

α パフィアンについての補足

九州大学大学院数理学府 松本 詔 (SHO MATSUMOTO)
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

Remarks on α -pfaffians: In Symposium on Representation Theory 2004, I defined the α -pfaffian, a generalization of the pfaffian with complex parameter α . However, it does not follow immediately from the definition that the α -pfaffian gives the usual pfaffian when $\alpha = -1$. In this talk, we give a new good expression of the α -pfaffian.

昨年の表現論シンポジウムにおいて α パフィアンを定義した。定義は以下のようである。交代行列 $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n}$ が与えられているとき,

$$B = \begin{pmatrix} B(1,1) & \cdots & B(1,n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(n,1) & \cdots & B(n,n) \end{pmatrix}$$

と書く。ここで, 各 $B(r, s)$ は 2×2 のブロックで,

$$B(r, s) = \begin{pmatrix} B_{00}(r, s) & B_{01}(r, s) \\ B_{10}(r, s) & B_{11}(r, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{2r-1, 2s-1} & b_{2r-1, 2s} \\ b_{2r, 2s-1} & b_{2r, 2s} \end{pmatrix}$$

である。 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 上のサイクル $\tau = (k_1, \dots, k_r)$, $r \geq 2$ に対して, k_1 を $\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ の中で最小になるように取っておくとき,

$$Q(B)(\tau) = \sum_{i_2, i_3, \dots, i_r \in \{0, 1\}} (-1)^{i_2 + i_3 + \dots + i_r} B_{0, i_2+1}(k_1, k_2) B_{i_2, i_3+1}(k_2, k_3) \cdots B_{i_{r-1}, 1}(k_r, k_1)$$

と定める。ただし $i_2, \dots, i_r$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ の元と見なしている ($i_k = 1$ ならば $i_k + 1 = 0$)。また自明なサイクル $\tau = (k)$ に対しては, $Q(B)(\tau) = Q(B)((k)) = B_{01}(k, k)$ と定める。このとき B の α パフィアン ($\alpha \in \mathbb{C}$) は以下で定義される。

$$(1) \quad \text{pf}_\alpha(B) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \prod_{j=1}^{\nu(\sigma)} Q(B)(\sigma^{(j)}),$$

ただし, $\nu(\sigma)$ は σ のサイクルの個数であり, $\sigma = \sigma^{(1)} \cdots \sigma^{(\nu(\sigma))}$ はサイクル分解である。

この α パフィアンは以下のような展開式を満たす ([M, 松本])。 $\|\alpha z B\| < 1$ を満たす複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(2) \quad \text{pf}(J_n - \alpha z B)^{-1/\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{s_1, s_2, \dots, s_k \in [n]} \text{pf}_\alpha(B(s_p, s_q))_{1 \leq p, q \leq k}.$$

ここで J_n は, その (r, s) ブロックが

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \delta_{r,s}$$

となるような $2n \times 2n$ 交代行列である .

通常のパフィアンの定義を思い出そう . $\mathcal{M}_n$ を $2n$ 個の点の perfect matching 全体の集合とする .
例えば , $\mathcal{M}_2$ は

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$$

の 3 つから成る . パフィアンは

$$(3) \quad \text{pf}(B) = \sum_{x \in \mathcal{M}_n} \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{2n} \end{pmatrix} \prod_{j=1}^n b_{x_{2j-1}, x_{2j}}$$

と定義される . ここで , 和は $\mathcal{M}_n$ の元 $x = \{\{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2n-1}, x_{2n}\}\}$ 全体にわたる . α パフィアンの定義 (1) は (3) と一見全く異なるが , (2) で $\alpha = -1$ をときを見ることで , 間接的に $\text{pf}_{-1}(B) = \text{pf}(B)$ を得る .

今回は α パフィアンの (3) に近い表示式を得た .

定理 1.

$$(4) \quad \text{pf}_\alpha(B) = \sum_{x \in \mathcal{M}_n} (-\alpha)^{n-\nu(x)} \text{sgn}(x) \prod_{j=1}^n b_{x_{2j-1}, x_{2j}}. \quad \square$$

ここで , $\nu(x)$ は次のように定まる . $x = \{\{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2n-1}, x_{2n}\}\}$ に対し , グラフ $G(x)$ を , 頂点集合が $\{1, \dots, 2n\}$ で , 辺集合が $\{\{2j-1, 2j\} \mid 1 \leq j \leq n\} \sqcup \{\{x_{2j-1}, x_{2j}\} \mid 1 \leq j \leq n\}$ からなるものとする . このとき , グラフ $G(x)$ の連結成分の個数を $\nu(x)$ と書くことにする .

置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対しては , perfect matching $x = \{\{1, 2\sigma(1)\}, \{3, 2\sigma(2)\}, \dots, \{2n-1, 2\sigma(n)\}\}$ を考えることで , $\nu(x)$ は σ のサイクルの個数 $\nu(\sigma)$ に一致する .

新しい表示 (4) によると , 例えば $n = 2$ のとき ,

$$\begin{aligned} \text{pf}_\alpha(B) &= (-\alpha)^{2-2}(+b_{12}b_{34}) + (-\alpha)^{2-1}(-b_{13}b_{24}) + (-\alpha)^{2-1}(+b_{14}b_{23}) \\ &= b_{12}b_{34} + \alpha b_{13}b_{24} - \alpha b_{14}b_{23}. \end{aligned}$$

参考文献

- [M] S. Matsumoto, Alpha-pfaffian, pfaffian point process and shifted Schur measure, Linear Algebra Appl. **403** (2005), 369–398.
- [松本] 松本 , パフィアンの一般化と pfaffian point process, 2004 年度表現論シンポジウム講演集, 111–120.