

$GL(3, \mathbb{C})$ 上の主系列 WHITTAKER 関数 (PRINCIPAL SERIES WHITTAKER FUNCTIONS ON $GL(3, \mathbb{C})$)

平野 幹 (MIKI HIRANO)
織田 孝幸 (TAKAYUKI ODA)

ABSTRACT: In this talk, we discuss the Whittaker functions for the non-spherical principal series representations of $GL(3, \mathbb{C})$. In particular, we give explicit formulas for these functions.

1. INTRODUCTION

この講演では、 $GL(3, \mathbb{C})$ の主系列表現に対する Whittaker 関数の明示公式について議論する。 $GL(3, \mathbb{C})$ のクラス 1 主系列表現に対する Whittaker 関数の明示公式などは、Proskurin [7], Bump-Friedberg [2] らの研究がある。(Bump [1], Stade [8] についても参照せよ) ここでは、クラス 1 でない主系列表現について扱う。詳しい計算などについては現在準備中の論文 [5] を参照のこと。

なお、関連する話題として $SL(3, \mathbb{R})$ のクラス 1 でない主系列表現に対する Whittaker 関数についての論文 [6] も参照されたい。

2. PRINCIPAL SERIES REPRESENTATIONS

この節では、 $GL(3, \mathbb{C})$ の主系列表現とその K -type について述べる。

2.1. Definition. このノートを通じて、 $M_3(\mathbb{C})$ で次数 3 の複素正方行列の全体をあらわす。 1_3 および O_3 をそれぞれ 3 次の単位行列およびゼロ行列とし、 $E_{ij} \in M_3(\mathbb{C})$, $1 \leq i, j \leq 3$, で (i, j) 成分のみが 1、残りの成分が 0 である行列単位をあらわす。また、 $1 \leq i \leq 3$ に対し、 e_i を第 i 成分のみが 1、残りの成分が 0 である 3 次の単位ベクトルのこととする。一般に、Lie 環 $\mathfrak{l}$ に対し、その複素化を $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ であらわす。

$G = GL(3, \mathbb{C})$ を 3 次複素一般線型群とする。 G の Cartan 対合 $\theta(g) = {}^t \bar{g}^{-1}$, $g \in G$ に対し、3 次ユニタリ群 $K = \{g \in G \mid \theta(g) = g\} = U(3)$ は G の極大コンパクト部分群。

$$A = \{\text{diag}(a_1, a_2, a_3) \in G \mid a_i \in \mathbf{R}_{>0}, i = 1, 2, 3\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \mid x_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, 3 \right\},$$

とするとき、 $G = NAK$ は G の岩澤分解を与える。

極大コンパクト部分群 $K = U(3)$ における A の中心化群を

$$\begin{aligned} M &= \{k \in K \mid kak^{-1} = a, a \in A\} \\ &= \{\text{diag}(u_1, u_2, u_3) \mid u_i \in U(1), i = 1, 2, 3\} \simeq U(1)^3 \end{aligned}$$

Date: October 25, 2005.

とおく。このとき、

$$P = NAM = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}$$

は G の極小放物部分群とその Langlands 分解を与える。すなわち、 N は P の冪単根基、 AM は Levi 部分群でその split component が A である。

M の既約ユニタリ表現は指標

$$\sigma_{\mathbf{n}}(\text{diag}(u_1, u_2, u_3)) = u_1^{n_1} u_2^{n_2} u_3^{n_3}, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbf{Z}^3$$

で尽くされる。 A の Lie 環 $\mathfrak{a} = \text{Lie}(A)$ は行列単位からなる生成系 $\{E_{ii} \ (i = 1, 2, 3)\}$ を持ち、線型形式 $\nu \in \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}, \mathbf{C})$ は

$$(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbf{C}^3, \quad \nu_i = \nu(E_{ii}), \quad i = 1, 2, 3,$$

と同一視される。 A の N の Lie 環 $\mathfrak{n} = \text{Lie}(N)$ 上の adjoint action は top degree wedge product $\wedge_{\mathbf{R}}^6 \mathfrak{n}$ 上の作用 $e^{2\rho}$ を誘導する。ここに、 ρ は正ルートの和の半分である。すなわち、

$$e^{\rho}(\text{diag}(a_1, a_2, a_3)) = (a_1/a_3)^2, \quad \text{diag}(a_1, a_2, a_3) \in A.$$

Definition 2.1. $(\nu, \sigma_{\mathbf{n}}) \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^* \times \hat{M}$ とする。このとき、 G の放物部分群 P からの誘導表現

$$\pi = \pi(\nu, \sigma_{\mathbf{n}}) := \text{Ind}_{P_0}^G(1_N \otimes e^{\nu+\rho} \otimes \sigma_{\mathbf{n}})$$

を G の主系列表現という。 π は Hilbert 表現であり、 π の表現空間は

$$L_{(M, \sigma_{\mathbf{n}})}^2(K) = \{f \in L^2(K) \mid f(mk) = \sigma_{\mathbf{n}}(m)f(k), \quad m \in M, \quad k \in K\},$$

で、 G の H 上の作用は

$$(\pi(x)f)(u) = a(ux)^{\nu+\rho} f(k(ux)), \quad u \in K, x \in G,$$

で与えられる。ここに、 $g = n(g)a(g)k(g) \in G$ は $g \in G$ の岩澤分解。

G の中心は $\{ru1_3 \mid r \in \mathbf{R}_{>0}, u \in U(1)\} \simeq \mathbf{C}^{\times}$ である。主系列表現 $\pi(\nu, \sigma_{\mathbf{n}})$ の中心指標は、

$$ru1_3 \mapsto r^{\sum_{i=1}^3 \nu_i} u^{\sum_{i=1}^3 n_i}$$

である。

2.2. K -types. 最高ウェイトの理論によれば、 G の極大コンパクト部分群 $K = U(3)$ の既約表現の同値類は最高ウェイトの集合 $\Lambda = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_i \in \mathbf{Z}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3\}$ によってパラメーターづけされる。このパラメーター $\lambda \in \Lambda$ に対応する K の表現を $(\tau_{\lambda}, V_{\lambda})$ と書くことにする。

Proposition 2.2. τ_{λ} が $\pi(\nu, \sigma_{\mathbf{n}})|_K$ に生ずるための必要十分条件は、 $\mathbf{R}^3$ の部分集合

$$\{(\lambda_i, \lambda_i, \lambda_k) \mid (i, j, k) \text{ は } (1, 2, 3) \text{ の順列}\}$$

の convex closure が点 $\mathbf{n}$ を含むことである。特に、 $\mathbf{n}' = (n_i, n_j, n_k)$ が $\mathbf{n}$ の dominant permutation (すなわち、 $n_i \geq n_j \geq n_k$) であるとき、 $\tau_{\mathbf{n}'}$ は $\pi(\nu, \sigma_{\mathbf{n}})$ の minimal K -type であり、 $\pi(\nu, \sigma_{\mathbf{n}})|_K$ において重複度 1 で生ずる。

3. A SMALL $U(3)$ MACHINE

前節のように、最高ウェイト $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda$ に対応する $K = U(3)$ の表現を $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ と書く。この節では、 τ_λ の $L^2(M)$ における構成について述べる。

V_λ の次元について、次の Weyl の次元公式が成り立つ。

Lemma 3.1.

$$\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_1 - \lambda_3 + 2).$$

表現空間 V_λ は Gelfand-Zelevinsky 基底 $\{f(M)\}_{M \in G(\lambda)}$ を持つ。ここに、 $G(\lambda)$ は最高ウェイト λ に対する G-パターンの集合であり、 λ に対する G-パターン $M \in G(\lambda)$ とは条件 $\lambda_1 \geq \alpha_1 \geq \lambda_2 \geq \alpha_2 \geq \lambda_3$ および $\alpha_1 \geq \beta \geq \alpha_2$ をみたす 6 つの整数よりなる三角列

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \\ \beta & & \end{pmatrix}$$

のことである。Gelfand-Zelevinsky 基底 $\{f(M)\}_{M \in G(\lambda)}$ についての定義や記号、 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \text{Lie}(K)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}(3)_{\mathbb{C}}$ の明示的作用などについては、論文 [3] を参照せよ。

さて、 $p = \lambda_1 - \lambda_2$, $q = \lambda_2 - \lambda_3$ とおく。このとき同型

$$\tau_\lambda \simeq \tau_{(p,0,-q)} \otimes \det^{\lambda_2}$$

が成立するので、 τ_λ を理解するには $\tau_{(p,0,-q)}$ を調べればよい。ここに、 $\det^{\lambda_2} = \tau_{(\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2)}$ は $X \mapsto (\det X)^{\lambda_2}$ により与えられる $U(3)$ の指標である。次については、例えば [9] に調和多項式模型による証明がある。

Lemma 3.2.

$$\tau_{(p,0,0)} \otimes \tau_{(0,0,-q)} \simeq \bigoplus_{i=0}^{\min\{p,q\}} \tau_{(p-i,0,-q+i)}.$$

特に、 $\tau_{(p,0,-q)}$ は $\tau_{(p,0,0)} \otimes \tau_{(0,0,-q)}$ において重複度 1。

次に、 $\tau_{(p,0,-q)}$ の $L^2(K)$ における構成について考える。 K の tautological な表現

$$K \ni k \mapsto s(k) = (s_{ij}(k))_{1 \leq i,j \leq 3} \in U(3) \subset G$$

の行列成分 $s_{ij}(k)$ は $L^2(K)$ の元である。特に $s_{ij} \in L^2_{(M, \sigma_{e_i})}(K)$ であり、各 i に対して $\{s_{ij} \mid j = 1, 2, 3\}$ は $L^2_{(M, \sigma_{e_i})}(K)$ において τ_{e_1} と同型な表現を生成する。Gelfand-Zelevinsky 基底との対応は

$$s_{i1} \leftrightarrow f \begin{pmatrix} e_1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s_{i2} \leftrightarrow f \begin{pmatrix} e_1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_{i3} \leftrightarrow f \begin{pmatrix} e_1 \\ 00 \\ 0 \end{pmatrix},$$

である。同様に、表現

$$K \ni k \mapsto \overline{s(k)} = (\overline{s_{ij}(k)})_{1 \leq i,j \leq 3} \in U(3) \subset G$$

の行列成分 $\overline{s_{ij}(k)}$ について、 $\overline{s_{ij}} \in L^2_{(M, \sigma_{-e_i})}(K)$ であり、各 i に対して $\{\overline{s_{ij}} \mid j = 1, 2, 3\}$ は $L^2_{(M, \sigma_{-e_i})}(K)$ において τ_{-e_3} と同型な表現を生成する。このとき、Gelfand-Zelevinsky 基底との対応は

$$\overline{s_{i3}} \leftrightarrow f \begin{pmatrix} -e_3 \\ 00 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -\overline{s_{i2}} \leftrightarrow f \begin{pmatrix} -e_3 \\ 0 \ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{s_{i1}} \leftrightarrow f \begin{pmatrix} -e_3 \\ 0 \ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

で与えられる。これらのことから、次の Lemma が従う。

- Lemma 3.3.** (1) $s_{i1}^p \in L_{(M, \sigma_{pe_i})}^2(K)$ は右移動により $\tau_{(p,0,0)}$ と同型な表現を生成し、その最高ウェイトベクトルとなる。
(2) $\overline{s_{i3}}^q \in L_{(M, \sigma_{-qe_i})}^2(K)$ は右移動により $\tau_{(0,0,-q)}$ と同型な表現を生成し、その最高ウェイトベクトルとなる。
(3) $i \neq j$ のとき、 $s_{i1}^p \overline{s_{j3}}^q \in L_{(M, \sigma_{pe_i - qe_j})}^2(K)$ は右移動により $\tau_{(p,0,-q)}$ と同型な表現を生成し、その最高ウェイトベクトルとなる。
(4) $\{i, j, k\}$ を $\{1, 2, 3\}$ の順列とすると、 $s_{i1}^p \overline{s_{j3}}^q \det^m \in L_{(M, \sigma_{(p+m)e_i - (q-m)e_j + me_k})}^2(K)$ は右移動により $\tau_{(p+m, m, -q+m)}$ と同型な表現を生成し、その最高ウェイトベクトルとなる。

Gelfand-Zelevinsky 基底との対応については、次が成立する。

Lemma 3.4. 上の $\tau_{(p,0,-q)}$ の $L_{(M, \sigma_{pe_i - qe_j})}^2(K)$ への埋め込みにおいて、Gelfand-Zelevinsky 基底との次の対応が成り立つ。

$$\begin{aligned} f \left(\begin{pmatrix} p & 0 & -q \\ p & 0 \\ p \end{pmatrix} \right) &\leftrightarrow s_{i1}^p \overline{s_{j3}}^q, & f \left(\begin{pmatrix} p & 0 & -q \\ p & 0 \\ p-1 \end{pmatrix} \right) &\leftrightarrow s_{i1}^{p-1} s_{i2} \overline{s_{j3}}^q, \\ f \left(\begin{pmatrix} p & 0 & -q \\ p & -1 \\ p \end{pmatrix} \right) &\leftrightarrow -s_{i1}^p \overline{s_{j3}}^{q-1} \overline{s_{j2}}, & f \left(\begin{pmatrix} p & 0 & -q \\ p & -1 \\ p-1 \end{pmatrix} \right) &\leftrightarrow s_{i1}^p \overline{s_{j1}} \overline{s_{j3}}^{q-1}, \\ f \left(\begin{pmatrix} p & 0 & -q \\ p-1 & 0 \\ p-1 \end{pmatrix} \right) &\leftrightarrow s_{i1}^{p-1} s_{i3} \overline{s_{j3}}^q, \end{aligned}$$

4. WHITTAKER FUNCTIONS

K の有限次元表現 (τ, V_τ) と N の非退化指標 η に対し、 $C_{\eta, \tau}^\infty(N \backslash G/K)$ で条件

$$\varphi(n g k) = \eta(n) \tau(k)^{-1} \varphi(g), \quad (n, g, k) \in N \times G \times K.$$

をみたす滑らかな関数 $\varphi : G \rightarrow V_\tau$ のなす空間をあらわす。このとき、関数 $f \in C_{\eta, \tau}^\infty(N \backslash G/K)$ はその A への制限 $f|_A$ によって定められることが G の岩澤分解 $G = NAK$ によりわかる。さらに、 $C^\infty \text{Ind}_N^G(\eta)$ を N の指標 η から誘導された G の C^∞ -誘導表現とする。ここに、 $C^\infty \text{Ind}_N^G(\eta)$ の表現空間は

$$C_\eta^\infty(N \backslash G) = \{\varphi \in C^\infty(G) \mid \varphi(n g) = \eta(n) \varphi(g), (n, g) \in N \times G\}$$

で、 G は右移動で作用する。 (τ^*, V_{τ^*}) で (τ, V_τ) の反傾表現、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で $V_{\tau^*} \times V_\tau$ 上の標準的雙線型形式をあらわすとき、関係 $\iota(v^*)(g) = \langle v^*, F^{[l]}(g) \rangle$, $v^* \in V_{\tau^*}$, $g \in G$ により定まる $\iota \in \text{Hom}_K(\tau^*, C^\infty \text{Ind}_N^G(\eta))$ と $F^{[l]} \in C_{\eta, \tau}^\infty(N \backslash G/K)$ の対応により、 $\text{Hom}_K(\tau^*, C^\infty \text{Ind}_N^G(\eta))$ は $C_{\eta, \tau}^\infty(N \backslash G/K)$ と同型となる。

さて、 G の既約許容表現 (π, H_π) とその重複度が 1 である K -type (τ^*, V_{τ^*}) をとり、さらに τ^* の π への埋め込み $i \in \text{Hom}_K(\tau^*, \pi)$ をひとつ固定する。 π および $C^\infty \text{Ind}_N^G(\eta)$ における K -有限ベクトルたちのなす $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)$ -加群の間の絡空間を

$$\mathcal{I}_{\eta, \pi} = \text{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)}(\pi, C^\infty \text{Ind}_N^G(\eta))$$

とすると、各 $T \in \mathcal{I}_{\eta, \pi}$ に対し $T_i \in C_{\eta, \tau}^\infty(N \backslash G/K)$ が関係

$$T(i(v^*))(g) = \langle v^*, T_i(g) \rangle, \quad v^* \in V_{\tau^*}, \quad g \in G$$

により定まる。そこで、

$$\text{Wh}(\pi, \eta, \tau) = \bigcup_{i \in \text{Hom}_K(\tau^*, \pi)} \{T_i \mid T \in \mathcal{I}_{\eta, \pi}\}$$

によって定義される $C_{\eta, \tau}^\infty(N \backslash G/K)$ の部分空間 $\text{Wh}(\pi, \eta, \tau)$ を、 (π, η, τ) に対する Whittaker 関数の空間と呼ぶことにする。

5. $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$ -MODULE STRUCTURE

ここからは G の主系列表現 $\pi = \pi(\nu, \sigma_{\mathbf{n}})$ とその minimal K -type $(\tau_{\lambda}, V_{\lambda})$ に対する Whittaker 関数の明示公式について議論する。以下、簡単のため $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ について

$$n_1 > n_2 > n_3$$

を仮定する。このとき、 $p = n_1 - n_2$, $q = n_2 - n_3$ とおくと、 $\pi = \pi(\nu, \sigma_{\mathbf{n}})$ の minimal K -type は $\tau_{\mathbf{n}} = \tau_{(p, 0, -q)} \otimes \det^{n_2}$ である。

5.1. Eigen equation. 一般に、 $K = U(3)$ の二つの表現 $V_{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3}$ と V_{λ} について、そのテンソル積は次のように既約分解される。

$$V_{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3} \otimes V_{\lambda} = \left(\bigoplus_{i \neq j} V_{\lambda + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j} \right) \oplus V_{\lambda}^{\oplus 2}.$$

ここで、ウェイト $\lambda + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ が dominant でないときは対応する既約成分は現れない。特に、絡空間 $\text{Hom}(V_{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3} \otimes V_{\lambda}, V_{\lambda})$ は 2 次元である。この絡空間についての次の Lemma は [3] による。

Lemma 5.1. $L = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ を V_{λ} における最高ウェイトベクトルを与える G -パターンとし、 $v_1, v_2 \in V_{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3} \otimes V_{\lambda}$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} v_1 &= f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes f(L) - f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes f \left(L \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) + f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes f \left(L \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right), \\ v_2 &= f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes f(L) - f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes f \left(L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) + f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes f \left(L \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

このとき、 v_1, v_2 はそれぞれ $V_{(1, 0, -1)} \otimes V_{\lambda}$ において V_{λ} と同型な表現を生成し、その最高ウェイトベクトルとなる。

$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ における対合 θ の -1 -固有空間とすると、 $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ が成り立つ。よく知られているように、 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ は adjoint action により K -加群となりその既約分解は

$$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = Z_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{p}_0, \quad Z_{\mathfrak{p}} \simeq V_{(0, 0, 0)}, \quad \mathfrak{p}_0 \simeq V_{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3},$$

与えられる。 $\mathfrak{p}_0$ の元と $V_{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3}$ の Gelfand-Zelevinsky 基底との対応は以下である。

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\leftrightarrow E_{13}^{\mathfrak{p}}, & f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 \\ 1 \end{pmatrix} &\leftrightarrow -E_{12}^{\mathfrak{p}}, & f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\leftrightarrow E_{23}^{\mathfrak{p}}, \\ f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 \\ 0 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \frac{1}{3}(H_{12}^{\mathfrak{p}} + H_{13}^{\mathfrak{p}}), & f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \frac{1}{3}(H_{31}^{\mathfrak{p}} + H_{32}^{\mathfrak{p}}), \\ f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 0 & -1 \\ 0 \end{pmatrix} &\leftrightarrow -E_{32}^{\mathfrak{p}}, & f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 \\ -1 \end{pmatrix} &\leftrightarrow E_{21}^{\mathfrak{p}}, & f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ 0 & -1 \\ -1 \end{pmatrix} &\leftrightarrow E_{31}^{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

ここに、 $E_{ij}^{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}_0$ を $M_3(\mathbb{C})$ に埋め込んだときの $M_3(\mathbb{C})$ の中での表示であり、 $H_{ij}^{\mathfrak{p}} = E_{ii}^{\mathfrak{p}} - E_{jj}^{\mathfrak{p}}$ とおいた。以下、この対応により $V_{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3} \otimes V_\lambda$ と $\mathfrak{p}_0 \otimes V_\lambda$ とを同一視する。

さて、 $\pi = \pi(\nu, \sigma_n)$ の minimal K -type (τ_n, V_n) に対し、injector $\iota_i : V_n \rightarrow \mathfrak{p}_0 \otimes V_n$, $i = 1, 2$ を $\iota_i(f(L)) = v_i$, $L = \begin{pmatrix} n & & \\ n_1 & n_2 & \\ & & n_1 \end{pmatrix}$ で定める。また、 $j \in \text{Hom}_K(\tau_n, \pi)$ を一つ固定する。このとき、 τ_n は π において重複度 1 であるから、合成写像

$$V_n \xrightarrow{\iota_i} \mathfrak{p}_0 \otimes V_n \xrightarrow{\alpha} \pi(\mathfrak{p}_0)j(V_n) \subset L^2_{(M, \sigma_n)}(K)$$

は j のスカラー倍となる。ここに、 α は evaluation map である。このスカラー値を λ_i とかき、 V_n の Gelfand-Zelevinsky 基底 $\{f(M)\}_{M \in G(\mathbf{n})}$ に対し

$$\iota_i(f(M)) = \sum_{M' \in G(\mathbf{n})} X_{M, M'}^{(i)} \otimes f(M'), \quad X_{M, M'}^{(i)} \in \mathfrak{p}_0,$$

とくと、二つの方程式

$$\sum_{M' \in G(\mathbf{n})} X_{M, M'}^{(i)} j(f(M')) = \lambda_i j(f(M)),$$

を得る。これを Eigen equation という。Eigen equation の固有値 λ_i を求めるには、 j を $j(f(L)) = s_{11}^p \overline{s_{33}}^q \det^{n_2}$ により定め、適当な $M \in G(\mathbf{n})$ に対して単位元で evaluate すればよい。

Lemma 5.2.

$$\lambda_1 = \nu_3 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \nu_i, \quad \lambda_2 = \nu_1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \nu_i.$$

後の計算のため、関係 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ により $\lambda_3 = \nu_2 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \nu_i \in \mathbb{C}$ を定めておく。

5.2. Casimir equation. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathfrak{p}) + \mathcal{C}(\mathfrak{k})$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Casimir operator とする。ここに

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mathfrak{p}) &= \frac{1}{3}(I_3^{\mathfrak{p}})^2 + P_{\mathfrak{p}} + Q_{\mathfrak{p}}, & \mathcal{C}(\mathfrak{k}) &= \frac{1}{3}(I_3^{\mathfrak{k}})^2 + P_{\mathfrak{k}} + Q_{\mathfrak{k}}, \\ P_{\mathfrak{p}} &= \frac{2}{3}\{(H_{12}^{\mathfrak{p}})^2 + H_{12}^{\mathfrak{p}}H_{23}^{\mathfrak{p}} + (H_{23}^{\mathfrak{p}})^2\}, & P_{\mathfrak{k}} &= \frac{2}{3}\{(H_{12}^{\mathfrak{k}})^2 + H_{12}^{\mathfrak{k}}H_{23}^{\mathfrak{k}} + (H_{23}^{\mathfrak{k}})^2\}, \\ Q_{\mathfrak{p}} &= \sum_{i < j} (E_{ij}^{\mathfrak{p}}E_{ji}^{\mathfrak{p}} + E_{ji}^{\mathfrak{p}}E_{ij}^{\mathfrak{p}}), & Q_{\mathfrak{k}} &= \sum_{i < j} (E_{ij}^{\mathfrak{k}}E_{ji}^{\mathfrak{k}} + E_{ji}^{\mathfrak{k}}E_{ij}^{\mathfrak{k}}), \end{aligned}$$

であり、 $E_{ij}^{\mathfrak{p}}$, $E_{ij}^{\mathfrak{k}}$ などは $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ をそれぞれ $M_3(\mathbb{C})$ に埋め込んだときの $M_3(\mathbb{C})$ における表示である。よく知られているように、 $\mathcal{C}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の普遍包絡環の中心の元であり、 $\pi = \pi(\nu, \sigma_n)$ の K -有限ベクトル上スカラーで作用する。そのスカラー値を $\chi_{\mathcal{C}}$ とかくと、 V_n の Gelfand-Zelevinsky 基底 $\{f(M)\}_{M \in G(\mathbf{n})}$ と $j \in \text{Hom}_K(\tau_n, \pi)$ に対し、方程式

$$\mathcal{C}j(f(M)) = \chi_{\mathcal{C}}j(f(M))$$

を得る。これを Casimir equation という。スカラー値 $\chi_{\mathcal{C}}$ は、 $L^2(K)$ における $\mathcal{C}$ の作用を単位元で evaluate することにより求めることができる。

Lemma 5.3.

$$\chi c = \frac{1}{3} \left(\sum_i \nu_i \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\sum_i n_i \right)^2 + \frac{2}{3} \{ (n_1 - n_2)^2 + (n_1 - n_2)(n_2 - n_3) + (n_2 - n_3)^2 \} \\ + 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 - 4).$$

6. WHITTAKER REALIZATION

この節では、前節で述べた Eigen equations および Casimir equation を $\pi = \pi(\nu, \sigma_n)$ および τ_n に対する Whittaker 関数の最高ウェイトベクトル成分について書き下す。

6.1. Preliminaries. ここでは、Whittaker 関数を記述するための記号を準備する。

$\text{diag}(a_1, a_2, a_3) \in A$ に対し、 $y_1 = \frac{a_1}{a_2}$, $y_2 = \frac{a_2}{a_3}$ とおく。また、変数 y_i に関する Euler 作用素を $\partial_i = y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ とかく。

$\mathfrak{n}$ の生成元を $N_{ij, \mathbb{R}} = E_{ij}$, $N_{ij, I} = \sqrt{-1}E_{ij}$, $i < j$, とかき、 N の非退化指標 η を実部、虚部ともに 0 でないふたつの複素数 $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ によって

$$\eta(N_{12, \mathbb{R}}) = 2\pi\sqrt{-1}\text{Re}(c_1), \quad \eta(N_{23, \mathbb{R}}) = 2\pi\sqrt{-1}\text{Re}(c_2), \\ \eta(N_{12, I}) = 2\pi\sqrt{-1}\text{Im}(c_1), \quad \eta(N_{23, I}) = 2\pi\sqrt{-1}\text{Im}(c_2),$$

で定める。このとき

$$\eta \left(\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_3 \\ & & 1 \end{pmatrix} \right) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\text{Re}(\bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 x_3)), \quad x_i \in \mathbb{C},$$

となる。

6.2. Whittaker realization of the equations. $\pi = \pi(\nu, \sigma_n)$ をジェネリックな既約主系列表現、 τ_n をその minimal K -type とし、 η を $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ より定まる N の非退化指標とする。また、 $\{f(M)\}_{M \in G(\mathfrak{n})}$ を τ_n の Gelfand-Zelevinsky 基底とする。このとき、 (π, η, τ_n) に対する Whittaker 関数の A への制限 $\phi \in \text{Wh}(\pi, \eta, \tau)|_A$ に対し、その $f(M)$ 成分を $\phi(M)$ とかく。各 $M \in G(\mathfrak{n})$ に対し、 $\phi(M)$ は前節に述べた Eigen equations および Casimir equation をみだが、特に最高ウェイトベクトルを与える G パターン $L = \begin{pmatrix} \mathfrak{n} \\ n_1 n_2 \\ n_1 \end{pmatrix}$ に対するこれらの方程式は以下で与えられる。

Lemma 6.1. $\phi(L)$ に対する Eigen equations は次のようになる。

$$-(\partial_2 - 2 + \lambda_1)\phi(L; y) = 2\pi\sqrt{-1}\bar{c}_2 y_2 \phi \left(L \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ & 0 \end{pmatrix}; y \right), \\ (\partial_1 - 2 - \lambda_2)\phi(L; y) = -2\pi\sqrt{-1}\bar{c}_1 y_1 \phi \left(L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & -1 \end{pmatrix}; y \right).$$

Lemma 6.2. $\phi(L)$ に対する Casimir equation は次のようになる。

$$\left[(\partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_1 \partial_2) - 2(\partial_1 + \partial_2) + (2\pi\sqrt{-1})^2(|c_1|^2 y_1^2 + |c_2|^2 y_2^2) \right] \phi(L; y) \\ + p \cdot 2\pi\sqrt{-1}\bar{c}_1 y_1 \phi \left(L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & -1 \end{pmatrix}; y \right) + q \cdot 2\pi\sqrt{-1}\bar{c}_2 y_2 \phi \left(L \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ & 0 \end{pmatrix}; y \right) \\ = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 - 4)\phi(L; y).$$

Casimir equation の証明において、Casimir 元 $\mathcal{C}$ のうち $\frac{1}{3}(I_3^{\mathfrak{p}})^2 + \frac{1}{3}(I_3^{\mathfrak{k}})^2 + P_{\mathfrak{k}}$ の作用については固有値とキャンセルするため $P_{\mathfrak{p}} + Q_{\mathfrak{p}} + Q_{\mathfrak{k}}$ の作用のみ考えればよいことに注意する。

6.3. **The reduced Casimir-Whittaker equation.** 前節の Lemma 6.1 および 6.2 によれば、 $\phi \in \text{Wh}(\pi, \eta, \tau)$ の最高ウェイトベクトル成分 $\phi(L)$ は次の方程式をみたすことがわかる。

Proposition 6.3.

$$\begin{aligned} & [(\partial_1 - 2)^2 + (\partial_2 - 2)^2 - (\partial_1 - 2)(\partial_2 - 2) - 4 - p(\partial_1 - 2 - \lambda_2) - q(\partial_2 - 2 + \lambda_1) \\ & + (2\pi\sqrt{-1})^2(|c_1|^2 y_1^2 + |c_2|^2 y_2^2)] \phi(L; y) \\ & = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 - 4) \phi(L; y). \end{aligned}$$

また、 $\phi(L; y) = y_1^2 y_2^2 \tilde{\phi}(L; y)$ とおき、上の方程式を $\tilde{\phi}(L; y)$ に対して書きなおすと以下ようになる。

Corollary 6.4.

$$\begin{aligned} & [\partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_1 \partial_2 - p(\partial_1 - \lambda_2) - q(\partial_2 + \lambda_1) - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2) \\ & + (2\pi\sqrt{-1})^2(|c_1|^2 y_1^2 + |c_2|^2 y_2^2)] \tilde{\phi}(L; y) \\ & = 0. \end{aligned}$$

7. EXPLICIT FORMULAS

この節では、前節で述べた Corollary 6.4 における方程式の解について考察する。

7.1. **Secondary Whittaker functions.** Corollary 6.4 における方程式は $y_1 = 0$ および $y_2 = 0$ に沿った regular singularity を持ちこれらは $(y_1, y_2) = (0, 0)$ において正規交差する。ここでは点 $(y_1, y_2) = (0, 0)$ におけるこの方程式の解、すなわち第2種 Whittaker 関数を与える。まず、この方程式の特性根 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ は以下である。

Lemma 7.1.

$$\begin{aligned} \alpha = & (\lambda_1 + p + q, -\lambda_2 + p + q), (\lambda_1 + p + q, -\lambda_3 + q), \\ & (\lambda_2, -\lambda_1), (\lambda_2, -\lambda_3 + q), \\ & (\lambda_3 + p, -\lambda_1), (\lambda_3 + p, -\lambda_2 + p + q). \end{aligned}$$

特性根 α に対するべき級数解

$$(\pi|c_1|y_1)^{\alpha_1} (\pi|c_2|y_2)^{\alpha_2} \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}^{\alpha} (\pi|c_1|y_1)^m (\pi|c_2|y_2)^n$$

における係数 $C_{m,n}^{\alpha}$ は、次の recurrence relation の解として一意に定まる。

$$\begin{aligned} & \{(\alpha_1 + m)^2 + (\alpha_2 + n)^2 - (\alpha_1 + m)(\alpha_2 + n) - p(\alpha_1 + m - \lambda_2) - q(\alpha_2 + n + \lambda_1) \\ & - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2)\} C_{m,n}^{\alpha} = C_{m-2,n}^{\alpha} + C_{m,n-2}^{\alpha} \end{aligned}$$

その解は定数倍を除き、以下のように与えられる。

(i) $(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda_1 + p + q, -\lambda_2 + p + q)$ のとき, m, n : even,

$$C_{m,n}^{\alpha} = \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{(\frac{m}{2})! (\frac{n}{2})!} \Gamma \left[\frac{-\lambda_1 + \lambda_2 - p - q - m}{2}, \frac{-\lambda_1 + \lambda_3 - q - m}{2}, \frac{-\lambda_1 + \lambda_2 - p - q - n}{2}, \frac{\lambda_2 - \lambda_3 - p - n}{2} \right].$$

(ii) $(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda_1 + p + q, -\lambda_3 + q)$ のとき, m, n : even,

$$C_{m,n}^{\alpha} = \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{(\frac{m}{2})! (\frac{n}{2})!} \Gamma \left[\frac{-\lambda_1 + \lambda_2 - p - q - m}{2}, \frac{-\lambda_1 + \lambda_3 - q - m}{2}, \frac{-\lambda_1 + \lambda_3 - q - n}{2}, \frac{-\lambda_2 + \lambda_3 + p - n}{2} \right].$$

(iii) $(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda_2, -\lambda_1)$ のとき, m, n : even,

$$C_{m,n}^\alpha = \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{(\frac{m}{2})!(\frac{n}{2}!)} \Gamma \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + p + q - m}{2}, \frac{-\lambda_2 + \lambda_3 + p - m}{2}, \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + p + q - n}{2}, \frac{\lambda_1 - \lambda_3 + q - n}{2} \right].$$

(iv) $(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda_2, -\lambda_3 + q)$ のとき, m, n : even,

$$C_{m,n}^\alpha = \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{(\frac{m}{2})!(\frac{n}{2}!)} \Gamma \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + p + q - m}{2}, \frac{-\lambda_2 + \lambda_3 + p - m}{2}, \frac{-\lambda_1 + \lambda_3 - q - n}{2}, \frac{-\lambda_2 + \lambda_3 + p - n}{2} \right].$$

(v) $(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda_3 + p, -\lambda_1)$ のとき, m, n : even,

$$C_{m,n}^\alpha = \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{(\frac{m}{2})!(\frac{n}{2}!)} \Gamma \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_3 + q - m}{2}, \frac{\lambda_2 - \lambda_3 - p - m}{2}, \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + p + q - n}{2}, \frac{\lambda_1 - \lambda_3 + q - n}{2} \right].$$

(vi) $(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda_3 + p, -\lambda_2 + p + q)$ のとき, m, n : even,

$$C_{m,n}^\alpha = \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{(\frac{m}{2})!(\frac{n}{2}!)} \Gamma \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_3 + q - m}{2}, \frac{\lambda_2 - \lambda_3 - p - m}{2}, \frac{-\lambda_1 + \lambda_2 - p - q - n}{2}, \frac{\lambda_2 - \lambda_3 - p - n}{2} \right].$$

Theorem 7.2. Lemma 7.1 において与えた各特性根 α と上の $C_{m,n}^\alpha$ に対して

$$\tilde{\varphi}^\alpha(y) = (\pi|c_1|y_1)^{\alpha_1} (\pi|c_2|y_2)^{\alpha_2} \sum_{m,n=0, \text{even}}^{\infty} (C_{m,n}^\alpha / C_{0,0}^\alpha) (\pi|c_1|y_1)^m (\pi|c_2|y_2)^n$$

とおく。このとき、 $\{\tilde{\varphi}^\alpha(y)\}$ は Corollary 6.4 における方程式の特異点 $(y_1, y_2) = (0, 0)$ における線型独立解系を与える。

7.2. Integral expressions of good Whittaker functions. Whittaker 関数に対する Multiplicity one theorem によれば、Corollary 6.4 における方程式は緩増大解 $\tilde{\phi}^{\text{mod}}$ をスカラー倍を除きただ一つ持つ。この緩増大解 $\tilde{\phi}^{\text{mod}}$ に対する積分表示は以下のように与えられる。

Theorem 7.3. $\tilde{\phi}^{\text{mod}}$ はスカラー倍を除き次の Barnes 型積分で与えられる。十分大きい σ_1, σ_2 に対して

$$\tilde{\phi}^{\text{mod}}(y) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{L(\sigma_1)} \int_{L(\sigma_2)} V(s_1, s_2) (\pi|c_1|y_1)^{-s_1} (\pi|c_2|y_2)^{-s_2} ds_1 ds_2.$$

ここに

$$V(s_1, s_2) = \Gamma \left[\frac{s_1 + \lambda_1 + p + q}{2}, \frac{s_1 + \lambda_2}{2}, \frac{s_1 + \lambda_3 + p}{2}, \frac{s_2 - \lambda_1}{2}, \frac{s_2 - \lambda_2 + p + q}{2}, \frac{s_2 - \lambda_3 + q}{2}, \frac{s_1 + s_2 + p + q}{2} \right].$$

Theorem 7.4. $\tilde{\phi}^{\text{mod}}$ はスカラー倍を除き次の Euler 型積分で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^{\text{mod}}(y) &= 2^4 (\pi|c_1|y_1)^A (\pi|c_2|y_2)^B \\ &\times \int_0^\infty K_\alpha \left(2\pi|c_1|y_1 \sqrt{1 + \frac{1}{v}} \right) K_\beta \left(2\pi|c_2|c_2 y_2 \sqrt{1 + v} \right) \times v^\gamma (1 + v)^\delta \frac{dv}{v}. \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} A &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + p + q}{2}, & B &= \frac{-\lambda_1 - \lambda_2 + p + q}{2}, \\ \alpha &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + p + q}{2}, & \beta &= \frac{-\lambda_1 + \lambda_2 - p - q}{2}, & \gamma &= \frac{\lambda_3 + p - A}{2}, & \delta &= 0. \end{aligned}$$

7.3. Expansion theorem. Theorem 7.3 における積分路を左に動かすことにより、緩増大解 $\tilde{\phi}^{\text{mod}}$ の第 2 種 Whittaker 関数 φ^α による次の展開定理が示される。

Theorem 7.5.

$$\tilde{\phi}^{\text{mod}}(y) = \sum_{\alpha} C_{0,0}^{\alpha} \tilde{\varphi}^{\alpha}(y).$$

REFERENCES

- [1] Bump, D., Automorphic forms on $GL(3, \mathbf{R})$, SLN **1083**, Springer-Verlag.
- [2] Bump, D., Friedberg, S., On Mellin transforms of unramified Whittaker functions on $GL(3, \mathbf{C})$, J. Math. Anal. Appl. **139** (1989), 205–216.
- [3] Hirano, M., Oda, T., Integral switching engine for special Clebsch-Gordan coefficients for the representations of $\mathfrak{gl}_3$ with respect to Gelfand-Zelevinsky basis, preprint.
- [4] Hirano, M., Oda, T., Secondary Whittaker functions for P_J -principal series representations of $Sp(3, \mathbf{R})$, Proc. Japan Acad., **81**, Ser. A (2005), 105–109.
- [5] Hirano, M., Oda, T., Calculus on principal series Whittaker functions on $GL(3, \mathbf{C})$, in preparation.
- [6] Manabe, H., Ishii, T., Oda, T., Principal series Whittaker functions on $SL(3, \mathbf{R})$,
- [7] Proskurin, N., Cubic Metaplectic Forms and Theta Functions, SLN **1677**, Springer-Verlag.
- [8] Stade, E., Mellin transforms of Whittaker functions on $GL(4, \mathbf{R})$ and $GL(4, \mathbf{C})$, Manuscripta Math. **87** (1995), 511–526.
- [9] 竹内 勝, 現代の球関数, 岩波書店 (1975)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, EHIME UNIVERSITY, 2-5 BUNKYO-CHO, MATSUYAMA, EHIME, 790-8577, JAPAN

E-mail address: hirano@math.sci.ehime-u.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA, ME-GURO, TOKYO, 153-8914 JAPAN

E-mail address: takayuki@ms.u-tokyo.ac.jp

Errata for the proceedings of Symposium on Representation Theory 2005

- “ $GL(3, \mathbb{C})$ 上の主系列 Whittaker 関数 (Principal series Whittaker functions on $GL(3, \mathbb{C})$) ” ... 平野 幹 (Miki Hirano) , 織田 孝幸 (Takayuki Oda) :

Page 183, line 4 of Definition 2.1:

Hilibert $\longrightarrow$ Hilbert

Page 184, line 3:

$L^2(M) \longrightarrow L^2(K)$

Page 185, line 8:

In the symbol $L^2_{(M, \sigma_{(*)})}(K)$, the subscript of σ is not right. It should be $\sigma_{(p+m)\mathbf{e}_i - (q-m)\mathbf{e}_j + m\mathbf{e}_k}$.

Page 190, line 5 of Theorem 7.3:

In the symbol $\Gamma[* * *]$, the parameter $\frac{s_2 - \lambda_2 + p + q}{2}$ is wrongly typeset. The right way is to insert “ $\frac{s_2 - \lambda_2 + p + q}{2}$,” including the comma “,”.