表現論シンポジウム講演集, 2005
pp.64-69

錐上に台をもつ関数のラドン変換について
(Radon transform of a function supported on a cone)

京都大学・数理解析研究所　真野元 (Gen Mano)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University
gmano@kurims.kyoto-u.ac.jp

概要

Let $C := \{x \in \mathbb{R}^{p+q} \setminus \{0\} : Q(x) = 0\}$ be the conical subvariety in $\mathbb{R}^{p+q}$ associated to a quadratic form $Q(x) := x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$. We regard $C_0^\infty(C)$ as a subspace of distributions on $\mathbb{R}^{p+q}$ with compact support contained in C. This talk will concern with the image of $C_0^\infty(C)$ under the Radon transform R, particularly, with the singularity of $(Rf)(\xi, t)$ at $t = 0$. The differentiability of $(Rf)(\xi, t)$ at $t = 0$ is closely connected to the analysis on the minimal unitary representation of the indefinite orthogonal group $O(p+1, q+1)$.

1　主結果

$p, q > 0$ を自然数とし、$x = (x_1, \cdots, x_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q}$ に対して

$$Q(x) := x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

を符号 (p, q) の $\mathbb{R}^{p+q}$ 上の不定値二次形式とする。この二次形式 Q に対し、$\mathbb{R}^{p+q}$ の部分多様体 C を Q の零点集合

$$C := \{\zeta \in \mathbb{R}^{p+q} \setminus \{0\} : Q(\zeta) = 0\}$$

として定義すると、C は錐になる。$\delta(Q)$ を二次形式 Q に付随する（C 上の台を持つ）デルタ関数とする（[1, Chap. III] 参照)。$p + q > 2$ ならば、$\delta(Q)$ は C 上に台を持つ超関

数であり、写像

$$T : C_0^\infty(C) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{p+q}), \quad f \mapsto f\delta(Q)$$

は連続な埋め込み写像になる。ここで、$C_0^\infty(C)$ は C 上コンパクト台を持つ C^∞ 級関数の空間、$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{p+q})$ は、$\mathbb{R}^{p+q}$ 上コンパクト台を持つ超関数の空間を表わす。

さて、$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q}$ に対して、$\mathbb{R}^{p+q}$ 上の線型形式 $\langle \xi, x \rangle$ を

$$\langle \xi, x \rangle := \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_{p+q} x_{p+q}$$

で定め、コンパクト台を持つ超関数 Tf の**ラドン変換**

$$R(Tf)(\xi, t) := \int_{\mathbb{R}^{p+q}} (Tf)(x)\delta(t - \langle \xi, x \rangle)dx, \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{1.1}$$

を考える（超関数のラドン変換については、例えば [2, 3] 参照)。ただし、$\delta(x)$ は一変数のデルタ関数である。このとき、ラドン変換 $R(Tf)(\xi, t)$ の（t に関する）偏微分可能性を考えよう。$t \neq 0$ なら、任意の $f \in C_0^\infty(C)$ に対して、ラドン変換 $R(Tf)(\xi, t)$ は $(\mathbb{R}^{p+q} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ で C^∞ 級であることが容易にわかる。しかし、$t = 0$ においては、特異性が現われる。次が本講演の主結果である。

定理 A ($\min(p, q) = 1$ の場合)**.** p, q どちらか一方が 1 ならば、ラドン変換 $R(Tf)(\xi, t)$ が $t = 0$ でもはや連続でなくなるような $\xi \in C, f \in C_0^\infty(C)$ が存在する。

定理 B ($p, q > 1$ の場合)**.** $p, q > 1$ とする。

1) ラドン変換 $R(Tf)(\xi, t)$ は、すべての $\xi \in C$ に対して、$t = 0$ において $[\frac{p+q-5}{2}]$ 回偏微分可能である。ただし、$[\cdot]$ はガウス記号を表わす。

2) $t = 0$ で $R(Tf)(\xi, t)$ が（t について）$[\frac{p+q-3}{2}]$ 回偏微分できないような $\xi \in C, f \in C_0^\infty(C)$ が存在する。

定理 A, B の意味を標語的に述べるなら、「**超関数 $\delta(Q)$ の特異性が、ラドン変換の正則性に反映する**」と言えるだろう。

2　定理 A について

錐 C は、p, q によって位相的性質が異なる。p, q どちらかが 1 ならば、（いまそれを $q = 1$ とすると）錐 C は、二つの連結成分

$$C_\pm := \{(x_1, \cdots, x_{p+1}) \in C : x_{p+1} \gtrless 0\}$$

の非連結和として表わせる。

定理 A の ξ, f は、C の非連結性を用いて構成できる。すなわち、$\xi = (1, 0, \cdots, 0, 1)$ とすると、(1.1) の被積分関数の台は、

$$\mathrm{supp}\Big((Tf)(x)\delta(t - \langle\xi, x\rangle)\Big) \subset C_+ \quad t > 0 \text{ のとき}$$
$$\mathrm{supp}\Big((Tf)(x)\delta(t - \langle\xi, x\rangle)\Big) \subset C_- \quad t < 0 \text{ のとき}$$

であることがわかるので、台が C_+ に含まれるような（正値）C^∞ 級関数 f を取って、

$$\lim_{t \to +0} R(Tf)(\xi, t) \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{t \to -0} R(Tf)(\xi, t) = 0$$

を満たすようにすることができる。

定理 B の場合、つまり $p, q > 1$ の場合、C は非連結ではなく連結であるので、同じような位相的方法は使えず、解析的方法が必要となる（§5 参照)。

3　表現論的背景

定理の表現論的背景について触れておこう。§1 の自然数の組 p, q について、$p + q$ が 6 以上の偶数であるとする。

$$w_0 := \begin{pmatrix} I_{p+1} & 0 \\ 0 & -I_{q+1} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

として、不定値直交群を

$$G := O(p+1, q+1) = \{g \in GL(p+q+2, \mathbb{R}) : {}^t g w_0 g = w_0\}.$$

として定義される行列群とすると、G の**極小表現**と呼ばれるユニタリ表現 π がヒルベルト空間 $L^2(C, d\mu)$ 上に実現される（ただし、$d\mu$ は、$O(p, q)$ 不変な C 上の測度である)。$O(p+1, q+1)$ の極小表現は、90 年代に Kostant, Binegar-Zierau, Huang-Zhu, Kobayashi-Ørsted になどによって研究されてきたが、[6] で $L^2(C, d\mu)$ 上への実現（**L^2-モデル**）が行われた。この L^2-モデルでは、ユニタリ内積が L^2-内積と一致する点が非常にはっきりしていてわかりやすい反面、群の作用については、極大放物型部分群 P の作用までしか具体的にわかっていなかった（作用は掛け算作用素と底空間 C への作用の引き戻しによって表わされる)。そこで、群全体の作用を書き下すことが問題として起こってくる。このとき、w_0 は P の「反転」元と呼ばれる元で、P と w_0 によって群 G が生成

されることがわかるので、$\pi(w_0)$ を、積分変換

$$\pi(w_0)f(\xi) = \int_C K(\xi,x)f(x)d\mu(x) \tag{3.2}$$

で表わし、核関数 $K(\xi,x)$ を具体的に決定することを考える。

この問題の解答は [4] で述べる。核関数は、

$$\Phi_{p,q}(t) := \begin{cases} t_+^{-\frac{p+q-4}{4}} J_{\frac{p+q-4}{2}}(2\sqrt{t_+}) \quad \min(p,q)=1 \text{ のとき} \\ t_+^{-\frac{p+q-4}{4}} Y_{\frac{p+q-4}{2}}(2\sqrt{t_+}) + \frac{2(-1)^{\frac{p+q-2}{2}}}{\pi} t_-^{-\frac{p+q-4}{4}} K_{\frac{p+q-4}{2}}(2\sqrt{t_-}) \\ \qquad p,q>1 \text{ かつどちらも偶数のとき} \\ t_+^{-\frac{p+q-4}{4}} J_{\frac{p+q-4}{2}}(2\sqrt{t_+}) - \sum_{l=0}^{\frac{p+q-6}{2}} \frac{(-1)^l}{\Gamma(\frac{p+q-4}{2}-l)} \delta^{(l)}(t) \\ \qquad p,q>1 \text{ かつどちらも奇数のとき} \end{cases} \tag{3.3}$$

を用いて、

$$K(\xi,x) \equiv K(p,q;\xi,x) := c_{p,q}\Phi_{p,q}(\langle \xi,x\rangle) \quad (\xi,x\in C) \tag{3.4}$$
$$c_{p,q} := \frac{(-1)^{\frac{p(p+3)}{2}}}{2^{\frac{p+q}{4}}\pi^{\frac{p+q-2}{2}}}$$

と表わすことができる。ただし、$J_\nu(z)$ はベッセル関数、$Y_\nu(z), K_\nu(z)$ は変形ベッセル関数である。

4　ラドン変換との関係

核関数が内積を変数とする一変数関数で表わせることから、(3.2) の右辺の積分は、ラドン変換を使って、

$$\begin{aligned} c_{p,q}\int_C \Phi_{p,q}(\langle\xi,x\rangle)f(x)d\mu(x) =& c_{p,q}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} \Phi_{p,q}(t)R(Tf)(\xi,t)dt \\ =& c_{p,q}\langle \Phi_{p,q}, R(Tf)(\xi,\cdot)\rangle \end{aligned} \tag{4.1}$$

と表わすことができる。ここで、$\Phi_{p,q}(t)$ は、定義式 (3.3) より、特異点を原点で持つ超関数である。$O(p+q,q+1)$ の極小表現 π の理論から、(4.1) のペアリングは well-defined であることがわかるので、$R(Tf)(\xi,t)$ は $t=0$ において少なくとも $\frac{p+q-6}{2}$ 回微分可能であることがわかる。しかし、定理 B(2) は、**実は** $[\frac{p+q-5}{2}] = \frac{p+q-6}{2}$ **回が、偏微分可能なぎりぎりの回数である**ことを主張している。なお、定理 B (1), (2) 両方とも、**表現論を全く用いずに**証明することができる。

式 (4.1) は、積分微分変換 (3.2) を平面波分解した式とみなすことができる（下記の注意参照)。

注意 G の極小表現の L^2-モデルに関して、古くから研究されている場合であるメタプレクティック群 $G' := \widetilde{Sp}(n, \mathbb{R})$（シンプレクティック群 $Sp(n, \mathbb{R})$ の二重被覆群）の Segal-Shale-Weil 表現の Schrödinger モデル $(\varpi, L^2(\mathbb{R}^n))$ において、式 (4.1) に相当するものを付記しておく。G' は Siegel 放物型部分群 P_{Siegel} と「反転」元

$$w_0' := \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

によって生成されるが、P_{Siegel} の作用は掛け算作用素と底空間 $\mathbb{R}^n$ への作用によって表わされ、$\varpi(w_0')$ はフーリエ変換、すなわち

$$\varpi(w_0')f(\xi) = \big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\big)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}\langle \xi, x\rangle} f(x)dx \tag{4.2}$$

として $L^2(\mathbb{R}^n)$ に作用している。よって、(4.2) の右辺の積分は、ラドン変換を用いて、

$$\big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\big)^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) Rf(\xi, t)dt = \big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\big)^{\frac{n}{2}} \langle \Phi, (Rf)(\xi, \cdot)\rangle$$
$$\Phi(t) := e^{\sqrt{-1}t}$$

と表わされる。これは、フーリエ変換の**平面波分解**と呼ばれるものである。この意味で、式 (4.1) は、積分微分変換 (3.2) を平面波分解した式とみなせる。

5 証明について

定理 A の証明は、§2 で説明したように、錐 C の位相的条件を用いることによって行うことができる。

定理 B の証明は、特殊関数（**Appell の二変数超幾何関数**）を用いて実際に積分 (1.1) を実行することによって行う。$t = 0$ におけるラドン変換 $R(Tf)(\xi, t)$ の漸近挙動は、特殊関数の漸近展開によって精密に調べることができる（この計算によって、p, q の偶奇にしたがって、ラドン変換の振る舞いが異なることが明らかになる)。

参考文献

[1] I.M. Gelfand and G.E. Shilov, *Generalized Functions*, **I**, Academic Press, New York and London, 1964.

[2] I.M. Gelfand, M.I. Graev and N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions*, **V**, Academic Press, New York and London, 1966.

[3] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, New York and London, 1984.

[4] T. Kobayashi and G. Mano, Integral formula of the inversion for the minimal representation of $O(p,q)$, *in preparation*

[5] T. Kobayashi and G. Mano, Radon transform of a function supported on a cone, *in preparation*

[6] T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on the minimal representation of $O(p,q)$ III. Ultrahyperbolic equations on $\mathbb{R}^{p-1,q-1}$, *Adv. Math.* **180** (2003), 551–595