

ランク 1 の tangential 対称空間の コンパクト Clifford-Klein 形と可除環について (On compact Clifford-Klein forms of rank one tangential symmetric spaces and division algebra)

京都大学数理解析研究所 COE 研究員 吉野 太郎 (Taro Yoshino)

Abstract

小林俊行によって 1990 年頃から始められた Clifford-Klein 形の研究には、今では多くの異なる分野 — 特性類、シンプレクティック幾何、エルゴード理論等の手法が用いられている。一方、Hurwitz-Radon らにより発見された Hurwitz-Radon 数もまた、多くの異なる対象 — 可除環、球面上のベクトル場、 K -理論等と結び付いている。この講演では、これら二つの対象の間の新たな結び付きを描きたい。

より正確には、ランク 1 の tangential 対称空間 (あるいは等質空間) のコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題を、可除環の存在問題や Hurwitz-Radon 数、 K -理論に帰着し解決する。

Toshiyuki Kobayashi started the study of Clifford-Klein forms at about 1990. Now, many method — characteristic class, symplectic geometry and ergodic theory are used for it. On the other hand, Hurwitz and Radon discovered Hurwitz-Radon number. Now, it is also related to many objects — division algebra, vector fields on sphere and K -theory. In this lecture, we see a new relation between Clifford-Klein forms and Hurwitz-Radon number.

More precisely, the existence problem of a compact Clifford-Klein form of rank one tangential symmetric space (or homogeneous space) is reduced to the existence problem of division algebra, Hurwitz-Radon number or K -theory.

1 コンパクト Clifford-Klein 形

まず、等質空間の Clifford-Klein 形を定義し、このテーマにおける重要な問題 (問題 2) を述べる事から始めよう。

$M = G/H$ を等質空間とし、 Γ を G の離散部分群とする。 Γ の M への作用が固有不連続かつ固定点自由なとき、写像

$$\pi : M \longrightarrow \Gamma \backslash M$$

は被覆写像となり、 π が滑らかな写像となるように $\Gamma \backslash M$ に多様体の構造を入れることができる。

定義 1. このとき、商多様体 $\Gamma \backslash M$ を M の Clifford-Klein 形という。

Borel はリーマン対称空間にコンパクトな Clifford-Klein 形が常に存在することを示した。一方、3 次元以上のローレンツ多様体にはコンパクトな Clifford-Klein 形は存在しない (Calabi-Markus 現象)。

より一般の等質空間に関して、小林は 1990 年頃よりコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題 (及び固有不連続な作用) の研究を始めた。彼は『数学の最先端 21 世紀への挑戦』の中の論説で、それまでの研究の概要を解説した上で次のような問題を提起している。

問題 2. コンパクトな Clifford-Klein 形を持つ対称空間 (あるいは等質空間) をすべて決定せよ。

この問題に対する部分的な答えとして、次が知られている。

事実 3. H がコンパクトならば等質空間 G/H は常にコンパクト Clifford-Klein 形をもつ。また、 G/H が群多様体 $(G' \times G' / \text{diag } G')$ に局所同型ならばコンパクト Clifford-Klein 形をもつ。

従って、問題 2 を考える上で、 H が非コンパクトであり、 G/H が群多様体に局所同型でない等質空間が興味深い対象である。そのような等質空間のうち、特に簡約型対称空間に限ると、コンパクト Clifford-Klein 形を持つことが示されているものは、以下のリストにあるものが全てである。

1. $SU(2, 2n)/Sp(1, n),$	2. $SO(2, 2n)/U(1, n),$
3. $U(2, 2n)/U(1, 2n),$	4. $SO(2, 2n)/SO(1, 2n),$
5. $SO(4, 4n)/SO(3, 4n),$	6. $SO(8, 8)/SO(7, 8)$
7. $SO(4, 4)/SO(4, 1) \times SO(3),$	8. $SO(4, 3)/SO(4, 1) \times SO(2)$
9. $SO(8, \mathbb{C})/SO(7, \mathbb{C}),$	10. $SO(8, \mathbb{C})/SO(7, 1)$
11. $SO^*(8)/U(3, 1),$	12. $SO^*(8)/SO^*(6) \times SO^*(2)$

逆に、その他の多くの簡約型対称空間にはコンパクト Clifford-Klein 形が存在しないことが示されているが、両者の結果にはまだ「開き」がある。例えば $O(p+1, q)/O(p, q)$ といった簡約型等質空間の系列に対してコンパクト Clifford-Klein 形が存在する必要十分条件を与えることは未だ出来ていない。

実際、次の二つの予想は十分性は既に証明されているものの、必要性は未解決である。

予想 4. 対称空間 $O(p+1, q)/O(p, q)$ がコンパクト Clifford-Klein 形を持つ必要十分条件は (p, q) が下のリストに含まれることである ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$)。

p	$\mathbb{N}$	0	1	3	7
q	0	$\mathbb{N}$	$2\mathbb{N}$	$4\mathbb{N}$	8

予想 5. 対称空間 $O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$ がコンパクト Clifford-Klein 形を持つ必要十分条件は $n = 1, 3, 7$ である。

一方、tangential 等質空間 (定義 7) においては、コンパクトな Clifford-Klein 形の存在/非存在の判定が比較的容易であり、幾つかの系列については必要十分条件を決定することが出来ている。

この講演では、適当な線形空間 V と非ゼロ元 $x \in V$ によって、 $G \subset GL(V)$, $H = G_x$ (固定部分群) と書けるような簡約型等質空間 G/H の系列に対して、その tangential 等質空間がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つ必要十分条件を決定する (定理 22)。具体的には、次の 10 の系列である。

1. $GL(n+1, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R}),$	2. $GL(n+1, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{C}),$	3. $GL(n+1, \mathbb{H})/GL(n, \mathbb{H})$
4. $O(p+1, q)/O(p, q),$	5. $U(p+1, q)/U(p, q),$	6. $Sp(p+1, q)/Sp(p, q)$
7. $O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C}),$	8. $O^*(2n+2)/O^*(2n),$	9. $Sp(n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C}),$
10. $Sp(n+1, \mathbb{R})/Sp(n, \mathbb{R}).$		

証明には、ある種の可除環の (非) 存在定理、および K-理論が用いられる。

注意 6. この講演のタイトルは『対称空間の...』となっているが、実際にはもう少し広い等質空間を取り扱っている。というのも、元々対称空間に対して用いたものと同じ手法が $GL(n+1, \mathbb{F})/GL(n, \mathbb{F})$ の様に (対称空間に近いが) 対称空間ではない等質空間に対しても用いられることが最近になって分かった為である。

なお、対称空間 $GL(n+1, \mathbb{F})/GL(n, \mathbb{F}) \times GL(1, \mathbb{F})$ の tangential 対称空間にはコンパクト Clifford-Klein 形は存在しない。また、対称空間 $O^*(2n+2)/O^*(2n) \times O^*(2)$ の tangential 対称空間にコンパクト Clifford-Klein 形が存在することは $O^*(2n+2)/O^*(2n)$ の tangential 対称空間にコンパクト Clifford-Klein 形が存在することと同値である。

2 Tangential 等質空間

問題 2 に関する今までの研究は、主に簡約型等質空間に対して行われてきた。一方、この講演では tangential 等質空間に対して問題 2 を考える。簡約型等質空間に比べ tangential 等質空間においては、コンパクト Clifford-Klein 形の存在/非存在が容易に調べられ、いくつかの系列においては必要十分条件を完全に決定することができる。まず、簡約型リー群のカルタン運動群を定義し、それを用いて tangential 等質空間を定義しよう。

G を簡約型リー群とし θ をそのカルタン対合とする。 G のリー環 $\mathfrak{g}$ は $d\theta$ の固有空間に $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ と分解する (リー環 $\mathfrak{g}$ のカルタン分解)。このとき、 K を $\mathfrak{k}$ の解析的部分群とすると元の簡約型リー群 G は $G = \exp(\mathfrak{p}) \cdot K$ と書ける (リー群 G のカルタン分解)。一方、半直積群

$$G_\theta := K \ltimes_{\text{Ad}} \mathfrak{p}$$

は G のカルタン運動群と呼ばれる。 G と G_θ は自然な写像

$$\Phi_\theta : G \rightarrow G_\theta, \quad e^X k \mapsto (k, X)$$

によって、多様体として同型となるが、一般にリー群としては同型でなく、 G_θ はもはや簡約型リー群でない。

大まかに言えば簡約型等質空間 G/H に対して、 G_θ/H_θ をその tangential 等質空間という。より正確には、次のように構成する。

G/H を簡約型等質空間とする。適当な $g \in G$ を取ることで gHg^{-1} を θ 不変な部分群にできるので、以下では H を始めから θ 不変とする。このとき、 $(\Phi_\theta$ は群準同型写像でないにもかかわらず) $\Phi_\theta(H)$ は G_θ の閉部分群となり、さらに H のカルタン運動群 H_θ と自然に同型となる ($H_\theta \xrightarrow{\sim} \Phi_\theta(H) \subset G_\theta$)。この同型を通じて H_θ を G_θ の部分群と見なすと、等質空間 G_θ/H_θ を考えることができる。

定義 7. 上のように構成した G_θ/H_θ を G/H の tangential 等質空間という。特に、 G/H が対称空間の場合、 G_θ/H_θ もまた対称空間となる。このとき G_θ/H_θ を G/H の tangential 対称空間ともいう。

例 8. G/K をリーマン対称空間とする。即ち、 K を G の極大コンパクト群とする。このとき G/K の tangential 対称空間は $(K \ltimes \mathfrak{p})/K = \mathfrak{p}$ となる。

注意 9. 簡約型等質空間 G/H と tangential 等質空間 G_θ/H_θ は多様体としては同型である ($G/H \simeq G_\theta/H_\theta$)。しかし、両者の Clifford-Klein 形は 1 対 1 には対応しない。それは離散群 Γ の取り得る範囲が異なることによる (簡約型では $\Gamma \subset G$, tangential では $\Gamma \subset G_\theta$ でなければならない)。

3 可除環

この講演のもう一つのキーワードである可除環を定義しよう。実は、 $(1, 2, 4, 8)$ -定理の名で知られる可除環の次元に関する結果 (定理 13) は、ある種の tangential 対称空間がコンパクト Clifford-Klein 形を持つための必要条件を与えることになる。

線形空間 $V = \mathbb{R}^n$ に積 $(x, y) \mapsto xy$ が定義され、 $a, b \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in V$ に対し分配律

$$(ax + by)z = a \cdot xy + b \cdot yz, \quad x(ay + bz) = a \cdot xy + b \cdot xz$$

が成り立つとき V を実代数という。換言すれば、実代数 V とは双線形写像

$$f : V \times V \rightarrow V$$

が定められている線形空間に他ならない。

注意 10. 実代数の公理に単位元の存在を含めることもあるが、ここではその存在を仮定しない。また、線形空間は常に有限次元とする。

実代数 V の任意の非ゼロ元が可除元であるとき、 V を可除環という。即ち、実代数 V が可除環であるとは、 $x, y \in V$ に対し

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } y = 0$$

が成り立つことをいう。

例 11. 実数 ($\mathbb{R}$)、複素数 ($\mathbb{C}$)、四元数 ($\mathbb{H}$)、八元数 ($\mathbb{O}$) は可除環である。

可除環の次元に関して、次の結果が知られている。

定理 12 (Hopf). 可換な可除環は高々 2 次元である。

定理 13 (Kervaire, Milnor). 可除環の次元は 1, 2, 4 または 8 である。

注意 14. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ はそれぞれ 1, 2, 4, 8 次元の可除環であるが、逆に可除環がこれらに限る訳ではない。実際、無限に多くの可除環が存在する。一方、可換な可除環のうち単位元を持つものは $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ に限り、一般の可除環のうち交代 2 次代数となるものは $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ に限ることが知られている。

ある種の tangential 等質空間のコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題は、可除環の存在問題に帰着することができる。補題の証明は後で触れることにし、先に結果を見ていこう。これらの結果は今回の主定理の一部である。

補題 15. $GL(n+1, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R})$ の tangential 等質空間がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つことは、 $n+1$ 次元の可換な可除環が存在することと同値である。

補題 16. $O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$ の tangential 対称空間がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つならば $n+1$ 次元の可除環が存在する。

補題 17. $O^*(2n+2)/O^*(2n)$ の tangential 等質空間がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つならば $2n+2$ 次元の可除環が存在する。

この三つの補題と上記の二つの定理とにより、 $GL(n+1, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R})$ 、 $O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$ および $O^*(2n+2)/O^*(2n)$ の tangential 等質空間がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つ必要条件是、それぞれ $n=1$ 、 $n=1, 3, 7$ および $n=1, 3$ となることが分かる (実は、後述するように十分条件でもある)。特に、二つ目の結果は予想 5 の tangential 版を解決したことになる。この結果と予想 5 の主張とを比較すると、 $n=1, 3, 7$ という値自体は一致している事が分かる。これは単なる偶然なのか、あるいは数学的に理由を説明できることなのか現在は分かっていない。

4 Hurwitz-Radon 数

この節で述べる Adams の定理 (定理 20) は前節の (1, 2, 4, 8)-定理の一般化である。この定理は $O(p+1, q)/O(p, q)$ の tangential 対称空間について、コンパクト Clifford-Klein 形が存在するための必要十分条件を与えると共に、その他多くの tangential 等質空間のコンパクト Clifford-Klein 形が存在するための必要条件を与える。Adams の定理を述べるために、可除環の自然な拡張として non-singular な双線形写像および non-singular な部分空間を定義しよう。

定義 18. V_1, V_2, V_3 を線形空間とする。双線形写像 $f: V_1 \times V_2 \rightarrow V_3$ が $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ に対して、

$$f(v_1, v_2) = 0 \Rightarrow v_1 = 0 \text{ or } v_2 = 0$$

をみたすとき、 f は non-singular であるという。

定義 19. V_1, V_2 を線形空間とする。 $\text{End}(V_1, V_2)$ の部分空間 W が $w \in W, v \in V_1$ に対して、

$$w(v) = 0 \Rightarrow w = 0 \text{ or } v = 0$$

をみたすとき、 W は non-singular であるという。

双線形写像 $f : V_1 \times V_2 \rightarrow V_3$ に対して、 $W := \{f(v, \cdot) : V_2 \rightarrow V_3 \mid v \in V_1\}$ とおけば、 f が non-singular な双線形写像であることと W が non-singular な部分空間であることは同値である。

また、 $M(n, \mathbb{F})$ を $\mathbb{F}$ 上の $n \times n$ 行列全体とし、

$$\begin{aligned} M_H(n, \mathbb{F}) &:= \{X \in M(n, \mathbb{F}) \mid X^* = X\} \\ M_A(n, \mathbb{F}) &:= \{X \in M(n, \mathbb{F}) \mid X^* = -X\} \end{aligned}$$

とおく。但し、 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ のとき $X^* := {}^t X$ 、 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ のとき $X^* := {}^t \overline{X}$ 、 $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ のとき $X^* := {}^t \overline{X}$ (四元数の共役) とする。

Adams は $M(n, \mathbb{F}), M_H(n, \mathbb{F})$ 内の non-singular な部分空間の最大次元を具体的に決定した。すなわち、

$$\begin{aligned} \rho(n, \mathbb{F}) &:= \max\{\dim W \mid W \subset M(n, \mathbb{F}) \text{ は non-singular な実部分空間}\} \\ \rho_H(n, \mathbb{F}) &:= \max\{\dim W \mid W \subset M_H(n, \mathbb{F}) \text{ は non-singular な実部分空間}\} \end{aligned}$$

とおいたとき、次が成り立つ。

定理 20 (Adams). $\rho(n, \mathbb{F}), \rho_H(n, \mathbb{F})$ は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \rho(n, \mathbb{R}) &= \rho(n), & \rho(n, \mathbb{C}) &= \nu(n) + 2, & \rho(n, \mathbb{H}) &= \rho(8n) - 4, \\ \rho_H(n, \mathbb{R}) &= \rho(8n) - 7, & \rho_H(n, \mathbb{C}) &= \nu(n) + 1, & \rho_H(n, \mathbb{H}) &= \rho(4n) - 3. \end{aligned}$$

ただし、 $\rho(n)$ は Hurwitz-Radon 数であり自然数 $n (\geq 1)$ を奇数 u と自然数 α, β ($\beta \leq 3$) によって、 $n = u \cdot 2^{4\alpha+\beta}$ と一意的に表したとき

$$\rho(n) := 8\alpha + 2^\beta$$

で定義される (但し、 $\rho(0) := \infty$ とする)。また、 $\nu(n)$ は自然数 $n (\geq 1)$ を奇数 u と自然数 m によって、 $n = u \cdot 2^m$ と一意的に表したとき

$$\nu(n) := 2m$$

で定義される。この講演では $\rho(n, \mathbb{F})$ を $\mathbb{F}$ 上の Hurwitz-Radon 数と呼び、 $\rho_H(n, \mathbb{F})$ を $\mathbb{F}$ 上のエルミートな Hurwitz-Radon 数と呼ぶ。 n が 2 の巾のときの $\rho(n, \mathbb{F})$ の値は次のようになる。

n	1	2	4	8	16	32	64	2^7	2^8	...
$\rho(n, \mathbb{R})$	1	2	4	8	9	10	12	16	17	...
$\rho(n, \mathbb{C})$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	...
$\rho(n, \mathbb{H})$	4	5	6	8	12	13	14	16	20	...

n 次元の可除環が存在することは、 non-singular な双線形写像 $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在することに他ならない。さらにこれは、 $n \leq \rho(n, \mathbb{R})$ と同値である。即ち、定理 20 の系として (1, 2, 4, 8) 定理が得られる。

予想 4 の tangential 版は、Adams の定理により解決する。

定理 21. $O(p+1, q)/O(p, q)$ の tangential 対称空間がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つことは、 $M(q, \mathbb{R})$ に $p+1$ 次元の non-singular な部分空間が存在することと同値である。従って、不等式 $p < \rho(q)$ と同値である。

条件 $p < \rho(q)$ を満たす (p, q) は次のようになる。

p	$\mathbb{N}$	0	1	2, 3	4, $\dots$, 7	8	9	$\dots$
q	0	$\mathbb{N}$	$2\mathbb{N}$	$4\mathbb{N}$	$8\mathbb{N}$	$16\mathbb{N}$	$32\mathbb{N}$	$\dots$

この結果は、簡約型対称空間に関する予想 4 で挙げられたものより多くの対称空間がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つことを表している。

5 主結果

前節までに 4 つの系列について、tangential 等質空間がコンパクト Clifford-Klein 形を持つ必要十分条件を見てきた。これら 4 つを含む合計 10 の系列の等質空間に対して、コンパクト Clifford-Klein 形を持つ必要十分条件を与えることがこの講演の目的である。

定理 22. G/H を下の表にある等質空間とする。tangential 等質空間 G_θ/H_θ がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つ必要十分条件は、表内の条件で与えられる (但し、*none* はコンパクト Clifford-Klein 形が常に存在しない事を表す)。

	G/H	条件
1	$GL(n+1, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R})$	$n = 1$
2	$GL(n+1, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{C})$	$n = 1$
3	$GL(n+1, \mathbb{H})/GL(n, \mathbb{H})$	$n = 1$
4	$O(p+1, q)/O(p, q)$	$p < \rho(q)$
5	$U(p+1, q)/U(p, q)$	q が偶数のとき $p \leq 1$ 奇数のとき $p = 0$
6	$Sp(p+1, q)/Sp(p, q)$	$p = 0$
7	$O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$	$n = 1, 3, 7$
8	$O^*(2n+2)/O^*(2n)$	$n = 1, 3$
9	$Sp(n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$	<i>none</i>
10	$Sp(n+1, \mathbb{R})/Sp(n, \mathbb{R})$	<i>none</i>

簡約型等質空間 G/H とその tangential 等質空間 G_θ/H_θ のそれぞれのコンパクト Clifford-Klein 形の存在に関して、片方がもう一方の必要条件あるいは十分条件となるというような一般論は存在しない。

しかし、双方のコンパクト Clifford-Klein 形の存在/非存在が決定した等質空間に限れば両者の結果は一致している。即ち、

$$G/H \text{ にコンパクト Clifford-Klein 形が存在する} \\ \iff G_\theta/H_\theta \text{ にコンパクト Clifford-Klein 形が存在する}$$

という命題は今のところ反例が見つかっていない。これが単なる偶然なのか、あるいは説明の付くことなのかは分かっていない。

6 証明の準備

この節以降では定理 22 の証明を行う。この節では、その為の準備として、いくつかの補題を用意しよう。

6.1 証明の方針

定理 22 の証明では個々の系列に応じて若干異なった方法を用いる。見通しを良くするために、その方針をまとめておこう。また、どの方法を用いる場合でも、カルタン分解の $\mathfrak{p}$ を求める必要があるなので、それもこ

こでまとめておくことにしよう。

G/H	$\mathfrak{p}$	証明の方針
$GL(n+1, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{p} \simeq M_H(n+1, \mathbb{R})$	Type A (別証明: 可除環の次元定理)
$GL(n+1, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{p} \simeq M_H(n+1, \mathbb{C})$	Type A
$GL(n+1, \mathbb{H})/GL(n, \mathbb{H})$	$\mathfrak{p} \simeq M_H(n+1, \mathbb{H})$	Type A
$O(p+1, q)/O(p, q)$	$\mathfrak{p} \simeq M(q, p+1; \mathbb{R})$	Type C
$U(p+1, q)/U(p, q)$	$\mathfrak{p} \simeq M(q, p+1; \mathbb{C})$	q が偶数のとき Type D q が奇数のとき Type C
$Sp(p+1, q)/Sp(p, q)$	$\mathfrak{p} \simeq M(q, p+1; \mathbb{H})$	Type D
$O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{p} \simeq M_A(n+1, \mathbb{R})$	Type B (別証明: 可除環の次元定理)
$O^*(2n+2)/O^*(2n)$	$\mathfrak{p} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \mid A, B \in M_A(n+1, \mathbb{R}) \right\}$	Type B (別証明: 可除環の次元定理)
$Sp(n+1, \mathbb{R})/Sp(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{p} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \mid A, B \in M_H(n+1, \mathbb{R}) \right\}$	Type B
$Sp(n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{p} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} A \in M_H(n+1, \mathbb{C}), \\ B \in M(n+1, \mathbb{C}), {}^t B = B \end{matrix} \right\}$	Type B

- * Type A では、Hurwitz-Radon 数を用いることで、コンパクト Clifford-Klein 形が存在するための必要十分条件が決定できる。
- * Type B では、Hurwitz-Radon 数を用いることで、コンパクト Clifford-Klein 形が存在するための必要条件が決定でき、十分性は別の議論により示す。
- * Type C では、nonsingular な双線形写像の存在問題を經由し Hurwitz-Radon 数を用いる。
- * Type D では、 K -理論を用いる。

(別証明: ...) とあるものについては、可除環の次元に関する定理 (定理 12、定理 13) を用いて証明することも出来る。この証明は 7 節の Type B, Type C の後ろに付けた。

6.2 連結な部分群の存在に帰着

個々の系列の証明に入る前に共通する部分をここで示そう。ここでの主結果は補題 24 であり、次節では補題 24 の条件 (ii) を系列毎に考えることになる。

コンパクト Clifford-Klein 形の存在問題の難しさの一つに、 Γ という離散部分群を扱うという点が挙げられる。実は、tangential 等質空間においては、この離散部分群の存在を連結な部分群の存在に帰着することができる (補題 23)。この補題により、簡約型等質空間に比べてコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題が易しくなる。また、定理 22 に挙げられた系列に対してはコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題に対して、さらに容易な判定条件を与えることが出来る (補題 24)。これらの補題を述べるために、まず非コンパクト次元を定義しよう。

リー群 G に対し、その非コンパクト次元 $d(G)$ を次で定義する。

$$d(G) := \dim(G) - \dim(K).$$

但し K は G の極大コンパクト群とする。 G 内の極大コンパクト群は互いに conjugate であるから、 $d(G)$ は K のとりかたによらず well-defined である。特に G を簡約型リー群とし、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ をそのリー環のカルタン分解とすると

$$d(G) = d(G_\theta) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{k} = \dim \mathfrak{p}$$

が成り立つ。

次の補題は tangential 等質空間のコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題を連結な部分群 ($\mathfrak{p}$ の部分空間) の存在問題に帰着する。

補題 23. $G_\theta := K \ltimes \mathfrak{p}$ を G のカルタン運動群とし、 G_θ/H_θ を G/H の *tangential* 等質空間とする。このとき、次は同値である。

- (i) G_θ/H_θ はコンパクト *Clifford-Klein* 形を持つ。
- (ii) 次の条件 (a), (b) を満たす $\mathfrak{p}$ の部分空間 W が存在する。
 - (a) $\dim W + d(H) = d(G)$.
 - (b) $W \cap \text{Ad}(k)\mathfrak{p}_H = \{0\}$ (for any $k \in K$).

補題 23 は一般の *tangential* 等質空間 G_θ/H_θ について成り立つが、特に G/H が定理 22 に表れる等質空間の場合、条件 (ii)(b) をさらに簡単に言い替えることが出来る。即ちこの場合、補題 23 の条件 (ii)(b) は $W \subset \mathfrak{p}$ が non-singular 部分空間となることと同値である。
従って、次の補題が成り立つ。

補題 24. G/H を定理 22 で挙げられた等質空間とする。このとき次は同値。

- (i) G_θ/H_θ はコンパクト *Clifford-Klein* 形を持つ。
- (ii) $\mathfrak{p}$ には実 $(d(G) - d(H))$ -次元の non-singular 部分空間が存在する。

7 定理 22 の証明

最後に個々の系列に対してコンパクト *Clifford-Klein* 形が存在する必要十分条件を決定する。補題 24 を用いることで、証明の大部分は簡単な不等式の計算に帰着される。6.1 節で述べた Type 毎に証明していこう。

7.1 Type A

(Case I) $G/H = GL(n+1, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R})$ のとき
 $d(G) - d(H) = n+1$ であり、 $\mathfrak{p} \simeq M_H(n+1, \mathbb{R})$ であるから、補題 24 より

$$n+1 \leq \rho_H(n+1, \mathbb{R}) = \rho(8n+8) - 7$$

となる。これを解いて $n=1$ を得る。

(Case II) $G/H = GL(n+1, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{C})$ のとき
同様に、 $p \simeq M_H(n+1, \mathbb{C})$ から

$$d(G) - d(H) = 2n+1 \leq \rho(n+1, \mathbb{C}) = \nu(n+1) + 1$$

となり $n=1$ を得る。

(Case III) $G/H = GL(n+1, \mathbb{H})/GL(n, \mathbb{H})$ のとき
 $p \simeq M_H(n+1, \mathbb{H})$ から

$$d(G) - d(H) = 4n+1 \leq \rho(n+1, \mathbb{H}) = \rho(4n+4) - 3$$

となり $n=1$ を得る。

注意 25. 以上は Hurwitz-Radon 数を用いた証明である。一方、以下の考察から補題 15 に証明を与えることが出来、従って (Case I) に対する別証明 (Hurwitz-Radon 数を用いない証明) を与えることが出来る。

$W \subset M_H(n, \mathbb{R})$ を non-singular な n 次元部分空間とする。 $w \in W$ を自然に非退化な対称二次形式とみなすと、写像

$$f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} W \subset (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)^*$$

から自然に

$$f^* : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \quad (\simeq \mathbb{R}^n)$$

が定まる。これより $\mathbb{R}^n$ に可換な可除環の構造が入る。即ち、

$$n \leq \rho_H(n, \mathbb{R}) \iff n \text{ 次元の可換な可除環が存在する}$$

が成り立つ。従って上記の (Case I) の証明において不等式 $n+1 \leq \rho_H(n+1, \mathbb{R})$ を得た部分で止めれば、これは補題 15 の証明となる。

7.2 Type B

(case IV) $G/H = O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$ のとき

$\mathfrak{p} \simeq M_A(n+1, \mathbb{R}) \subset M(n+1, \mathbb{R})$ であるから

$$d(G) - d(H) = n \leq \rho(n+1, \mathbb{R})$$

が必要条件となる。これより $n = 1, 3, 7$ を得る。これが十分条件であることは、 f_c, f_h, f_o を

$$\begin{aligned} f_c(b) &:= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \in M_A(2, \mathbb{R}) \\ f_h(b, c, d) &:= \begin{pmatrix} 0 & -b & -c & -d \\ b & 0 & d & -c \\ c & -d & 0 & b \\ d & c & -b & 0 \end{pmatrix} \in M_A(4, \mathbb{R}) \\ f_o(b, c, d, e, f, g, h) &:= \begin{pmatrix} 0 & -b & -c & -d & -e & -f & -g & -h \\ b & 0 & -d & c & f & -e & h & -g \\ c & d & 0 & -b & g & -h & -e & f \\ d & -c & b & 0 & h & g & -f & -e \\ e & -f & -g & -h & 0 & b & c & d \\ f & e & h & -g & -b & 0 & d & -c \\ g & -h & e & f & -c & -d & 0 & b \\ h & g & -f & e & -d & c & -b & 0 \end{pmatrix} \in M_A(8, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

で定めたとき Image f_* が non-singular な部分空間となることから分かる。

注意 26. f_c, f_h, f_o は $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ の積構造から自然に定まる線形写像である。

(Case V) $G/H = O^*(2n+2)/O^*(2n)$ のとき

$\mathfrak{p} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \mid A, B \in M_A(n+1, \mathbb{R}) \right\} \subset M(2n+2, \mathbb{R})$ であるから

$$d(G) - d(H) = 2n \leq \rho(2n+2, \mathbb{R})$$

が必要条件である。これより $n = 1, 3$ を得る。これが十分条件であることは

$$\begin{aligned} f_h(b, 0, d) &\in \mathfrak{p} & (n = 1 \text{ のとき}) \\ f_o(b, c, d, 0, f, g, h) &\in \mathfrak{p} & (n = 3 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

が $\mathfrak{p}$ の non-singular 部分空間を定めることから分かる。

(Case VI) $G/H = Sp(n+1, \mathbb{R})/Sp(n, \mathbb{R})$ のとき
 $\mathfrak{p} \subset M_H(2n+2, \mathbb{R})$ であるから、

$$d(G) - d(H) = 2n+2 \leq \rho_H(2n+2, \mathbb{R}) = \rho(16n+16) - 7 = \rho(n+1) + 1$$

が必要条件となる。しかし、これを満たす n は存在しない。

(Case VII) $G/H = Sp(n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$ のとき $\mathfrak{p} \subset M_H(2n+2, \mathbb{C})$ であるから

$$d(G) - d(H) = 4n+3 \leq \rho_H(2n+2, \mathbb{C}) = \nu(2n+2) + 1$$

が必要条件となる。しかし、これを満たす n は存在しない。

以上は Hurwitz-Radon 数を用いた証明である。ここで、補題 16 に証明を与えよう。これは、(Case IV) の必要性の別証明 (Hurwitz-Radon 数を用いない証明) を与えることになる。

Proof. $O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$ の tangential 対称空間がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つならば、nonsingular な n 次元部分空間 $W \subset \mathfrak{p} \simeq M_A(n+1, \mathbb{R})$ が取れる。 $w \in W \setminus \{0\}$ の任意の固有値は非ゼロ純虚数であるから、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\det(A+tI) \neq 0$ となる。即ち、 $W \oplus \mathbb{R}I$ は $M(n+1, \mathbb{R})$ 内の non-singular な $n+1$ 次元部分空間である。これより $n+1$ 次元の可除環が存在する。 ■

同様に、補題 17 に証明を与えよう。これは、(Case V) の必要性の別証明 (Hurwitz-Radon 数を用いない証明) を与えることになる。

Proof. $O^*(2n+2)/O^*(2n)$ の tangential 対称空間がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つならば、nonsingular な $2n$ 次元部分空間 $W \subset \mathfrak{p} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \mid A, B \in M_A(n+1, \mathbb{R}) \right\}$ が取れる。 $X(a, b) := \begin{pmatrix} aI & bI \\ bI & -aI \end{pmatrix}$ とおくと、 $w \in W \setminus \{0\}$ は $X(a, b)$ と可換であり、 $X(a, b)$ の固有値は実数、 w の固有値は非ゼロ純虚数であるから $W \oplus \text{Image } X$ は $M(2n+2, \mathbb{R})$ 内の non-singular な $2n+2$ 次元部分空間となる。これより $2n+2$ 次元の可除環が存在する。 ■

7.3 Type C

(Case VIII) $G/H = O(p+1, q)/O(p, q)$ のとき

$d(G) - d(H) = q$ であり、 $\mathfrak{p} \simeq M(q, p+1; \mathbb{R})$ である。従って、同値変形

$$\begin{aligned} M(q, p+1; \mathbb{R}) \text{ に } q \text{ 次元の non-singular 部分空間が存在する} \\ \iff \text{non-singular 双線形写像 } f: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^q \text{ が存在する} \\ \iff M(q, \mathbb{R}) \text{ に } p+1 \text{ 次元の non-singular 部分空間が存在する} \end{aligned}$$

より $p < \rho(q)$ を得る。

(Case IX-a) $G/H = U(p+1, q)/U(p, q)$ かつ q が奇数のとき

$d(G) - d(H) = 2q$ であり、 $\mathfrak{p} \simeq M(q, p+1; \mathbb{C})$ であるから、 G_θ/H_θ がコンパクト Clifford-Klein 形を持つならば $M(q, p+1; \mathbb{C})$ に実 $2q$ 次元の nonsingular 部分空間が存在する。従って、自然な埋め込み $M(q, p+1; \mathbb{C}) \subset M(2q, 2p+2; \mathbb{R})$ により $M(2q, 2p+2; \mathbb{R})$ に $2q$ 次元の nonsingular 部分空間が存在する。これより (Case VIII) と同様の議論により $M(2q, \mathbb{R})$ に $2p+2$ 次元の non-singular 部分空間が存在する事になる。従って、不等式 $2p+2 \leq \rho(2q)$ を得るが、今 q は奇数であるから $p=0$ でなければならない。

7.4 Type D

次の補題を認めて証明を続けることにしよう。補題の証明はこの節の最後に行う。

補題 27. $q (\geq 1)$ を自然数とする。 $M(p, q; \mathbb{C})$ に実 $2q$ 次元の *nonsingular* 部分空間が存在するならば $p \leq 2$ である。

(Case IX-b) $G/H = U(p+1, q)/U(p, q)$ かつ q が偶数のとき

$\mathfrak{p} \simeq M(q, p+1, \mathbb{C})$ であり、 $d(G) - d(H) = 2q$ であるから、 G_θ/H_θ がコンパクト Clifford-Klein 形を持つならば、 $M(q, p+1)$ には実 $2q$ 次元の non-singular 部分空間が存在する。従って、補題 27 より $p = 0, 1$ を得る。

あとは、これが十分条件であることを確かめれば良い。

$p = 0$ のときは $H = H_\theta = U(p)$ がコンパクトなので良い。

$p = 1$ のときは、 $q = 2n$ とおくと、実線形写像

$$\mathbb{C}^{2n} \rightarrow M(2n, 2; \mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \overline{\beta_1} & \overline{\alpha_1} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & -\beta_n \\ \overline{\beta_n} & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

の像が $M(2n, 2; \mathbb{C})$ の non-singular 部分空間を与えることから十分性が分かる。

(case X) $G/H = Sp(p+1, q)/Sp(p, q)$ のとき

$\mathfrak{p} \simeq M(q, p+1; \mathbb{H})$ であり、 $d(G) - d(H) = 4q$ であるから、 G_θ/H_θ がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つならば、 $M(q, p+1; \mathbb{H})$ には実 $4q$ 次元の non-singular 部分空間が存在する。従って自然な埋め込み $M(q, p+1; \mathbb{H}) \subset M(2q, 2p+2; \mathbb{C})$ と補題 27 より $p = 0$ を得る。最後に補題 27 を証明しよう。

Proof. $p \geq 3$ として矛盾を導けば良い。仮定より non-singular な線形写像

$$f : \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^{2q} \rightarrow \mathbb{C}^q$$

であって、 $v \in \mathbb{R}^{2q}$ に対して、

$$f(\cdot, v) : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^q$$

が $\mathbb{C}$ -線形となるものが存在する。 S^5 を $\mathbb{C}^3$ 内の単位球面とし、自然な包含関係 $S^5 \subset \mathbb{C}^3 \subset \mathbb{C}^p$ により、 f を $S^5 \times \mathbb{R}^{2q}$ へ制限したものを再び f と書くことにする。写像 T を

$$T : S^5 \times \mathbb{R}^{2q} \rightarrow S^5 \times \mathbb{C}^q, \quad (x, v) \mapsto (x, \overline{f(x, v)})$$

で定めると f の non-singularity より T は全単射となる。 $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とおき、 G の $S^5 \times \mathbb{R}^{2q}$, $S^5 \times \mathbb{C}^q$ への作用を

$$\begin{aligned} G \curvearrowright S^5 \times \mathbb{R}^{2q}, & \quad z : (x, v) \mapsto (zx, v) \\ G \curvearrowright S^5 \times \mathbb{C}^q, & \quad z : (x, w) \mapsto (zx, \bar{z}w) \end{aligned}$$

で定める。このとき、 T の定義より $T \circ z = z \circ T$ であるから、微分同相

$$\tilde{T} : S^5 \times \mathbb{R}^{2q}/G \xrightarrow{\sim} S^5 \times \mathbb{C}^q/G$$

が得られる。ここで、 $S^5 \times \mathbb{R}^{2q}/G \simeq \mathbb{CP}^2 \times \mathbb{R}^{2q}$ は $\mathbb{CP}^2$ 上の実自明束であり、 $S^5 \times \mathbb{C}^q/G$ は $\mathbb{CP}^2$ 上の canonical line bundle ξ の q 回の Whitney 和 $q \cdot \xi$ となる。いま $\tilde{T}$ は束同型であるから $q \cdot \xi$ は実自明束となることが分かる。

一方 K -理論によると $\widetilde{KO}(\mathbb{CP}^2) \simeq \mathbb{Z}$ であり、その生成元は ξ で与えられることから $q[\xi] \neq 0$ 、つまり $q \cdot \xi$ は自明束に成り得ず矛盾が示された。 ■

以上より定理 22 が示された。