

Analytical properties of partial Selberg zeta functions

橋本康史 (九州大学)

Yasufumi Hashimoto (Kyushu University)

Abstract

In this note, we study the analytical properties of Selberg-type zeta functions defined by partial Euler's products over prime geodesics.

1 Introduction

$\mathbb{H}$ を複素上半平面, Γ を $\text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}) < \infty$ なる $SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群とする. また, $\text{Prim}(\Gamma)$ を Γ の素な双曲的共役類の集合, $N(\gamma)$ を $\gamma \in \text{Prim}(\Gamma)$ の大きいほうの固有値とする. このとき, Γ に関するセルバーグゼータ関数を次で定義する.

$$\zeta_\Gamma(s) := \prod_{\gamma \in \text{Prim}(\Gamma)} (1 - N(\gamma)^{-s})^{-1} \quad \text{Res} > 1. \quad (1.1)$$

このとき, $\zeta_\Gamma(s)$ は (i) 領域 $\{\text{Res} \geq 1, s \neq 1\}$ 内で特異点をもたず, $s = 1$ で 1 位の極をもち, (ii) 全複素平面 $\mathbb{C}$ へと解析接続でき, (iii) s と $-s$ の間に関数等式をもつ, といった非常によい性質をもつ ([He]).

いま, Γ' を Γ の指数有限な正規部分群とし, $G := \Gamma/\Gamma'$ とする. このとき, 部分セルバーグゼータ関数を

$$\zeta_{\Gamma,n}^{(G)}(s) = \zeta_{\Gamma,n}(s) := \prod_{\substack{\gamma \in \text{Prim}(\Gamma) \\ \text{ord}_G(\gamma) = n}} (1 - N(\gamma)^{-s})^{-1} \quad \text{Res} > 1.$$

で定義する. 本稿では, この部分セルバーグゼータ関数の解析的な性質を調べることを主目的とする.

Remark 1.1. 普段, セルバーグゼータ関数は

$$Z_{\Gamma}(s) := \prod_{\gamma \in \text{Prim}(\Gamma)} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - N(p)^{-s-k}) \quad \text{Res} > 1.$$

で定義されることが多く, (1.1) で定義された $\zeta_{\Gamma}(s)$ は $Z_{\Gamma}(s)$ と区別してルエルゼータ関数とよばれている. そのため, 本来ならば, 部分セルバーグゼータ関数は,

$$Z_{\Gamma,n}^{(G)}(s) = Z_{\Gamma,n}(s) := \prod_{\substack{\gamma \in \text{Prim}(\Gamma) \\ \text{ord}_G(\gamma)=n}} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - N(p)^{-s-k}) \quad \text{Res} > 1$$

で定義されるべきかもしれない. ただ, $\zeta_{\Gamma}(s)$ と $Z_{\Gamma}(s)$ の間には

$$\zeta_{\Gamma}(s) = \frac{Z_{\Gamma}(s+1)}{Z_{\Gamma}(s)},$$

$$Z_{\Gamma}(s) = \prod_{k=0}^{\infty} \zeta_{\Gamma}(s+k)$$

といった密接な関係がある (部分セルバーグゼータ関数に関しても同様) ため, 一方からもう一方の性質を導くことは難しくない. 本稿では, $\zeta_{\Gamma}(s)$ の方が議論しやすいため, セルバーグゼータ関数として $\zeta_{\Gamma}(s)$ を採用することにする.

2 Main results

まず最初に, 簡単のため, $\#G = p$ (素数) の場合を考えると, $\{\text{Res} > 0\}$ で解析性に関して次のような結果が得られた.

Theorem 2.1. $\#G = p$ (素数) であるとき, 部分セルバーグゼータ関数 $\zeta_{\Gamma,p}(s)$ は次の関数等式をみたす.

$$\frac{\zeta_{\Gamma,p}(s)^p}{\zeta_{\Gamma,p}(ps)} = \frac{\zeta_{\Gamma}(s)^p}{\zeta_{\Gamma'}(s)}. \quad (2.1)$$

また, この公式から, 任意の $r \geq 1$ に対して, $\zeta_{\Gamma,p}(s)^{p^r}$ は $\{\text{Res} > 1/p^r\}$ 上に有理型に解析接続され, $\zeta_{\Gamma,p}(s)$ が任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\{\text{Res} > 0, |s| < \epsilon\}$ 内に無限個の特異点をもつことがわかる.

Proof. まず, [VZ] による次の公式に着目する.

$$\begin{aligned}\zeta_{\Gamma'}(s) &= \prod_{\rho \in \hat{G}} \zeta_{\Gamma}(s, \rho)^{\dim \rho} \\ &= \prod_{\rho \in \hat{G}} \prod_{\gamma \in \text{Prim}(\Gamma)} \det(1 - \rho(\gamma)N(\gamma)^{-s})^{-\dim \rho}.\end{aligned}$$

これは, 代数的整数論における Artin の factorization formula の類似といえる公式であるが, 次のように書き換えることができる.

$$\begin{aligned}\zeta_{\Gamma'}(s) &= \prod_{n|\#G} \prod_{\gamma \in P_n} \prod_{\rho \in \hat{G}} \det(1 - \rho(\gamma)N(\gamma)^{-s})^{-\dim \rho} \\ &= \prod_{n|\#G} \prod_{\gamma \in P_n} (1 - N(\gamma)^{-ns})^{-\#G/n} \\ &= \prod_{n|\#G} \zeta_{\Gamma,n}(ns)^{\#G/n}.\end{aligned}$$

また, 自明に

$$\zeta_{\Gamma}(s) = \prod_{n|\#G} \zeta_{\Gamma,n}(s)$$

であるので, $\#G = p$ の場合を考えると, 簡単に (2.1) が導かれる.

ここで, 便宜上, 公式 (2.1) を次のように書くことにする.

$$\frac{F(s)^p}{F(ps)} = G(s). \quad (2.2)$$

すると, 帰納的に次を得る.

$$\begin{aligned}F(s)^{p^r} &= F(ps)^{p^{r-1}} G(s)^{p^{r-1}} \\ &= F(p^2s)^{p^{r-2}} G(ps)^{p^{r-2}} G(s)^{p^{r-1}} \\ &= \dots \\ &= F(p^r s) \prod_{i=0}^{r-1} G(p^i s)^{p^{r-i-1}}.\end{aligned} \quad (2.3)$$

定義から, $F(s)$ は $\{\text{Res} > 1\}$ で特異点をもたず, また, $G(s)$ は全複素平面で有理型なので, (2.3) より, $F(s)^{p^r}$ は $\{\text{Res} > 1/p^r\}$ 上で有理型に解析接続される.

セルバーグゼータ関数 $\zeta_\Gamma(s)$ は $s = 1$ で 1 位の極をもっているので, $G(s)$ は $s = 1$ で $p-1$ 位の極をもつ. すると, $F(ps)$ は $\{\text{Res} > 1/p\}$ 上で特異点をもたないので, (2.2) より, $F(s)$ は $s = 1$ で位数 $1/p-1$ の分岐点をもつことがわかる. なので, $F(ps)$ は $s = 1/p$ で分岐点をもつが, $G(s)$ は有理型なので, (2.2) より $F(s)$ は $s = 1/p$ で分岐点をもつ. 同様に, $F(s)$ は $s = 1/p^2, p^3, \dots$ でも分岐点をもち, $s = 0$ の近くに無限個の特異点をもつことがわかる. $\square$

定理 2.1 によって, $\zeta_{\Gamma,p}(s)$ の $\{\text{Res} > 0\}$ 上での解析接続が与えられた. 次に $\zeta_{\Gamma,p}(s)$ の $\{\text{Res} \leq 0\}$ での解析性を調べる. まず, $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ がコンパクトである場合には次がわかる.

Theorem 2.2. $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ がコンパクト, $\#G = p$ (素数) のとき, $\zeta_{\Gamma,p}(s)$ は $\text{Res} = 0$ 上に自然境界をもつ (つまり, $\{\text{Res} \leq 0\}$ へは解析接続できない).

定理 2.2 を証明するために, 次の補題を準備しよう.

Lemma 2.3. $\{1/2 + ir_j\}_{j \geq 1}$ を $G(s)$ の $\text{Res} = 1/2, \text{Im}s > 0$ での特異点とする ($0 < r_0 < r_1 < \dots$). このとき, $r_j \rightarrow \infty$, $r_{j+1} - r_j = o(r_j)$ as $j \rightarrow \infty$ ならば $\zeta_{\Gamma,p}(s)$ は $\text{Res} = 0$ 上に自然境界をもつ.

Proof. まず, (2.3) より, $\zeta_{\Gamma,p}(s)$ の $\{0 < \text{Res} < 1, \text{Im}s > 0\}$ での特異点の集合が

$$\{p^{-k}(1/2 + ir_j) | k, j \geq 0\}$$

で与えられることに注意する.

証明を背理法で行うために, $\zeta_{\Gamma,p}(s)$ は $\text{Res} = 0$ で自然境界をもたない, つまり, ある $0 < T_1 < T_2$ が存在して, 任意の $j, k \geq 0$ に対して, $p^{-k}r_j < T_1$ または $p^{-k}r_j > T_2$ が成り立つ, と仮定する.

いま, $T > 0$ に対して, $j(T) := \{j \geq 0 | r_j \leq T < r_{j+1}\}$ と定め, さらに, $k \geq 0$ に対して, $J(k) := j(T_1 p^k)$ とおく. このとき, 仮定より $p^{-k}r_{J(k)+1} > T_2$ である. また, $j(T), J(k)$ はそれぞれ T, k に対して非減少である. ここで, 十分大きな k に対して, $r_{J(k)+1} - r_{J(k)}$ を評価する. すると, $J(k)$ の定義と仮定より,

$$p^{-k}(r_{J(k)+1} - r_{J(k)}) > T_2 - T_1 \quad (2.4)$$

である. 一方, $r_{j+1} - r_j = o(r_j)$ より,

$$p^{-k}(r_{J(k)+1} - r_{J(k)}) = p^{-k}o(r_{J(k)}) < p^{-k}o(T_1 p^k) = o(1) \quad \text{as } k \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

である. (2.4) と (2.5) は矛盾しており, そのため, $\zeta_{\Gamma,p}(s)$ が $\text{Res} = 0$ で自然境界をもつことがわかる. $\square$

Proof of Theorem 2.2.

$\Gamma \backslash \mathbb{H}$ がコンパクトであるとき、セルバーグゼータ関数の $0 < \text{Res} < 1$ での特異点は有限個を除いて、全て $\text{Res} = 1/2$ 上にあり、しかもそれらは、ラプラシアン固有値を用いてあらわされる。ワイルの公式より、

$$\sum_{r_j < T} m(r_j) = O(T^2) \quad \text{as } T \rightarrow \infty$$

であることがよく知られているが、さらに重複度に関しては

$$m(r_j) \ll \frac{r_j}{\log r_j}$$

であることが知られている ([Iw]) ので、大雑把に $r_j \ll j$ と評価できる。このことから、容易に $(r_j)^{1/j} \rightarrow 1$, つまり, $r_{j+1} - r_j = o(r_j)$ が示せるので, Lemma 2.3 より, 定理が証明される。□

補題 2.3 と定理 2.2 の証明にみられるように、部分セルバーグゼータ関数の $\{\text{Res} \leq 0\}$ での解析性は、もとのセルバーグゼータ関数 $\zeta_\Gamma(s), \zeta_{\Gamma'}(s)$ の $\{0 < \text{Res} < 1\}$ での特異点の分布に非常に大きく依存している。 $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ がコンパクトでない場合には、跡公式中の連続スペクトルの寄与によって、 $\{0 < \text{Res} < 1/2\}$ 内に特異点があり、その分布の様子は一般には詳しくわかっていない。そのため、今の段階では必ずしも、コンパクトの場合と同様の結果が得られると断言することはできない。

ただし、「自然境界をもたない」という結果になるための条件は、‘非常に’特殊なものである（例えば、ラプラシアンの固有値の重複度が‘非常に’大きい、または、特異点の分布がある意味で‘非常に’規則的である、など）ため、個人的には、このような例は‘非常に’まれであると言わざるを得ない。

Remark 2.4. 以上は、 G が素数位数の巡回群である場合の結果であるが、 G が素数位数とは限らない巡回群の場合にも同様の手法で同様の結果が得られる。例えば $\#G = pq$ (p, q は相異なる素数) のときには、次が成り立つことがわかる。

$$\frac{\zeta_{\Gamma, pq}(pq) \zeta_{\Gamma, pq}(s)^{pq}}{\zeta_{\Gamma, pq}(ps)^q \zeta_{\Gamma, pq}(qs)^p} = \frac{\zeta_{\Gamma'}(s) \zeta_\Gamma(s)^{pq}}{\zeta_{\Gamma_1}(s)^q \zeta_{\Gamma_2}(s)^p}. \quad (2.6)$$

ここで、 Γ_1 と Γ_2 はそれぞれ指数が p, q なる Γ の正規部分群である。いま、

$$F(s) := \frac{\zeta_{\Gamma, pq}(s)^q}{\zeta_{\Gamma, pq}(qs)}, \quad G(s) := (2.6) \text{ の右辺}$$

とおくことで, (2.6) を次のように書き換えることができる.

$$\frac{F(s)^p}{F(ps)} = G(s).$$

なので, この場合にも, 帰納的に定理 2.1, 2.2 と同様の結果を得ることができる. G が巡回群でない場合にはいまのところよくわからない.

References

- [HW] Y. Hashimoto and M. Wakayama, *Splitting density for lifting about discrete groups*, math.NT/0501284.
- [He] D. Hejhal, *The Selberg trace formula of $PSL(2, \mathbb{R})$ I, II*, Springer Lec. Notes in Math. **548**, **1001** Springer-Verlag, (1976, 1983).
- [Iw] H. Iwaniec, *Spectral Methods of Automorphic Forms*, Graduate Studies in Mathematics, **53**, 2nd edition, American Mathematical Society, (2002).
- [Su] T. Sunada, *L-functions in geometry and some applications*, Curvature and topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985), 266–284, Lecture Notes in Math., **1201**, Springer, Berlin (1986).
- [VZ] A. B. Venkov and P. G. Zograf, *Analogues of Artin’s factorization formulas in the spectral theory of automorphic functions associated with induced representations of Fuchsian groups.*, Math. USSR Izvestiya, **21**(1983), 435-443.

橋本康史

〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

九州大学大学院数理学府数理学専攻

092-641-3131 (内線 8405)

e-mail:hasimoto@math.kyushu-u.ac.jp