表現論シンポジウム講演集, 2005
pp.103-108

p-進対称空間の部分表現定理

Subrepresentation theorem for p-adic symmetric spaces

加藤 信一（京大・理）
Shin-ichi Kato (Dept. of Math., Kyoto Univ.)

高野 啓児（明石高専 ）
Keiji Takano (Akashi College of Technology)

概 要

Jacquet の部分表現定理によると p 進簡約群の 任意の既約 admissible 表現は，適当な放物型部分群（の Levi 部分群）の既約尖点表現からの誘導表現に埋め込まれる．この定理の相対版=対称空間版について考察する．

Jacquet's subrepresentation theorem asserts that for any irreducible admissible representation π of a p-adic reductive group G there exists at least one parabolic P and one irreducible cuspidal ρ such that π may be embedded into $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$. A generalization of this theorem to the relative case (= symmetric space case) is disscused.

1 Jacquet の部分表現定理

F を非アルキメデス的局所体（例えば $F=\mathbb{Q}_p$），$|\cdot|_F$ をその絶対値とする．F 上定義された代数群を考える．以下「F 上定義された」は省く．F 上の代数群 $\mathbf{G}$ とその F-有理点のなす位相群 $\mathbf{G}(F)=G$ とを混用する．なおこの報告で扱う表現は断らない限りすべて $\mathbb{C}$ 上の認容表現*である．

G を簡約群とする．その放物型部分群 P に対して $P=MN$ で Levi 分解（N は P の巾単根基，$M\simeq P/N$ は Levi 部分群）を表すものとする．G の表現 (π,V) に対して，その（P に関する）Jacquet 加群 (π_P,V_P) を N が自明にはたらくような最大の商，つまり

$$V_P=V/V(N),\quad V(N):=\langle \pi(n)v-v \mid n\in N,\ v\in V\rangle$$

2005 年度表現論シンポジウム，11/16/2005

*G の表現 (π,V)（V は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間で $\pi\colon G\to GL(V)$）が 認容表現であるとは次の 2 条件，(1)（smooth 表現） 任意の $v\in V$ に対して固定化群 G_v は開部分群，(2) 任意のコンパクト開部分群 K に対して $\dim V^K<\infty$，をみたすことをいう．

で定める．自然な全射 $j_P: V \to V_P$ は P-準同型で，V_P は $M = P/N$ 加群になる．なお $V \rightsquigarrow V_P$ は完全関手である．

定義 1.1. G の表現 (π, V) がすべての放物型部分群 $P \neq G$ に対して $V_P = 0$ となるとき 尖点的であるという．

事実 1.2 (Jacquet の部分表現定理)**.** 任意の G の既約表現 π に対して，π が誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G \rho$ の部分表現となるような，放物型部分群 $P = MN$ と M の既約尖点表現 ρ が存在する．

略証　P を $(\pi_P, V_P) \neq 0$ となる極小の放物型部分群とする．極小性より π_P は P の Levi 部分群 M の 尖点表現である．τ を π_P の既約商とすると Jacquet 関手の完全性より τ も尖点的．後は Frobenius 相互律

$$(\star) \qquad \mathrm{Hom}_M(\pi_P, \tau) \simeq \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_P^G(\tau))$$

で左辺 $\neq 0$ による．□

2　相対尖点表現

前節の Jacquet の部分表現定理 1.2 の相対版＝対称空間版を考えたい．実数体上では Delorme [D] が大体対応する（大島による，Casselman の部分表現定理の対称空間版 [O] もある）．

以下，体 F は標数，剰余標数ともに $\neq 2$ とする．$\sigma\colon G \to G$ を非自明な対合（位数 2 の自己同型）として，$H = G^\sigma$ でその固定化群をあらわす．これから考えたいのは “対称空間” G/H 上の “表現” である．

定義 2.1. G の表現 (π, V) が 非自明な H-不変１次形式をもつとき，つまり $(V^*)^H \neq 0$ であるとき H-distinguished という．

H-distinguished 表現 (π, V) から，$\lambda \in (V^*)^H$，$v \in V$ を選んで作った G 上の関数

$$\phi_{\lambda,v}(g) = \langle \lambda, \pi(g^{-1})v \rangle \ (g \in G)$$

を (H, λ)-行列成分と呼ぶことにする．写像 $v \mapsto \phi_{\lambda,v}$ は G-準同型 $V \to C(G/H)$（G 上の右 H-不変関数全体） を引き起こす．特に既約 distinguished 表現は $C(G/H)$ の部分表現として実現されることになる．

例 2.2 (group case)**.** G を簡約群 G_0 の直積群 $G = G_0 \times G_0$，対合 σ を $\sigma(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ とすると，$H = \Delta(G_0)$（対角部分群）で $G/H \simeq G_0$. H-distinguished な G の既約表現 (π, V) は $\pi = \pi_0 \otimes \widetilde{\pi_0}$ の形（(π_0, V_0) は G_0 の既約表現，$\widetilde{\pi_0}$ はその反傾表現）で，自然な pairing $V_0 \times \widetilde{V_0} \ni (v, \tilde{v}) \mapsto$

$\langle v, \tilde{v} \rangle \in \mathbb{C}$ が $H = \Delta(G_0)$-不変１次形式を与える（$\dim(V^*)^H = 1$）．この場合の H-行列成分は，$c_{v,\tilde{v}}(g_0) := \langle \pi(g_0)v, \tilde{v} \rangle \in C(G_0) = C(G/H)$，つまり通常の行列成分である．

尖点表現の相対版＝対称空間版を定義したい．そのためにいくつか準備を行う．

2.3. G の放物型部分群 P において $\sigma(P)$ がその opposite になっているとき，これを σ-分裂であるという．例えば group case だと $P = P_0 \times P_0^- \subset G = G_0 \times G_0$ がそうである．ここで P_0^- は P_0 の opposite．このとき P の Levi 部分群 $M = P \cap \sigma(P)$ は σ-不変である．（以下 σ-分裂な放物型部分群の Levi 部分群として，常にこの M をとる．）この σ-分裂放物型部分群は対称空間 G/H の表現論，幾何においてしばしば重要な役割を果たす．（例えば [HH] の参考文献などを参照．）

2.4. さて Casselman [C]（Harish-Chandra）は行列成分の漸近挙動の解析を行うために Jacquet 加群の "canonical lifting" を用いている：(π, V) が G の表現，K が G の十分小さな開コンパクト部分群で，放物型部分群 $P = MN$ について岩堀分解 $K = (N^- \cap K)(M \cap K)(N \cap K)$ をみたすものとする．A を P の分裂成分（P の根基の極大 F-分裂トーラス＝M の中心の極大 F-分裂トーラス）として，

$$A^-(\epsilon) := \{a \in A \mid |\alpha(a)|_F \leq \epsilon \ (\ \alpha \text{ は } N \text{ に現れる任意の } F\text{-ルート})\}$$

とおく（$\epsilon \ \leq 1$）．このとき，十分小さい ϵ について $a \in A^-(\epsilon)$ であるならば，$j_P \colon \pi(KaK)V \to V_P^{M\cap K}$ が同型になる．そこで $u \in V_P^{M\cap K}$ の $\pi(KaK)V$ での逆元 $v = j_P^{-1}(u)$ を "canonical lifting" と呼ぶ．（v は K の選び方によっている．）実は $u \in V_P$，$\tilde{u} \in \widetilde{V}_{P^-}$ の "canonical lifting" $v \in V$，$\tilde{v} \in \widetilde{V}$ の取り方によらず $\langle v, \tilde{v} \rangle$ は一定で，$\langle u, \tilde{u} \rangle_M := \langle v, \tilde{v} \rangle$ は $V_P \times V_{P^-}$ 上の M-不変双１次形式になる．（さらに $v \in V$，$\tilde{v} \in \widetilde{V}$，$u = j_P(v) \in V_P$，$\tilde{u} = j_{P^-}(\tilde{v}) \in \widetilde{V}_{P^-}$ に対して，十分小さい $\epsilon > 0$ をとると

$$\langle \pi(a)v, \tilde{v} \rangle = \langle \pi_P(a)u, \tilde{u} \rangle_M \quad (\forall a \in A^-(\epsilon))$$

が成立するなど，もとの双一次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ の漸近挙動が双１次形式 $\langle\ ,\ \rangle_M$ のそれに反映される．）

2.5. 以上の双１次形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ の構成を group case の立場から考える（G, P を G_0, P_0 等で読み替える）と，$G = G_0 \times G_0$ の表現 $V = V_0 \otimes \widetilde{V_0}$ 上の $H = G^\sigma = \Delta(G)$-不変１次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ に対して，その σ-分裂放物型部分群 $P = P_0 \times P_0^-$（$M = M_0 \times M_0$ は σ-不変な Levi 部分群）に関す

る Jacquet 加群 $V_P = (V_0)_P \otimes (\widetilde{V_0})_{P^-}$ 上の $M \cap H = M^\sigma = \Delta(M_0)$-不変１次形式 $\langle\ ,\ \rangle_M$ が定まったことになる．

これを一般化して，H-distinguished 表現 V，σ-分裂放物型部分群 $P = MN$ に対して，線型写像 $r_P\colon (V^*)^H \to (V_P^*)^{M\cap H}$ が $r_P(\lambda)(u) = \lambda(v)$（$\lambda \in (V^*)^H, v \in V$ は $u \in V_P$ の "canonical lifting"）により（well-defined に）定まる．

定義 2.6. H-distinguished 表現 V が全ての σ-分裂放物型部分群 $P \neq G$ に対して $r_P((V^*)^H) = 0$ であるとき，V を H-相対尖点的という．

注意 2.7. group case では $\pi = \pi_0 \otimes \widetilde{\pi_0}$ が H-相対尖点的 $\Leftrightarrow$ π_0 が（通常の意味で，G_0 の表現として）尖点的，である．

3　相対部分表現定理

次の尖点表現の特徴付けはよく知られている．（こちらを尖点表現の定義に用いている文献も多い.）

事実 3.1 (Jacquet)**.** G の表現が尖点的であることと，その全ての行列成分 $c_{v,\tilde{v}}$ ($v \in V$, $\tilde{v} \in \widetilde{V}$) の台が mod Z でコンパクトであることとは同値である．

ここで Z は G の分裂成分（中心の最大 F-分裂トーラス）である．この事実の G/H での類似を考えよう．

σ-分裂放物型部分群で極小なもの $P_{\min}$ を固定する．$A_{\min}$ を $P_{\min}$ の分裂 component として，S で $A_{\min}^{-\sigma} = \{s \in A_{\min} \mid \sigma(s) = s^{-1}\}$ の連結成分を表す．S は極大 F-分裂, σ-分裂トーラスになるが，これに対して

$$S^- = \{s \in S \mid |\alpha(s)|_F \leq 1\ (\alpha \text{ は対称空間の任意の正の } F\text{-ルート})\}$$

とおく．$M_{\min} = Z_G(S)$ は $P_{\min}$ の σ-不変 Levi 部分群になる．

H-行列成分の漸近挙動を調べるために次の一般的に成立すると思われる仮定（相対 Cartan 分解）を置く．これは group case（Bruhat-Tits による普通の Cartan 分解）をはじめ，$GL_n/O_n, GL_{2n}/Sp_{2n}$ 等々，多くの場合に成立することがわかっている ([SS] 所収の広中，宇澤の報告なども参照).

仮定 3.2. G の（極大）コンパクト部分群 K と $(\mathbf{HM}_{\min})(F)$ の有限部分集合の族 $\{\Gamma_s\}_{s\in S^-}$ で

$$G = \bigcup_{s\in S^-} H \cdot \Gamma_s \cdot s \cdot K \tag{\#}$$

となるようなものが存在する．

定理 3.3. 仮定 (#) の下で考える．(π, V) を H-distinguished 表現とするとき $\lambda \in (V^*)^H$ に対して，次の 2 条件 (1), (2) は同値である．

(1)　全ての σ-分裂放物型部分群 P について $r_P(\lambda) = 0$；

(2)　全ての (H, λ)-行列成分 $\phi_{\lambda,v} \in C(G/H)$ $(\forall v \in V)$ の台が $\mathrm{mod} Z$ でコンパクト，つまり G 上の関数 $\phi_{\lambda,v}$ の台が（右から）$\mathrm{mod} ZH$ でコンパクト．

証明は 3.1 と同様になされる．

系 3.4. 仮定 (#) の下で考える．H-distinguished 表現　(π, V) が相対尖点的であることと，全ての (H, λ)-行列成分 $\phi_{\lambda,v} \in C(G/H)$ $(\forall \lambda \in (V^*)^H,\ \forall v \in V)$ の台が $\mathrm{mod} Z$ でコンパクトであることとは同値である．

定理 3.5 (相対部分表現定理)**.** 仮定 (#) の下で考える．任意の G の H-distinguihed な既約表現 π に対して，π が誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G \rho$ の部分表現となるような，σ-分裂放物型部分群 $P = MN$ $(M = P \cap \sigma(P))$ と M の既約 $M \cap H$-相対尖点表現 ρ が存在する．

略証　$0 \neq \lambda \in (V^*)^H$ に対して $(V_P^*)^{M \cap H} \ni r_P(\lambda) \neq 0$ となるような極小の σ-分裂放物型部分群 $P = MN$ を取ると，(π_P, V_P) は $M \cap H$-distinguished．しかも $M \cap H$-distinguished な既約商 ρ が <u>取れる</u>．Frobenius 相互律 $(\star)$ から π は $\mathrm{Ind}_P^G \rho$ の部分表現．見つけてきた ρ が相対尖点的でなければ ρ に対してこの作業を続ける．このようにして最後には相対尖点表現に到達する．　$\square$

例 3.6 (group case)**.** 2.2, 2.3, 2.5, 2.7 の記号を使うと，相対部分表現定理は，任意の G_0 の既約表現 π_0 に対して

$$\pi_0 \otimes \widetilde{\pi_0} \ \hookrightarrow\ \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\tau_0) \otimes \mathrm{Ind}_{P_0^-}^{G_0}(\widetilde{\tau_0})$$

となるような $M_0 = P_0 \cap P_0^-$ の既約尖点表現が存在すること（Jacquet の部分表現定理の帰結）を表している．

参考文献

[C]　W. Casselman, Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups. preprint
（ `http://www.math.ubc.ca/~cass/research.html` に Paul Sally らによる TEX 版あり）

[D]　P. Delorme, Injection de modules sphériques pour les espaces symétriques réductifs dans certaines représentations induites. in: Noncommutative harmonic analysis and Lie groups, pp. 108–143, Lecture Notes in Math., 1243, 1987

[HH] A. G. Helminck and G. F. Helminck, A class of parabolic k-subgroups associated with symmetric k-varieties, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 4669–4691

[O] 大島利雄, 半単純対称空間上の調和解析 数学 37 (1985), 97–112

[SS] 第 3 回整数論サマースクール報告集「等質空間と保型形式」(1995)

Errata for the proceedings of Symposium on Representation Theory 2005

- “p 進対称空間の部分表現定理 — 高野啓児氏との共同研究（Subrepresentation theorem for p-adic symmetric spaces — joint work with Keiji Takano）” $\cdots$ 加藤 信一 (Shin-ichi Kato)：

  Page 106, line 2 from the bottom:

  $$G = \bigcup_{s \in S^-} H \cdot \Gamma_s \cdot s \cdot K \;\longrightarrow\; G = \bigcup_{s \in S^-} Z \cdot H \cdot \Gamma_s \cdot s \cdot K$$