ は $a(t_1)\cdots a(t_n) = \sum_i h^{\{a_m\}}_i(t_1,\ldots,t_n)$ を満たしている. また, 特に, $\{a_m = 1\}_{m\in\mathbb{N}}$ のとき, $h^{\{a_m\}}_i(t_1,\ldots,t_n)$ は $i$ 次の完全対称多項式 $h_i(t_1,\ldots,t_n)$ になる.

この時, 次の公式を $U(t)$ と $D(t)$ の交換関係 (1) から得た.

**定理** (Pieri's formula)

$$s^{\{D_m\}}_{U_i\lambda,\mu}(t_1,\ldots,t_n) \tag{2}$$

$$= \sum_{\nu\in Y}\sum_{j=0}^{i} \langle U_j\nu, \mu\rangle h^{\{a_m\}}_{i-j}(t_1,\ldots,t_n) s^{\{D_m\}}_{U_i\lambda,\nu}(t_1,\ldots,t_n). \tag{3}$$

この公式を, ヤング図形の例において, $\mu = \varnothing$ (0 箱のヤング図形) の場合について考える. $U_j$ の定義から, $\langle U_j\nu, \varnothing\rangle$ は $j = 0$ かつ $\nu = \varnothing$ のときのみ 1 でその他のときには 0 であることに注意すると, (3) は, $h_i(t_1,\ldots,t_n) \cdot s_\lambda(t_1,\ldots,t_n)$ となることがわかる. 一方で (2) は $\lambda$ に各列高々1 箱, 全部で $i$ 箱加えた $\kappa$ について $s_\kappa(t_1,\ldots,t_n)$ の和を取ったものであり, これはシューア多項式における Pieri's formula そのものである.

## References


[1] Fomin,S., Schur Operators and Knuth Correspondences, J. of Combinatoric theory, Series A. 72(1995),277-292.



*E-mail address*: nu@math.sci.hokudai.ac.jp